قطب و قطبی در صفحه

اصل دوگانی

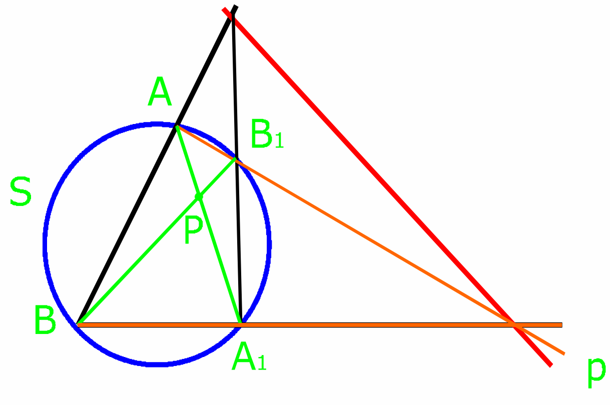
قضیه زیر در آنچه که بعدا خواهد آمد نقش مهمی دارد .

قضیه ۱. اگر از نقطه P ، ناواقع بر دایره S ، همه جفتهای قاطع های ممکن را بر دایره رسم کنیم و نقاط تلاقی آنها را با S به طور نمونه با حروف A و A_1 ، B و B_1 ، نشان دهیم ، آنگاه نقاط تلاقی خطوط AB و A_1B_1 نیز نقاط تلاقی خطوط AB_1 و A_1B همه بر یک خط p قرار دارند (شکل ۱ الف و ب).

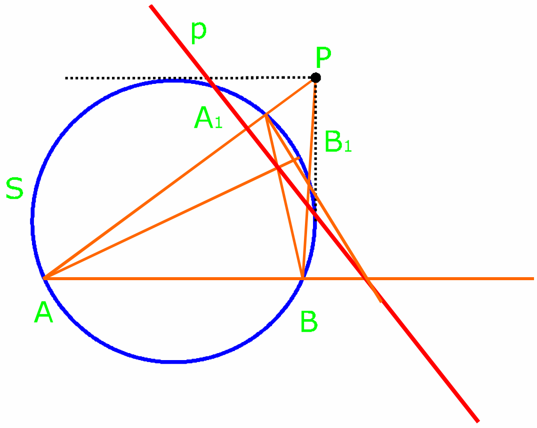
خط p قطبی نقطه P ، و نقطه P قطب خط p نسبت به دایره S نامیده می شود.

در بدو امر ممکن است قضیه ۱ چندان جالب به نظر نیاید ، ولی نتایج ضمنی فوق العاده اش علت توجه ما را به آن کاملا توجیه خواهد کرد.

قضیه های 1 و $1'$ بخش قبل به ما امکان می دهند که برهان ساده ای برای قضیه ۱ بیاوریم زیرا اگر نقطه P داخل دایره S باشد (شکل ۱ الف) ، یک تصویر مرکزی مناسب می تواند S را به یک دایره S' و P را به مرکز آن بدل کند . ($\leftarrow$ قضیه ۱، بخش قبل) . در حالتی که P مرکز S باشد، قضیه ۱ بدیهی است . زیرا در این حالت چهار ضلعی ABA_1B_1 یک مستطیل می شود (همه زوایای آن رو به رو قطرند) ، $AB \| B_1A_1$ و $AB_1 \| BA_1$ ، و در نتیجه مکان مطلوب خط بینهایت صفحه خواهد شد . (شکل ۲ الف) . از اینجا نتیجه می گیریم که قضیه ما باید به ازای هر نقطه P در داخل S صادق باشد . اگر P بیرون S باشد (شکل ۱ ب) ، آنگاه یک تصویر مرکزی مناسب یک خط مار بر P را ، که با S متقاطع نیست ، به خط بینهایت بدل می کند و لذا P به یک نقطه در بینهایت بدل خواهد شد.

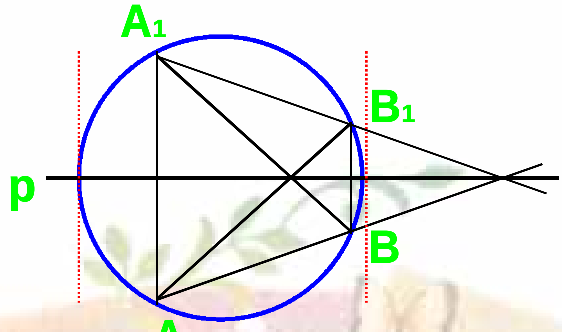


شکل۱(الف)

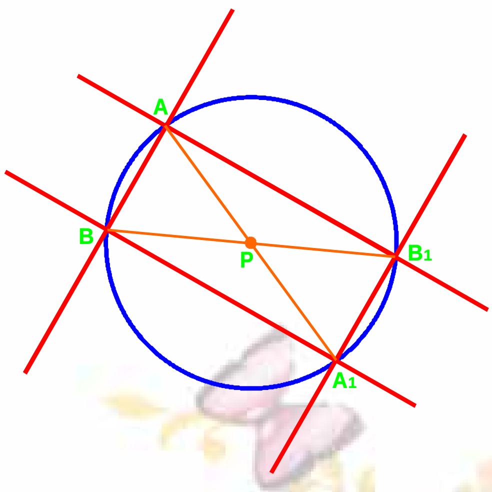


شکل۱(ب)

ولی اگر P نقطه ای در بینهایت باشد ، قضیه ۱ بدیهی است . زیرا، در این صورت چهار ضلعی AA_1B_1B ذوزنقه ای است محاط در یک دایره (یعنی ، ذوزنقه ای متساوی الساقین) که امتدادهای قاعده هایش ثابت انــد (شــکل ۲ ب) ،و نقاط تلاقی اضلاع AB و A_1B_1 ، و اقطار A_1B و AB_1 بر محور تقارن ذوزنقه یعنی بر قطری از S عمود بر امتـداد قاعـده های آن واقع می شوند . این امر ایجاب می کند که قضیه ۱ به ازای هر نقطه P واقع در خارج S نیز صادق باشد.



شکل۲(ب)

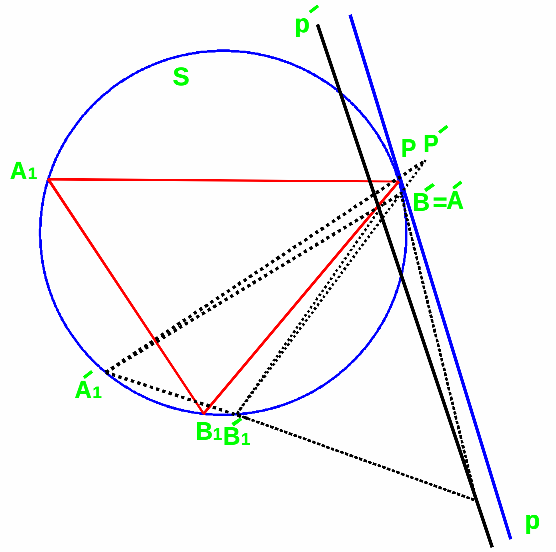


شکل۲(الف)

اگر P بر S باشد ، مکان قضیه ۱ بی معنی می شود ، زیرا در آن صورت نقاط A و B بر P منطبق انـد ، و چهـار

ضلعی ABB_1A_1 به مثلث A_1B_1P بدل می شود ، خطوط A_1B و B_1A در P تلاقی می کنند و خط AB نامعین می شود (شکل ۳) . ولی ، به آسانی دیده می شود که اگر یک نقطه P' که بر S نیست ، به هر طریقی به P نزدیک شود، p' قطبی P' به مماس بر S در P نزدیک می شود (شکل ۳) .بنابراین طبیعی است که قطبی نقطه P واقع بر S (نسبت به S) را مماس p بر S در P تعریف می کنیم .

اگر P درون S باشد ، قطبی p نسبت به S تماماً بیرون S قرار می گیرد ، و اگر P بیرون S باشد ، قطبی آن p ، S را می برد (شکل ۱) به آسانی ثابت می شود که اگر نقطه P بیرون دایره S باشد، قطبی آن p ، خطی است که نقاط تماس مماس های مرسوم از P بر S را به هم وصل می کند (شکل ۱ ب) .



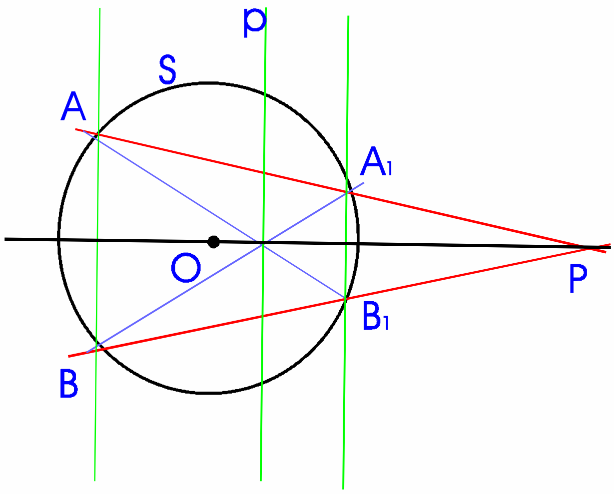
شکل ۳

برای اثبات این مطلب توجه داشته باشید که این حکم درست است وقتی P نقطه ای در بینهایت باشد (← شکل ۲ ب) . اکنون نتیجه مطلوب حاصل می شود ، زیرا یک تصویر مرکزی که P را به یک نقطه P' و S را به یک دایره S' بدل کند، قطبی P نسبت به S را هم به قطبی P' نسبت به S' بدل می کند و مماس های بر S را به مماس های بر S' .

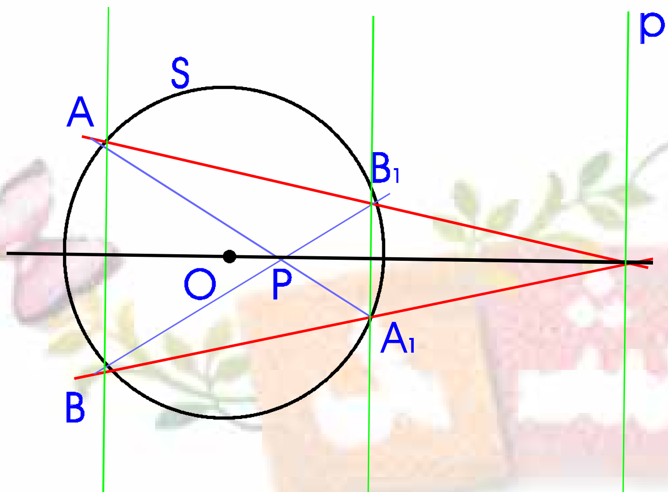
ملاحظه می کنیم که p ، قطبی یک نقطه S' نسبت به یک دایره S، بر خط واصل بین P و O ، مرکز دایره S،

عمود است . به عکس ، P ، قطب یک خط p ، بر عمودی واقع است که از O ، مرکز S ، بر p فرود آید . این مطلب ، از توجه به تقارن نتیجه می شود (شکل ۴ الف و ب) .

رسم قطبی یک نقطه P و نیز تعیین قطب یک خط نسبت به یک دایره مفروض S ، در تعاریف این مفاهیم مستتر است (← شکلهای ۱(الف) و (ب)) . این هر دو عمل را می توان با ستاره تنها انجام داد، موردی که ما بعداً عمل خواهیم کرد . قضیه زیر مهمترین قضیه درباره قطب و قطبی است :



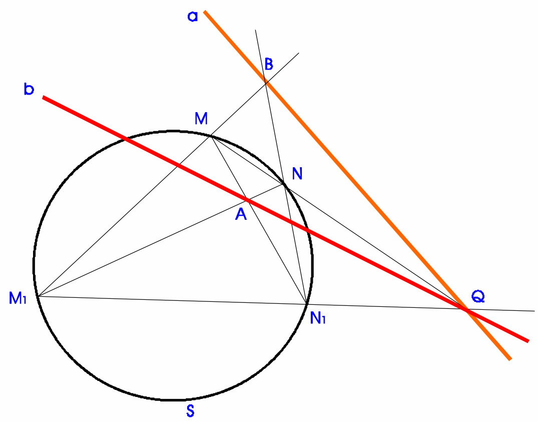
شکل۴(الف)



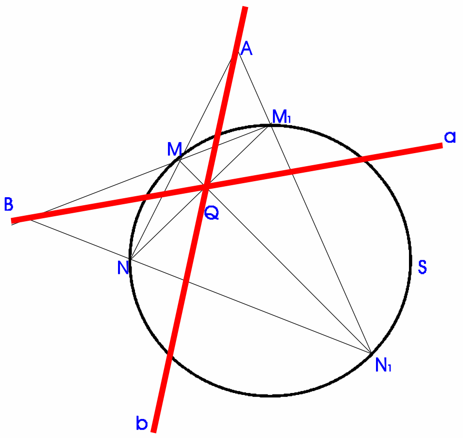
شکل۴(ب)

قضیه ۲. اگر نقطه A بر خط b ، قطبی نقطه B ، قرار داشته باشد ، B نیز بر خط a ، قطبی نقطه A ، قرار دارد (شکل ۵) .

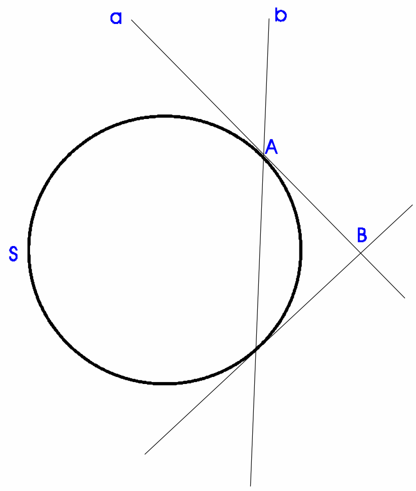
این ویژگی نتیجه مستقیم تعریف است . زیرا اگر A نقطه ای در داخل دایره S باشد، B الزاماً بیرون S خواهد بود (شکل ۵ الف) ؛ در غیر این صورت قطبی b تماماً بیرون S قرار خواهد گرفت ، که مغایر این حقیقت است که نقطه داخلی A بر b قرار دارد . چون A بر قطبی B قرار دارد ، دو قاطع مار بر B وجود دارند که S را در نقاط M و M_1 ، N و N_1 ، می برند چنانکه A نقطه تلاقی قطرهای چهار ضلعی MM_1N_1N است . اما در این صورت قطبی A خط BQ است ، که Q نقطه تقاطع MN و M_1N_1 است ، و معنی این نکته این است که قطبی A از B می گذرد .



شکل۵(الف)



شکل۵(ب)



شکل۵(ج)

یک استدلال مشابه اثبات قضیه ۲ را تمام می کند وقتی A بیرون S قرار داشته باشد (در آن حالت B یا می‌تواند درون S باشد – مثل شکل ۵ (الف) ، که فقط کافی است جای A و B را با هم عوض کنیم – یا بیرون S است مثل شکل ۵ (ب) . اگر A نقطه ای از S باشد، برهان قضیه ۲ از شکل ۵ج نتیجه می شود .

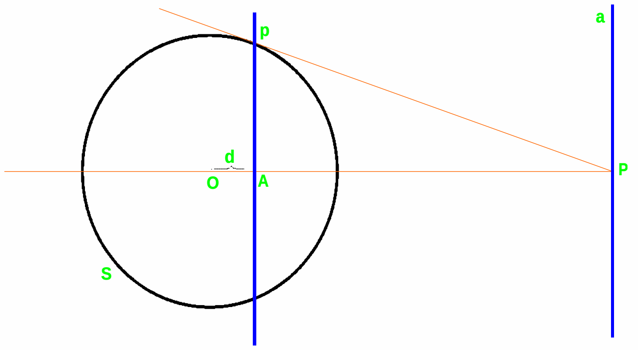
۱. ثابت کنید که اگر فاصله یک نقطه A از O ، مرکز دایره S به شعاع ۱، برابر d باشد، فاصله O از قطبی نقطه A نسبت به S ، یعنی از خط a ، مساوی $1/d$ خواهد بود .

حل. اگر A در بیرون دایره $S(d>1)$ باشد و AC و AD مماس های مرسوم از A بر S باشند ، آنگـاه a ، قطبـی نقطه A ، بر CD منطبق است و $a \perp OA$. فرض می کنیم P نقطه تلاقی CD و OA باشد (شکل ۶ الف) . چون مثلـث های OCA و OPC متشابه انـد $OA/OC = OC/OP$ یـا $OP = OC^2/OA = 1/d$ ، کـه همـان چیـزی اسـت کـه می‌خواستیم ثابت کنیم .

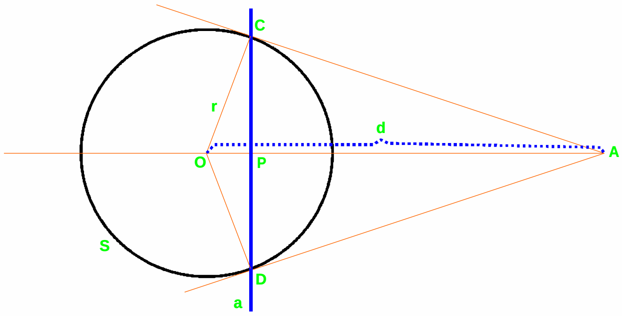
اگر A بر $S(d=1)$ باشد، قضیه بدیهی است . اگر A در داخل $S(d<1)$ باشد، p خطی است مار بر A و عمـود بر OA ، و P قطب p است ، پس P بر خط OA در بیرون S واقع است (شکل ۶ ب) . مانند فـوق نتیجـه مـی گیـریم

که $OA=1/d$ یا $OP=1/OA=1/d$. a قطبی A ، عمودی است که از P بر OA رسم می شود. بنـابراین OP برابـر فاصله O از a است؛ اما این فاصله درست $1/d$ است.

یادداشت . به همین طریق ، می توانیم ثابت کنیم که ، اگر فاصله A از O برابر d و شعاع دایره r باشد ، فاصله a ، قطبی A ، از O برابر r^2/d است .



شکل۶(ب)



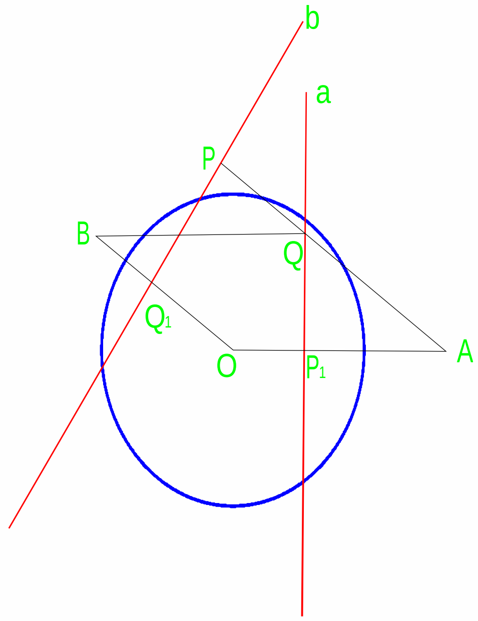
شکل۶(الف)

۲. A و B دو نقطه اند ، a و b قطبی های آن ها نسبت به یک دایره S به مرکـز O ؛ AP فاصـله A از b ، و BQ فاصله B از a است . نشان دهید که :

$$\frac{OA}{AP}=\frac{OB}{BQ}$$

حل. فرض می کنیم P_1 نقطه تلاقی OA و a باشد ، و Q_1 نقطه تلاقی OB و b (شـکل ۷) . ذوزنقـه هـای قـائم الزوایــه $OAPQ_1$ و $OBQP_1$ بـا $\angle OAQ_1 = \angle BOP_1$ را درنظــر مـــی گیـــریم . بـــه موجـــب مـــسئله ۱ داریم $OA.OP_1 = OB.OQ_1 = r^2$. (r شعاع دایره S) ، لذا $OA/OB = OQ_1/OP_1$. از اینجا نتیجـه مـی شـود کـه ذوزنقه ها متشابه اند . ($OAPQ_1$ بر اثر یک تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $k = OA/OB = OQ_1/OP_1$ و به دنبـال آن یک تقارن نسبت به نیمساز زاویه AOB از $OBQP_1$ به دست آمـده اسـت.) بنـابراین $OA/AP = OB/BQ$ (OA

و OB ، AP و BQ جفت های اضلاع متناظر ذوزنقه ها هستند) ، که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم .



شکل ۷

.۳

الف. گیریم $ABCD$ یک چهار ضلعی محاط در دایره S باشد . نشان دهید که عمود مرسوم از مرکز S بر خط واصل بین نقاط اضلاع مقابل این چهار ضلعی از نقطه تلاقی قطرهایش می گذرد .

ب. حکم بالا را با این فرض که چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر S باشد ثابت کنید.

حل.

الف. فرض می کنیم P و Q نقطه های تلاقی اضلاع چهار ضلعی محاط در S باشند، و R نقطه تلاقی قطرهای آن . از قضیه ۱ نتیجه می شود که R قطب PQ است (← شکل ۱۶ الف) که این امر قضیه ما را ایجاب می کند.

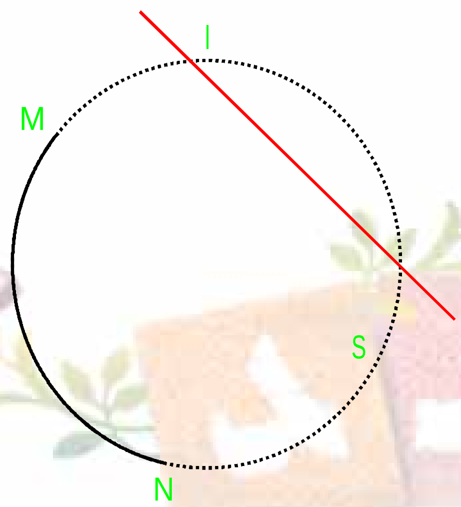
ب. اگر A_1 و B_1 و C_1 و D_1 ، نقطه های تماس اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر دایره S باشد ، آنگاه

نقطه های تلاقی قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ بر هم منطبق اند. هم چنین خط های واصل بین نقطه های اضلاع مقابل چهار ضلعی ها بر هم منطبق اند .قضیه مورد بحث از قسمت (الف) نتیجه می‌شود .

۴ . گیریم A نقطه ای در بیرون دایره S باشد . با استفاده از یک ستاره تنها، از A مماس هایی بر دایره S رسم کنید.

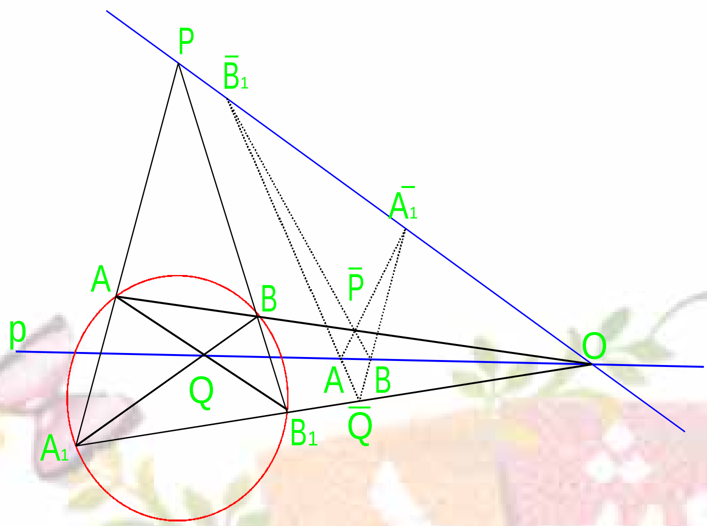
حل. نقطه های تماس دو مماس مرسوم از A بر دایره S با خط واصل بین نقطه های تلاقی S با a ، قطبی A بر هم منطبق اند. حال a می تواند به آسانی با استفاده از ستاره تنها رسم شود (← شکل ۱ ب) . برای رسم مماس ها A ، را به نقطه های تلاقی a و S وصل می کنیم .

۵ . گیریم MN قوسی از یک دایره S باشد ، و l خطی نامتقاطع با آن (شکل ۸) . با استفاده از یک ستاره تنها نقاط l و S را پیدا کنید .



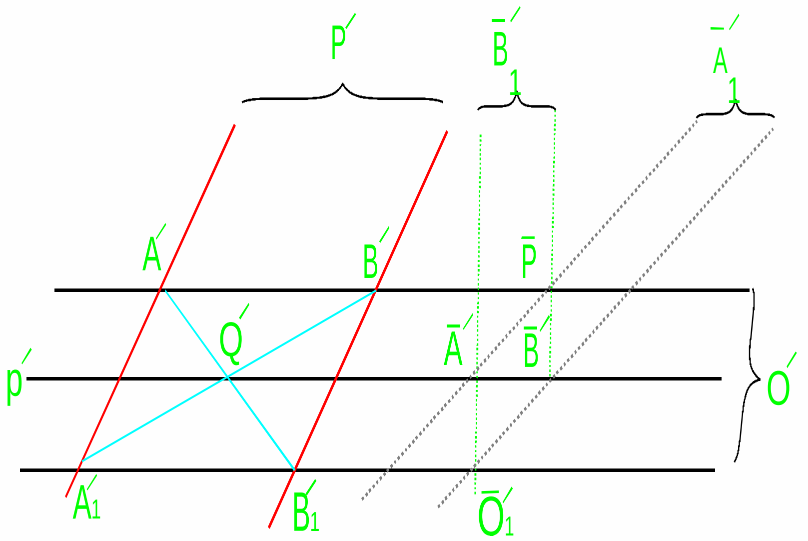
شکل۸

حل. فرض می کنیم که ABB_1A_1 یک چهار ضلعی محاطی در یک دایره S باشد . اگر اضلاع AA_1 و BB_1 در P متقاطع باشند ، و اضلاع AB و A_1B_1 در O ، و قطرهای AB_1 و BA_1 در Q ، آنگاه p ، قطبی P ، خط OQ خواهد شد . (شکل ۹الف) . از اینجا نتیجه می شود که p قطبی P نسبت به دو خط AB و A_1B_1 است. لذا p قطبی هر نقطه از خط OP نسبت به خط های AB و A_1B_1 است . به آسانی می توان ثابت کرد که A_1B_1 قطبی هر نقطه AB نسبت به خط های OP و p است . [برای اثبات ، چهار خط AB و A_1B_1 و OP و p از صفحه π را بر یک صفحه π' جدید تصویر می‌کنیم به گونه ای OP که خط خاص π باشد . در این صورت AB و A_1B_1 به خط های موازی $A'B'$ و $A_1'B_1'$ ، و OP به $O'P'$ ، خط بینهایت صفحه π' ، و p به میان خط p' از نوار حاصل به وسیله $A'B'$ و $A_1'B_1'$ (شکل ۹۱۷۹ ب) بدل می شوند . بنابر تعریف قطبی یک نقطه نسبت به دو خط ، $A_1'B_1'$ قطبی هر نقطه P' واقع بر خط $A'B'$ است نسبت به خط های p' و $O'P'$. اما در این صورت A_1B_1 قطبی پیشنگار نقطه P ، واقع بر خط AB ، نسبت به خط های p و OP است] .

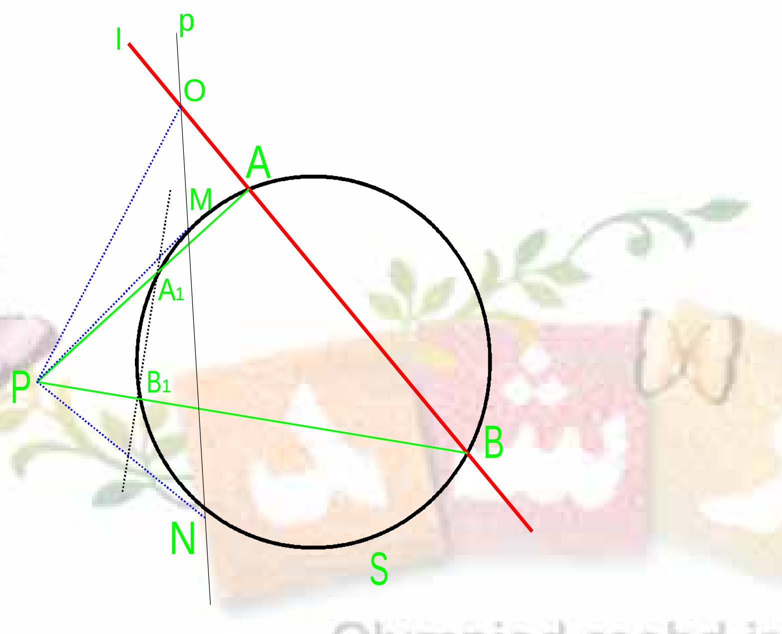


شکل۹(الف)

بنابراین ، وقتی خط های OP و p و AB داده شده باشند ، می توانیم خط A_1B_1 را به وسیله ستاره تنها رسم کنیم ، یعنی دو خط $\overline{PAA_1}$ و $\overline{PBB_1}$ متقاطع در $\overline{P}$ بر AB را رسم می کنیم ($\overline{A}$ و $\overline{B}$ بر P واقع اند ، در حالی که $\overline{A}_1$ و $\overline{B}_1$ بر OP واقع اند) ، و $\overline{Q}$ ، نقطه تلاقی خط های $\overline{AB}_1$ و $\overline{BA}_1$ را به O ، نقطه تلاقی خط های p و AB ، وصل می‌کنیم .



شکل۹(ب)

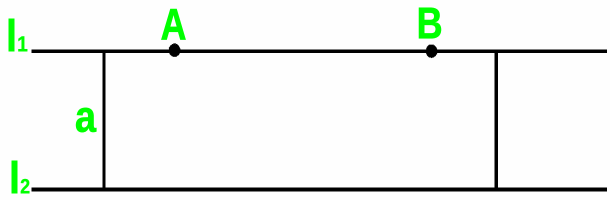


شکل۱۰

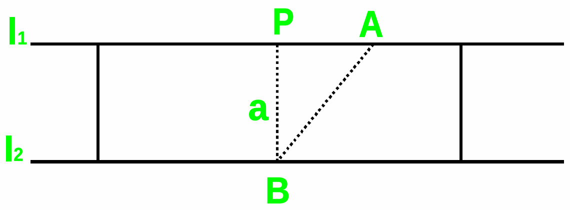
اکنون به حل مسئله خود باز می گردیم . فرض می کنیم p خطی اختیاری باشد که l را در نقطـه ای ماننـد O ، و کمان مفروض را در نقطه های M و N بریده است . (نقطه های تلاقی p با کمان مفروض می تواند بر دو سر کمان منطبق باشد . آنچه که ما می خواهیم این است که خط p موازی با l نباشـد و کمـان MN کمتـر از یـک نـیم دایـره باشـد.) قطب P ی p نسبت به S ، نقطه تلاقی مماس های بر S در نقاط M و N است ، و می تواند به وسیله سـتاره تنهـا رسـم شود . حال فرض می کنیم که l دایره S را در نقاط A و B (که مـی خـواهیم تعیـین کنـیم) ببـرد. خـط هـای PA و PB دایره S را در دو نقطه دیگر A_1 و B_1 می برند (شکل ۱۰) . چنانچه در بالا نشان دادیم ، وقتی خط های AB (یعنـی l) و p داده شده باشند ، می توانیم A_1B_1 را با ستاره تنها رسم کنیم . یادآور می شویم که اگر l در خارج زاویـه MOP باشد (که در این حال ، l دایره S را می برد ولی کمان MN را نمی برد) ، آنگاه A_1B_1 از داخل زاویه MOP می گذرد و در نتیجه ، یا S را نمی برد (در این صورت l دایره S را نمی برد ، و نقطه های A و B وجود ندارند) . یـا کمـان MN را درنقاط A_1 و B_1 می برد . نقاط تقاطع PA_1 و PB_1 با l ، نقاط مطلوب اند.

بررسی مشروح حالتی که A_1 و B_1 بر هم منطبق اند ، یعنی خط A_1B_1 بر S در A_1 مماس است ، به عهده خواننده گذاشته می شود . در این حال l بر S در A ، نقطه تقاطع PA_1 و l ، مماس است ، p قطبی P نسبت به خط هـای OA و OA_1 است .

۶. منظور از خط کش موازی خط کشی است با دو لبه موازی . چنین خط کشی را می تـوان بـرای رسـم دو خـط موازی l_1 و l_2 به کار برد که فاصله آنها a پهنای خط کش باشد و l_1 از دو نقطـه A و B بگـذرد . (شـکل ۱۱ الـف) ، یـا اینکه l_1 از A و l_2 از B بگذرد (شکل ۱۱ب) . نشان دهید که فقط با استفاده از یک خط کش موازی به پهنای a ممکـن است نقاط تلاقی خط مفروض l را با دایره به مرکز مفروض A وشعاع a پیدا کرد ، و لو اینکه دایره رسم نشده باشد .



شکل۱۱(الف)

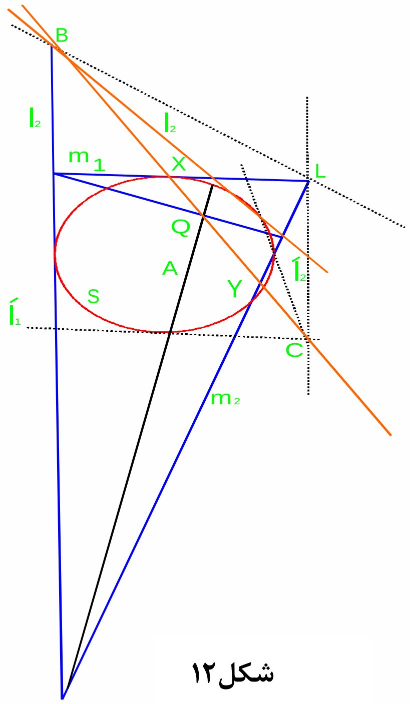


شکل۱۱(ب)

حل. در شکل ۱۱ (ب) خط l_2 مماسی است که از B بر دایره S به مرکز A و شعاع a مماس شده است . بنـابراین می توانیم به وسیله یک خط کش موازی از یک نقطه اختیاری B دو مماس l_1 و l_2 را بدون رسم S ، بر S رســم کنـیم . (شکل ۱۲ ؛ طبیعی است که باید B خارج S باشد) . حال فرض می کنیم B نقطه ای از l باشد، L قطب l نسبت به S، و m_1 و m_2 مماس های مرسوم از L بر S باشند. Q ، نقطه تقاطع قطرهای چهار ضلعی حاصـل از خطهـای l_1 و l_2 و m_1 و m_2 ، بر l واقع است . از اینجا نتیجه می شود که BQ (یعنی l) قطبی L است نسبت بـه خـط هـای l_1 و l_2 ، و BL قطبی Q است نسبت به l_1 و l_2. پس BL قطبی هر نقطه l است نسبت به l_1 و l_2 ، چون l داده شده اسـت و l_1 و l_2 را می توان رسم کرد ، خط BL را می توان به وسیله ستاره تنها رسم نمود.

به روشی مشابه می توانیم خط CL را پیدا کنیم ، که C نقطه دیگـری اسـت از L در خـارج S . پـس L نقطـه تلاقی BL و CL است . مماس های m_1 و m_2 مرسوم از L بر S ، که می توانند به وسیله یک خـط کـش مـوازی رسـم شوند ، l را در نقطه های مطلوب X و Y می برند .

[اگر l دایره S را نبرد ، آنگاه L در داخل S واقع است ، و نمی توان مماسی از L بر S رسم کرد .]



شکل۱۲

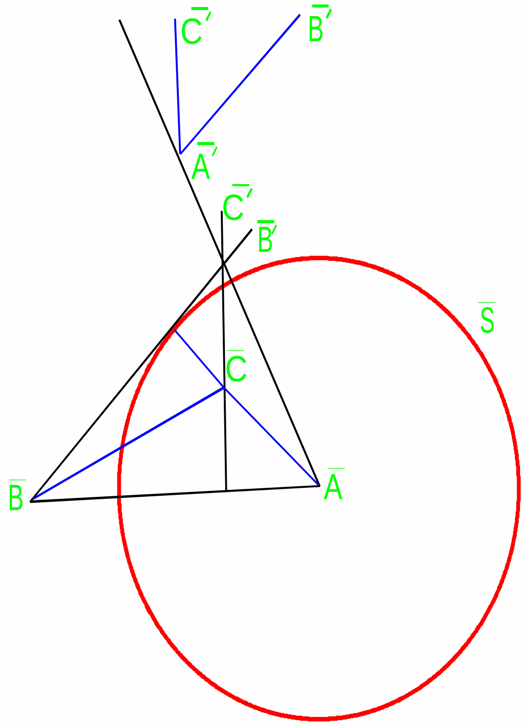
۷ . نشان دهید که خطوط واصل بین راس های مثلث ABC و نقاط A' و B' و C'، قطب های اضلاع مقابل به این راسها نسبت به یک دایره S ، متقارب اند .

حل. گیریم a قطبی A نسبت به دایره S باشد . اگر از یک تصویر مرکزی بـرای تـصویر S بـر یـک دایـره $\bar{S}$ و تصویر A بر یک نقطه $\bar{A}$ استفاده کنیم ، آنگاه خط a به خط $\bar{a}$ قطبی $\bar{A}$ نسبت به $\bar{S}$، بدل خواهد شد . به طریق مشابه ، یک خط b ، قطبی B نسبت به S ، بر اثر این تصویر به خط $\bar{b}$ ، قطبی $\bar{B}$ نسبت به $\bar{S}$ ، بدل می شـود ، کـه $\bar{b}$ نگـاره b است . حال اوضاع مختلف و ممکن مثلث های ABC و $A'B'C'$ را نسبت به S در نظر می گیریم .

۱. فرض می کنیم دست کم یکی از راس های ΔABC، مثلا ً A ، در داخـل دایـره S باشـد . صـفحه ی π نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که به S یـک دایـره $\bar{S}$ بـدل شـود و A بـه $\bar{A}$ ، مرکز $\bar{S}$. بر اثر این تصویر نمودار ما به نمودار شکل ۱۳ بدل می شود ، که در آن $\bar{A}'$ قطب $\overline{BC}$ است ؛ $\bar{B}'$ و $\bar{C}'$ ، قطب های AC و AB ، به قطب هـای قطرهـای $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ از دایـره $\bar{S}$ ، یعنــی بـه نقطـه هـای بینهایت $\bar{B}'$ و $\bar{C}'$ مربوط به امتدادهای عمود بر $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ بدل می شوند (← شکل ۱۳و شکل ۲ ب) . از

اینجا نتیجه می شود که $\overline{BB'}$ و $\overline{CC'}$ ارتفاع های $\Delta\overline{ABC}$ هستند . چون $\overline{AA'}$ سومین ارتفـاع $\Delta\overline{ABC}$ است ($\overline{A'}$ قطب $\overline{BC}$ بر عمود مرسوم از $\overline{A}$ ، مرکز $\overline{S}$ ، بر خـط $\overline{BC}$ واقـع اسـت) ، خـط هـای $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$ و $\overline{CC'}$ متقارب اند . در نتیجه AA' و BB' و CC' متقارب هستند .

۲. فرض می کنیم دست کم یکی از اضلاع مثلث ABC دایره S را نبرد. در این حال راس هـای مربـوط بـه $\Delta A'B'C'$ در داخل S قرار دارند، و می توانیم همان برهانی را که در حالت ۱ آوردیـم ، بـرای $\Delta A'B'C'$ بیاوریم .

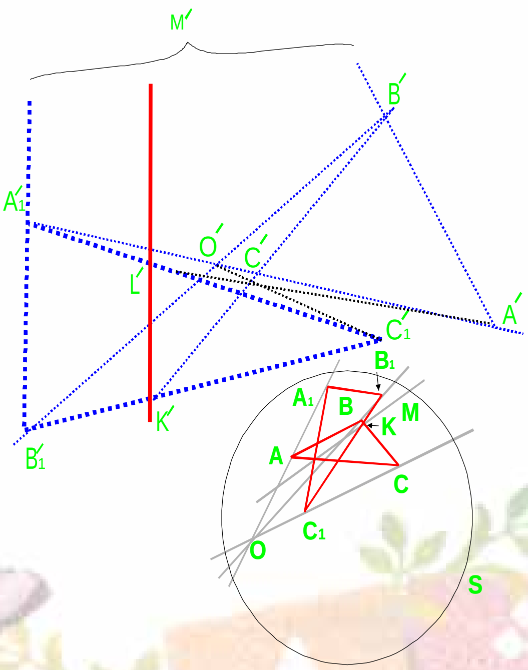


شکل۱۳

۳. بالاخره فرض می کنیم همه راس های ΔABC در خارج S باشند و هیچ یک از اضلاع کاملا در خـارج S نباشند . در این حالت قضیه ما به قضیه مسئله ۱(ب)فصل قبل بدل می شود.

۸ . دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ یک دایره S داده شده اند . ثابت کنید که اگر خط های واصل بین راس های متناظر این دو مثلث متقارب باشند ، خط های واصل بین قطب های اضلاع ΔABC (نسبت به S) و قطب های متناظر به اضلاع $\Delta A_1B_1C_1$ نیز متقارب اند .

حل. گیریم A' و B' و C' قطب های اضلاع ΔABC و A_1' و B_1' و C_1' قطب های اضلاع $\Delta A_1B_1C_1$ نسبت به دایره S باشند (شکل ۱۴) . به موجب قضیه ۲ ، $B'C'$ قطبی A است و K' ، نقطه تلاقی $B'C'$ و $B_1'C_1'$ ، قطب خط AA_1 . به طریق مشابه، L' و M' ، نقطه های تلاقی خط های $A'C'$ و $A_1'C_1'$ ، $A'B'$ و $A_1'B_1'$ ، قطب های خط های BB_1 و CC_1 هستند. بنابراین $K'L'$ قطبی O ، نقطه تلاقی AA_1 و BB_1 ، خواهد شد . چون ، بنابر فرض CC_1 ، از O می گذرد ، M' ، قطب CC_1 بر خط $K'L'$ قرار دارد . از این رو نقطه های K' و L' و M' هم خط اند ، و لذا ، به موجب قضیه دزارگ ، خط های $A'A_1'$ و $B'B_1'$ و $C'C_1'$ متقارب اند ، که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم .



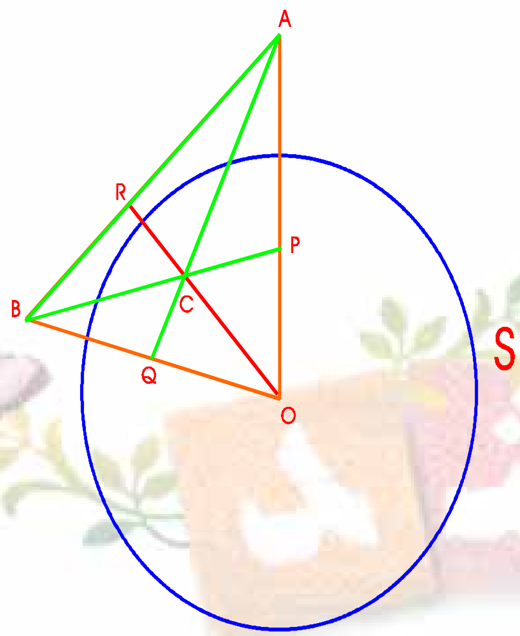
شکل۱۴

۹ . مثلثی را نسبت به یک دایره قطبی معکوس خودش گویند هر گاه اضلاع ان قطبی های راس های مقابلش

باشند . ثابت کنید که به ازای هر مثلث منفرج الزاویه ABC دایره منحصر به فردی وجود دارد که این مثلث نسبت به آن قطبی معکوس خودش است ؛ و نیز مرکز این دایره نقطه برخورد ارتفاع های ΔABC است . یک مثلث قائم الزاویه یا حاده الزاویه به هیچ دایره ای قطبی معکوس خودش نیست .

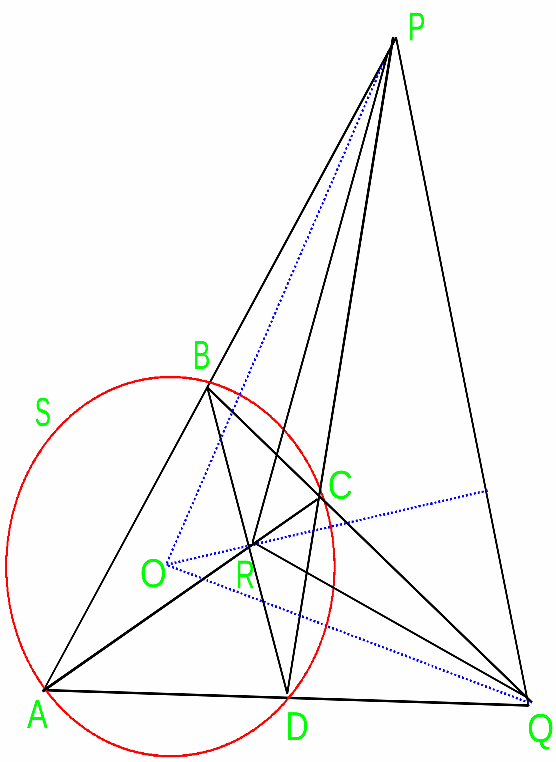
حل. مثلث ABC را ، که قطبی معکوس خود نسبت به دایره S به مرکز O است ، در نظر می گیریم (شکل ۱۵) . چون BC ، قطبی A ، بر OA عمود است ، O بر ارتفاع AP از ΔABC واقع است . هم چنین O بر دو ارتفاع دیگر BQ و CR نیز واقع است . بنابراین O محل تلاقی سه ارتفاع ΔABC است . به علاوه ، چون هر سه جفت از نقطه های A و P ، B و Q ، C و R در یک طرف O قرار دارند ، ΔABC منفرج الزاویه است و منحصر به فرد بودن دایره S ، که مثلث منفرج الزاویه T نسبت به آن قطبی معکوس خودش است ، از این امر ناشی می شود که مرکزش O نقطه تلاقی ارتفاعات T است ، و شعاعش R با رابطه $r^2 = OA.OP = OB.OQ = OC.OR$ مشخص می شود (← مسئله ۱) .

[تساوی سه حاصلضرب اخیر از تشابه مثلث های OAQ و OBP ، OAR و OCP نتیجه می شود . می توان به آسانی تحقیق کرد که $r = 2R\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$ ، که R شعاع دایره محیطی ΔABC است .]

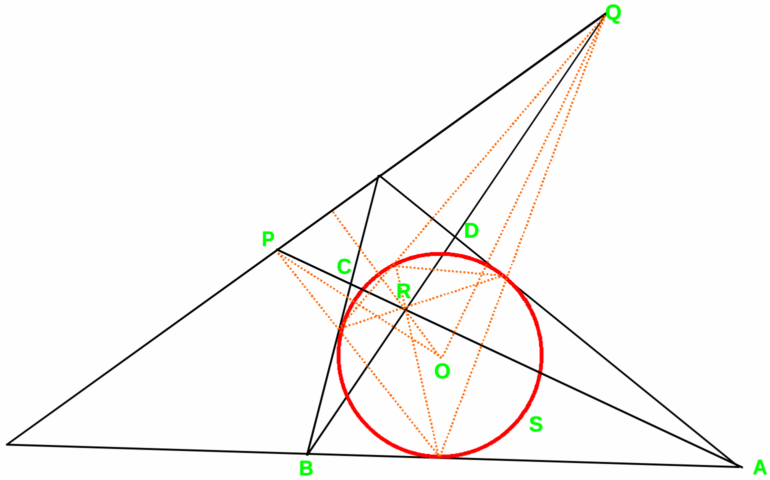


شکل۱۵

یادآوری می کنیم که قضیه ۱ ایجاب می کند که اگر یک چهار ضلعی را در یک دایره S محاط کنیم ، مثلثی که راس های آن نقاط برخورد قطرهای این چهار ضلعی و نقاط برخورد اضلاع رو به روی آن هستند ، نسبت به S قطبی معکوس خودش است (شکل ۱۶ الف) . هم چنین اگر یک چهار ضلعی را بر یک دایره S محیط کنیم ، مثلثی که دو ضلعش بر قطرهای این چهار ضلعی و ضلع سومش بر خط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل آن واقع اند ، نسبت به S قطبی معکوس خودش می باشد (شکل ۱۶ ب) .



شکل ۱۶(الف)



شکل۱۶(ب)

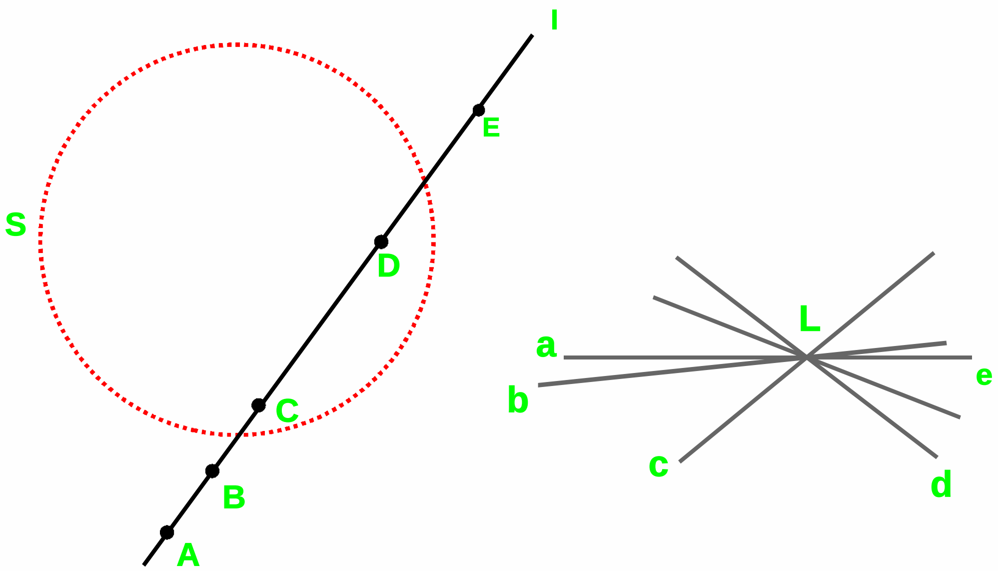
[اگر نقاط تماس اضلاع چهار ضلعی محیط بر دایره S در شکل ۱۶ (ب)، راس های چهار ضلعی محاط در S شکل ۱۶ (الف) گرفته شوند ، آنگاه ΔPQR در شکل ۱۶ (ب) بر ΔPQR در شکل ۱۶ (الف) منطبق می شود ؛ اثبات این حکم به عهده خواننده گذارده می شود .] نتیجه مسئله ۹ ایجاب می کند که هر دو مثلث مورد نظر منفرج الزاویه باشد و نقاط برخورد ارتفاعات آنها نیز بر مرکز S منطبق باشد .

مفهوم قطبی نقطه نسبت به دایره به ما اجازه می دهد که نوعی تبدیل از صفحه را ، که در اثبات بسیاری از قضایا مفید است ، تعریف کنیم . فرض می کنیم S دایره ثابتی باشد و F شکل مسطحی که از نقاط و خطوط تشکیل شده است . شکل F' را که هر نقطه اش قطب یک خط F و هر خطش قطبی یک نقطه F نسبت به دایره S است در نظر می گیریم . تبدیلی که شکل F' را با شکل F متناظر می سازد قطبی معکوس سازی یا تبدیل قطب و قطبی می نامیم. بعضی اوقات ما اصطلاح تبدیل قطبی را نیز به کار خواهیم برد.

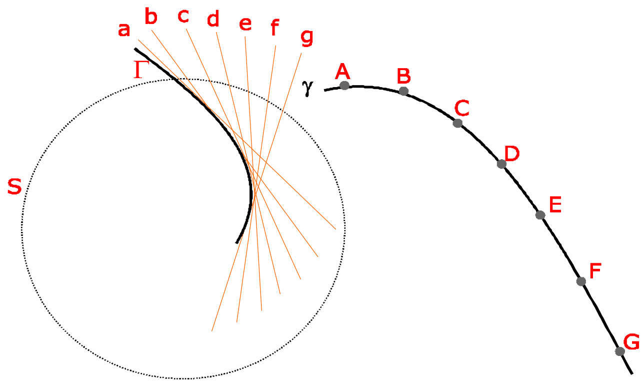
البته قطب و قطبی تبدیلی به معنایی که ما تاکنون به کار برده ایم یعنی ، نگاشتی که نقاط را به نقاط بدل می کند (تبدیل نقطه ای) نیست . بنابر تعریف ، قطب و قطبی نگاشتی است که خط ها و نقطه ها را با هم عوض می کند . از این قرار ، قطب و قطبی با همه تبدیل هایی که تاکنون دیده ایم (حرکات ، تشابهات ، تصاویر) تفاوت دارد . در آنچه که در

زیر می آید ما به موارد دیگری از تبدیل ها برخواهیم خورد که تبدیل های نقطه ای نیستند .

تعریفی که از قطب و قطبی کردیم ، تا آنجا که به مسائل زیرین مربوط می شود ، کاملاً رضایت بخش است . به علاوه قطب و قطبی را باید تبدیل صفحه به خودش ، یا بهتر بگوییم ، تبدیلی در مجموعه ای از نقاط و خطوط صفحه بگیریم که هر نقطه را به یک خط و هر خط را به یک نقطه بدل می کند . به علاوه ، به موجب قضیه ۲ ، نقاطی که بر یک خط l قرار دارند به خطوطی بدل می شوند که از یک نقطه L ، نگاره خط l می گذرند (شکل ۱۷ الف).در قطب و قطبی ، یک منحنی γ، که به عنوان مجموعه ای از نقاطش تلقی می شود ، به یک منحنی جدید Γ بدل می شود که باید پوش مماس هایش انگاشته شود (شکل ۱۷ ب)

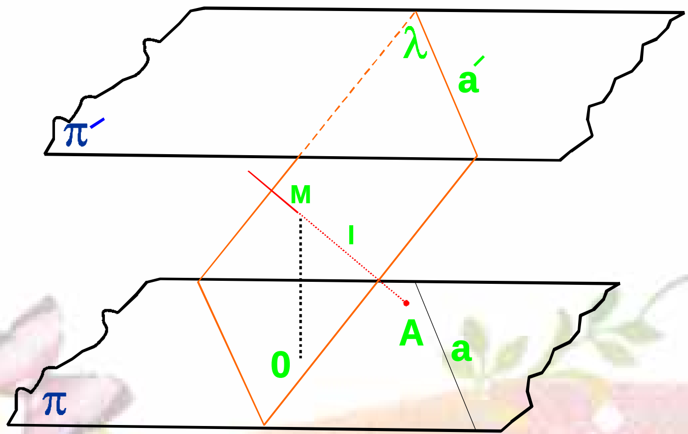


شکل ۱۷(الف)



شکل ۱۷(ب)

یادآوری می کنیم که تبدیل قطب و قطبی یک صفحه به خودش را می توان بدون توسل به قضیه ۱ ، با استفاده از ترسیم گنجسنجی به شرح زیر ، تعریف کرد : گیریم π و π' دو صفحه موازی باشند و M نقطه ای متساوی الفاصله از هر دو (شکل ۱۸) . به هر نقطه A از π (به جز O ، پای عمود مرسوم از M) . یک خط a را که به طریق زیر به دست می‌آید مربوط می کنیم : بر نقاط M و A خط l را می گذرانیم ؛ از نقطه M صفحه λ را بر l عمود می کنیم ، فصل مشترک صفحه λ و π' را a' می نامیم . حال π' را بر صفحه π « می چکانیم »



شکل ۱۸

(یعنی تصویر قائم π' را بر صفحه π به دست می آوریم) ، بدین ترتیب a' را به خط a در صفحه π بدل می‌کنیم

. به آسانی می توان نشان داد که تبدیلی که خط a را با نقطه A متناظر می سازد ، قطب و قطبی نسبت به دایره به مرکز O و شعاع OM است . در اینجا فرصتی نیست که ما از این نتیجه استفاده کنیم و اثبات آن را به عهده خواننده می‌گذاریم . به آسانی می توان همه ویژگی های قطب قطبی را از تعریفی که هم اکنون استخراج کنیم ؛ توصیه می کنیم که خواننده سعی کند خود آن را آزمایش نماید .

تبدیل قطب و قطبی اغلب می تواند یک مسئله را به مسئله ساده تری بدل کند . واقعیت مهم تر این که قطب و قطبی به عنوان وسیله ای برای به دست آوردن نتایجی تازه از نتایج قدیم به کار می رود . برای روشن ساختن این مطلب ، اشاره می کنیم که وقتی ما تصاویر مرکزی یا موازی را برای حل مسائل در بخش های پیشین به کار بردیم ، منظور ما تبدیل یک مسئله مفروض به حالت خاص ساده ای از همان مسئله بود .و قتی ما از قطب و قطبی استفاده می کنیم ، معمولا به حالت خاصی از مسئله مفروض نمی رسیم ؛ زیرا تبدیل قطب و قطبی با گذاردن خط به جای نقطه ، و نقطه به جای خط ، یک شکل را به شکل کاملا متفاوتی بدل می کند. از اینجا نتیجه می شود که هر گاه تبدیل قطب و قطبی را برای شکلی که به گزاره ای مربوط می شود به کار بریم ، شکلی به دست می آوریم که به گزاره تازه ای مربوط می شود . این گزاره تازه ممکن است از گزاره اصلی ساده تر باشد و با اثبات آن ، گزاره اصلی را نیز ثابت کرده باشیم . اگر گزاره تازه ساده تر از گزاره اصلی نباشد ، باز هم استفاده می کنیم ، زیرا یک برهان برای یکی از آن گزاره ها ، برهانی معتبر برای دیگری نیز هست .

هر دو قضیه حاصل از یکدیگر به کمک قطب و قطبی قضایای دوگان نامیده می شوند . وجود جفت های قضایایی که هر یک از آنها دوگان دیگری است به اصل دوگانی معروف است ، که ما بعدا به وسیله مثال های زیاد آن را نشان خواهیم داد .

اصل دوگانی ، که بر اساس مفهوم قطب و قطبی در صفحه نهاده شده ، به ما امکان می دهد که با تعویض واژه های «نقطه» و «خط » از یک قضیه قضیه تازه ای به دست آوریم . در آغاز این بخش در تعریف قطب و قطبی از قضیه ۱

استفاده کردیم . اهمیت آن آنقدرها در این نیست که به ما امکان می دهد با هر نقطه یک خط معین و با هر خط نقطه معینی را متناظر سازیم .- این گونه تناظرها کاملا عادی هستند. (مثلا ما می توانیم به یک نقطه P محور تقارن p را که با P و نقطه ثابتی چون O معین می شود ، مربوط کنیم ؛ با O مثلا خط بینهایت را، و با یک نقطه در بی نهایت خط مار بر O ، عمود بر امتدادی را که نقطه بینهایت به وسیله آن معین می شود مربوط سازیم) – بلکه در این است که به ما اجازه می دهد به یک نقطه واقع بر یک خط ، خطی مار بر نقطه متناظرش را مربوط کنیم. از آنجا نتیجه می شود که هر تناظری از نوع اخیر ، یعنی هر تناظری که به یک نقطه (خط) یک خط (نقطه) منحصر به فرد ، و به یک نقطه و خط مار بر آن یک خط و یک نقطه واقع بر آن را مربوط سازد می تواند به وسیله یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S ، و احتمالا یک تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش ، یا یک نیم دور و یک تصویر مرکزی تحقق یابد .

یک توضیح دیگر . ما ممکن است این اثر را بر خواننده گذاشته باشیم که تبدیل های قطب و قطبی اصولا وسیله ای برای به دست آوردن قضایای جدید از قضایای قدیم اند ، در حالی که تصویرهای موازی و مرکزی منحصراً به عنوان تکنیک هایی برای اثبات حکم های هندسی به کار می روند . این تشخیص کاملا درستی نیست ، زیرا چنانکه در بالا متذکر شدیم ، تبدیل های قطب و قطبی می توانند اغلب برای اثبات حکم های هندسی مفروض مورد استفاده قرار گیرند و چنانکه توضیح خواهیم داد . تصاویر مرکزی و موازی تصادفاً برای به دست آوردن قضیه های جدید از قضیه های قدیم به کار می روند ، با استفاده از یک تصویر مرکزی یا موازی برای نمودار یک قضیه ، اغلب به قضیه تازه ای هدایت می‌شویم . قضیه ای را در نظر بگیرید که فقط متضمن مفاهیمی باشد که بر اثر تصاویر موازی محفوظ می مانند (مثلا، قضیه ای از هندسه آفین ؛) . روشن است که به کار بردن تصویر موازی برای چنین قضیه ای نمی تواند قضیه تازه ای به دست دهد (درست مانند حرکت، که وقتی برای نمودار یک قضیه به کار برده می شود ، هرگز ما را به قضیه تازه ای هدایت نمی‌کند .) ولی ممکن است ما ره به حالت خاص ساده ای از همین قضیه هدایت کند ؛ از سوی دیگر ، استعمال یک تصویر موازی برای نمودار قضیه ای که شامل مفاهیمی غیر از مفاهیم آفین باشد ، ممکن است قضیه ای تازه بدهد ؛ مثلا از تصویر یک

مثلث قائم الزاویه بر یک مثلث متساوی الاضلاع ، می توانیم از هر قضیه ای که به یک مثلث قائم الزاویه مربوط می‌شود ، قضیه تازه ای به دست آوریم . هم چنین استفاده از تصویر مرکزی برای قضایای آفین ممکن است ما را به قضیه های تازه ای سوق دهد ؛ مثال های مناسب قبلا داده شده اند . روی هم رفته ، بهتر است بگوییم که تصاویر موازی و مرکزی بیشتر اوقات برای اثبات قضایا به کار می روند ، و تبدیل های قطب وقطبی برای به دست آوردن قضایای جدید از قضایای قدیم .

نکته مهمی که باید به آن اشاره کنیم این است که اصل دوگانی فقط در صفحه تصویری ، یعنی در صفحه ای که با «عناصر بینهایت » تکمیل شده صدق می کند (تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S ، مرکز S را به خط بینهایت و قطرهای آن را به نقاط بینهایت بدل می کند) . علت آن است که اصل دوگانی به ما اجازه می دهد در گزاره های هندسی نقاط و خطوط را با هم عوض کنیم و بنابراین ، به تعبیری ، هم ارزی نقاط و خطوط را پدید می آورد . پیش از معرفی عناصر بینهایت، نقاط و خطوط به هیچ وجه هم ارز نبودند ، زیرا اگر هم ارز بودند ، وجود خط های موازی (خط های بدون نقطه مشترک) وجود نقاط « موازی » ، (نقاطی بدون یک « خط مشترک » ، یعنی نقاطی بی آنکه خطی بر آنها بگذرد) ، را موجب می شد و چنین نقاطی وجود ندارند . وارد کردن عناصر بینهایت ، حالت خاص خط های موازی را از بین می برد؛ در صفحه تصویری دو خط همواره در یک نقطه منحصر به فرد (یک نقطه معین یا یک نقطه بی نهایت) اشتراک دارند ، و دو نقطه همواره خط منحصر به فردی را مشخص می کنند که بر هر دوی آنها می گذرد .

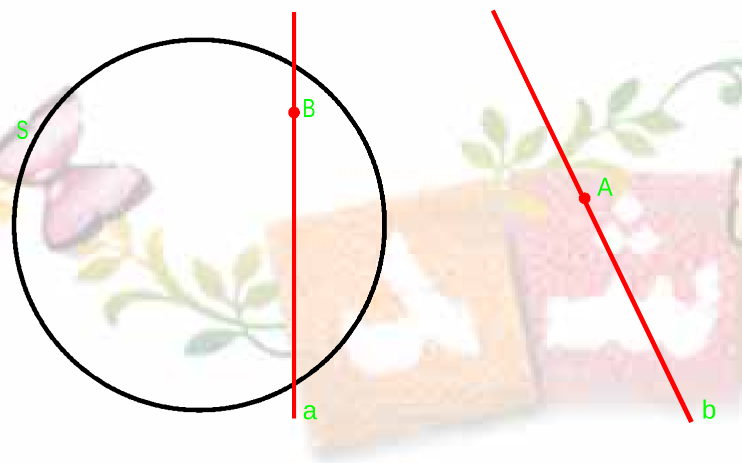
می توا ن نشان داد که تقارن ویژگی های اساسی نقاط و خطوط صفحه تصویری که در بالا ذکر شد ، اصل دوگانی ، یعنی امکان به دست آوردن یک قضیه جدید (دوگان) از یک قضیه قدیمی را ، با تعویض اصطلاحات « نقطه » و « خط » و اصطلاحات « قرار دارد بر » و « می گذرد بر » ایجاب می کند .زیرا در اثبات یک قضیه هندسی ، آن را به قضیه ساده تری بدل می کنیم، که ، به نوبه خود ، باز به قضیه ساده تری بدل می شود و هکذا تا اینکه به ساده ترین گزاره های هندسی ، یعنی اصول موضوعه ، که بدون اثبات مسلم در نظر گرفته شده اند می رسیم . اما در صفحه تصویری ویژگی های اساسی نقاط و خطوط کاملاً هم ارزند . یعنی ، اگر در اصل موضوع مفروضی اصطلاحات « نقطه » و « خط » و اصطلاحات « قرار

دارد بر » و « می گذرد بر » را با هم عوض کنیم ، گزاره معتبری به دست می آوریم ، شایسته است که این گزاره ها را در عداد اصول موضوع بگذاریم . وقتی فهرست حاصل از اصول موضوع طولانی باشد ، خود – دوگان نیز هست . ولی در آن صورت دوگان هر قضیه (معتبر) یک قضیه جدیدی است معتبر ، عیناً مثل قضیه اصلی قابل اثبات است جز اینکه حالا فرایند برهان به اصول موضوع دوگان ، به آن اصول موضوعی که در برهان قضیه اصلی به آنها رسیده ایم ، برمی گردد .

یک توضیح دیگر . وقتی از تبدیل های قطب و قطبی استفاده می کنیم ، بیشتر از موقعی که از قضایای هم ارزی و ویژگی های اساسی نقاط و خطوط استفاده می کنیم ، می توانیم به قضایای دوگان دست یابیم . زیرا استفاده از این هم ارزی (که در وجود جفت های اصول موضوع دوگان نهاده شده) به منظور به دست آوردن قضیه های دوگان به قضایایی محدود شده است که متضمن زاویه یا فاصله نیستند (زیرا این مفاهیم دوگان ندارند) . از سوی دیگر ، ویژگی های (ب) و (ج) تبدیل قطب و قطبی که بعداً داده خواهد شد به ما امکان می دهند که اصل دوگانی را برای رده بیشتری از قضایا به کار بریم .

اکنون برخی از ویژگی های تبدیل قطب و قطبی را در نظر می گیریم . مهمترین آنها عبارت است از :

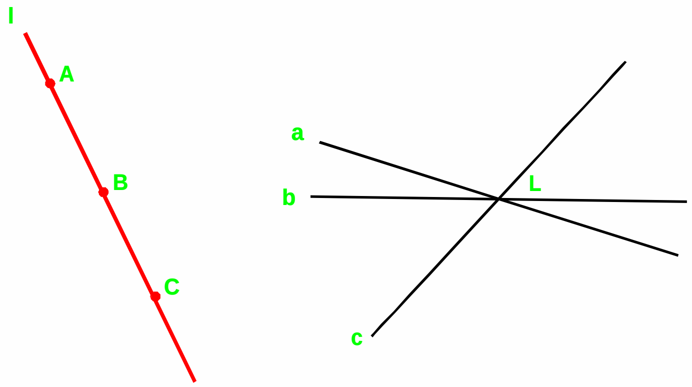
الف. تبدیل قطب و قطبی ، یک نقطه A و یک خط b مار بر A را به یک خط a و یک نقطه B واقع بر a بدل می کند . (شکل ۱۹)



شکل۱۹

این ویژگی تبدیل قطب و قطبی ، یک نتیجه مستقیم قضیه ۲است .

ویژگی(الف) ایجاب می کند که تبدیل قطب و قطبی ، سه نقطه A و B و C واقع بر یک خط l را به سه خط a و b و c مار بر یک نقطه L بدل کند (شکل ۲۰؛ ← و نیز شکل ۱۷ الف) و به عکس ، سه خط متقارب (مار بر یک نقطه معین یا یک نقطه در بینهایت) رابه سه نقطه همخط بدل می کند .



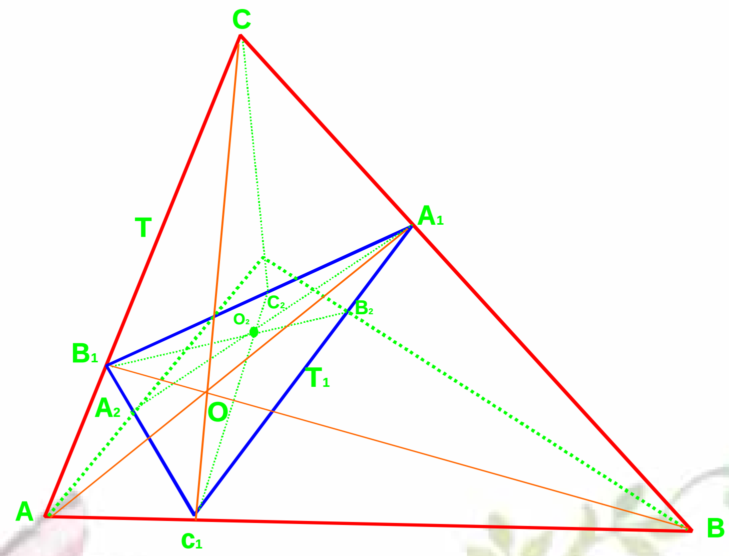
شکل۲۰

این واقعیت به ما اجازه می دهد که قضایای تازه ای از قضایای مفروض به دست آوریم . مثلا قضیه مساله ۱۹(الف)را در نظر می گیریم : هر گاه A_1 و B_1 و C_1 نقاطی بر اضلاع ΔABC (که آن را برای اختصار با ΔT می نماییم) باشند ، چنانکه خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 در یک نقطه O متقارب باشند و هرگاه A_2 و B_2 و C_2 نقاطی براضلاع $\Delta A_1B_1C_1(\Delta T_1)$ باشند به طوری که خطوط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 در O_1 متقارب باشند ، آنگاه خطوط AA_2 و BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه متقارب خواهند بود (شکل ۲۱ (الف)) . ما یک تبدیل قطب و قطبی بر این قضیه اعمال می کنیم . در این حالت مثلث T به یک مثلث t بدل می شود که اضلاع a و b و c ی آن قطبی های راس های مثلث T هستند ؛ نقطه O به یک خط o بدل می شود . و مثلث T_1 به یک مثلث t_1 که اضلاعش ، a_1 و b_1 و c_1 ، خطوط واصل بین راس های مثلث t و نقاط تلاقی o با اضلاع مقابل مثلث t هستند ؛ نقطه O_1 به خط o_1 بدل می شود ، و نقاط A_2 و B_2 و

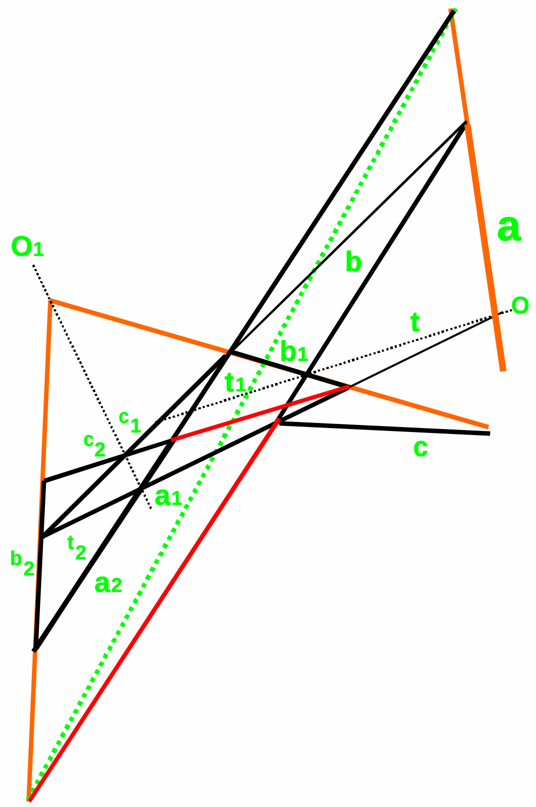
به خطوط C_2 و a_2 و b_2 و c_2، واصل بین راس های t_1 و نقاط تلاقی o_1 با اضلاع مقابل مثلث t_1 (شکل ۲۱ ب) .

چون طبق قضیه ای خطوط AA_2 و BB_2 و CC_2 متقارب اند ، از آنجا نتیجه می گیریم که نقاط برخورد جفت های خطوط a و a_2 ، b و b_2 ، c و c_2 هم خط اند . لذا به قضیه زیر هدایت می شویم :

اگر t_1 مثلثی باشد که اضلاعش بر خطوط واصل بین راس های مثلث t و محل برخورد یک خط o با اضلاع مقابل t قرار داشته باشند ، و t_2 مثلثی که اضلاعش بر خطوط واصل بین راس های مثلث t_1 و نقاط برخورد یک خط o_1 با اضلاع مقابل t_1 واقع باشند ، آنگاه نقاط برخورد اضلاع متناظر مثلث های t و t_2، هم خط اند . این قضیه ، قضیه ای است کاملا تازه که با یک نمودار تازه شرح داده شده است ، ولی ما به ارائه برهان مستقلی برای اثبات آن نیاز نداریم ؛ صحت آن از قضیه مسئله ۱۹ (الف)بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه و ویژگی (الف) از تبدیل قطب و قطبی نتیجه می‌شود .



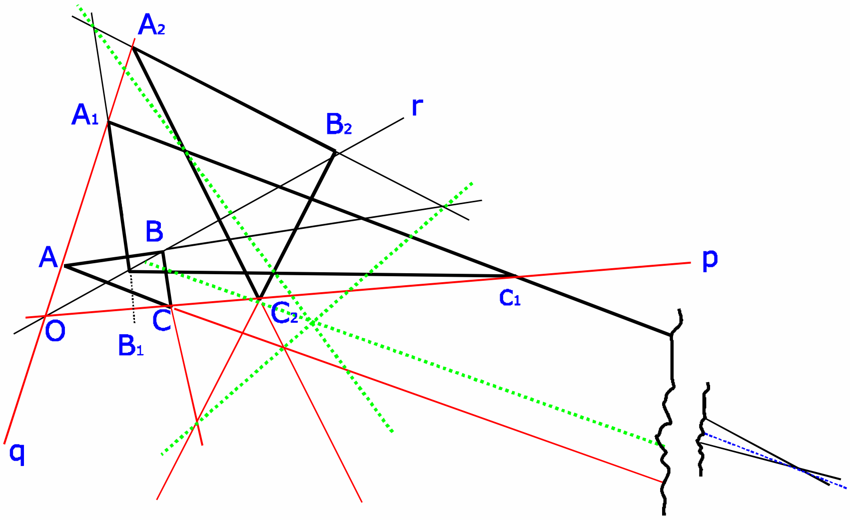
شکل۲۱(الف)



شکل۲۱(ب)

۱۰. از به کار بردن تبیدل قطب و قطبی برای قضایای مسائل ۱ (الـف) و (ب) ؛ ۵ (الـف) و (ب) ؛ ۶؛ ۹؛ ۱۰ ؛ ۱۱ ؛۱۲بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه چه قضایایی به دست می آیند ؟

حل. بر اثر تبدیل قطب و قطبی قضایای مسائل ۱(الف) و ۱ (ب) به یکدیگر بدل می شوند (و ، در نتیجـه کـافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم) . قضایای مسائل ۵(الف) و ۵ (ب) نیز به همدیگر بدل می شوند . قضیه مـسئله ۶ و عکسش به هم بدل می شوند . در اینجا استفاده از یک تبدیل قطب و قطبی به هیچ نتیجه تازه ای منجر نمی شود ؛ زیـرا دو حکم هم ارزند (← تبصره پس از راه حل مسئله ۶) . قضیه مسئله ۷ نیز به یک قضیه هم ارز بدل می شود (چون این قضیه در واقع عیناً مثل قضیه مسئله ۶است ؛ به راه حل مسئله ۷ همان بخش مراجعه کنید)



شکل۲۲

هم چنین ، کاربرد تبدیلات قطب و قطبی در قضایای مسائل ۹و ۱۰ به نتایج جدیدی منجر نمی شود ؛ بر اثر تبدیل قطب و قطبی این قضایا به خود بدل می شوند (جز اینکه در بیان قضایای جدید حاصل بر اثر دوگانی کردن قضایای مذکور در بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه ، اصطلاح « مثلث های منظری » به معنی مثلث های منظری از یک خط راست است نه از یک نقطه ؛ این مطلب که این تغییر تعبیر به اثبات قضایا لطمه ای نمی زند ، از قضیه دزارگ ، که هم ارزی دو مفهوم را ثابت می کند ، ناشی می شود).

قضیه مسئله ۱۱ بر اثر یک تبدیل قطب و قطبی به قضیه زیر بدل می شود : اگر سه مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ واقع در یک صفحه ، چنان باشند که A و A_1 و A_2 بر یک خط q ، B و B_1 و B_2 بر یک خط r ، و C و C_1 و C_2 بر یک خط P واقع ،وخطوط p ، q ، r متقاطع باشند (شکل ۲۲) ، آنگاه سه خطی که به موجب قضیه دزارگ نقطه های تلاقی اضلاع متناظر مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ ، ABC و $A_2B_2C_2$ ، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ ، را بر خود دارند متقارب اند . به عبارت دیگر ، اگر مراکز تصویر منظری سه زوج مثلث منظری منطبق باشد ، محورهای تصویر منظری آنها متقارب اند.

قضیه مسئله ۱۲ به یک قضیه هم ارز آن بدل می شود (که خواننده باید سعی کند آن را بیان نماید.) یک راه پرداختن به ان، توجه به این امر است که دوشق متفاوت از بیان مسئله ۱۲ که از احکام آنها نتیجه می شوند، دوگان یکدیگرند .

۱۱. n خط متقارب l_1 و l_2 و ... و l_n و n نقطه M_1 و M_2 و ...و M_3 در یک صفحه داده شده اند . یک n ضلعی $A_1A_2A_3....A_n$ رسم کنید که راس هایش بر خطوط l_1 و l_2 و... و l_n واقع باشند و اضلاعش از نقاط M_1 و M_2 و ...و M_n بگذرند .

حل. این مسئله دوگان مسئله ۸ (ب) ، بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه است . بنابراین یک راه حل آن به کار بردن یک تبدیل قطب وقطبی (نسبت به یک دایره S) برای n خط و n نقطه است . خط های l_1 و l_2 و ... و l_n به n نقطه هم خط L_1 و L_2 و ...و L_n بدل می شوند ، و n نقطه M_1 و M_2 و...، و M_n به n خط m_1 و m_2 و ...و m_n . اما می دانیم (مسئله ۸(ب)) که چگونه در یک n ضلعی حاصل از خط های m_1 و m_2 و ...و m_n یک n ضلعی $B_1B_2...B_n$ محاط کنیم که اضلاعش از نقطه های L_1 و L_2 و ...و L_n بگذرند . پس n ضلعی مطلوب $A_1A_2...A_n$ از n ضلعی $B_1B_2...B_n$ بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S به دست می آید .

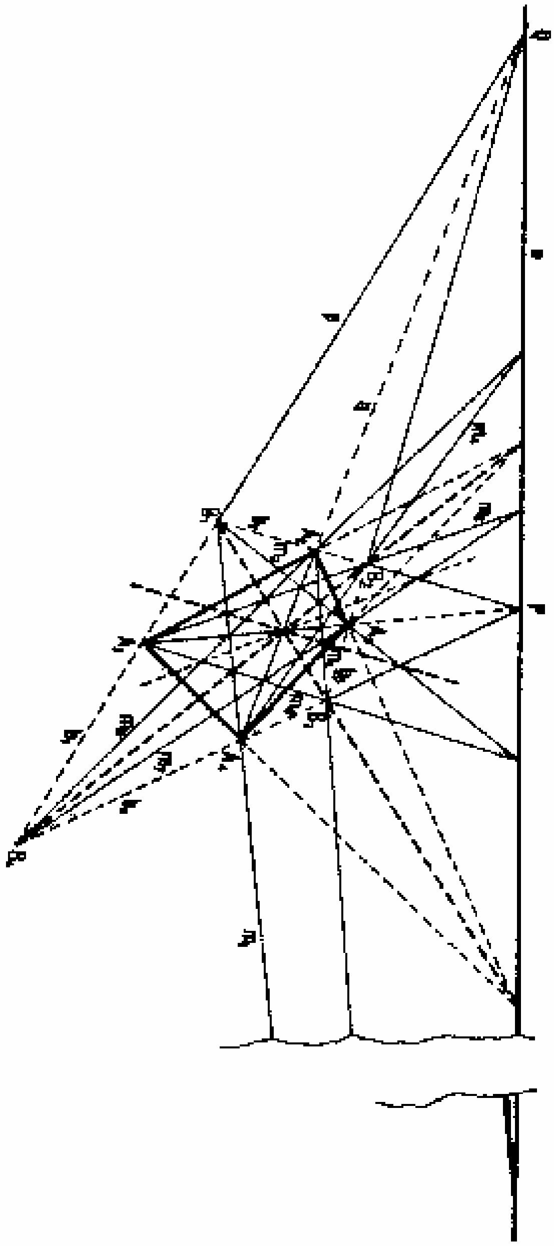
این مسئله را از راه دیگری که به رسم n ضلعی کمکی $B_1B_2...B_n$ نیازی نباشد نیز می توان حل کرد . یعنی ، وقتی مسئله ۸ (ب) را حل می کردیم ثابت کردیم که اگر $(n-1)$ راس یک n ضلعی بر $(n-1)$ خط ثابت قرار داشته باشند ، و اضلاعش از n نقطه ثابت هم خط بگذرند ، آنگاه n امین راس آن بر یک خط معین l قرار خواهد گرفت . این خط را می توان با رسم دوتا از این n ضلعی ها پیدا کرد . اصل دوگانی به ما امکان می دهد که چنین نتیجه بگیریم که اگر $n-1$ ضلع یک n ضلعی از $(n-1)$ نقطه M_1 و M_2 و...و M_{n-1} بگذرند و راس های آن بر n خط متقارب l_1 و l_2 و ... و l_n قرار داشته باشند ، آنگاه n امین ضلع آن از یک نقطه ثابت M می گذرد . (M یا یک نقطه معمولی است ، یا نقطه

ای است در بینهایت) . نقطه M را می توان با رسم دوتا از این n ضلعی ها پیدا کرد . از وصل M به M_n ضلع A_1A_n از n ضلعی مطلوب $A_1A_2...A_n$ به دست می آید . تعیین بقیه اضلاع n ضلعی دیگر اشکالی ندارد . اگر M نقطه ای معمولی باشد و بر M_n منطبق نباشد ، مسئله یک جواب منحصر به فرد دارد. اگر M بر M_n منطبق باشد ، مسئله نامعین است . اگر M_n نقطه ای در بینهایت باشد ، آنگاه مسئله یک جواب منحصر به فرد دارد اگر امتدادی که به وسیله M_n مشخص می شود موازی با l_1 یا l_n نباشد ، در غیر این صورت مسئله جوابی ندارد .

۱۲ . از به کار بردن تبدیل قطب و قطبی برای قضیه های مسائل ۲۰(الف) – (د) ؛ ۲۱(الف) –(ج) ؛ ۲۲ (ب) ، بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه چه قضیه هایی به دست می آید ؟

۱۳ . از مسئله های ۱ (الف) و (ب) ؛ ۲ (الف) و (ب) ؛ ۳؛ ۴(الف) و (ب) ؛ ۵ ؛ ۶؛ ۷؛ ۸ بخش تصویر مرکزی که یک دایره به دایقه بدل می کند. به وسیله تبدیل قطب و قطبی نسبت به دوایری که در صورت این مسائل آمده اند چه قضیه هایی به دست می آید ؟

حل ۱۲. فرض می کنیم $A_1A_2A_3A_4$ یک چهار ضلعی به قطرهای p و q باشد و ، n خط واصل بین نقطه های تلاقی اضلاع مقابل آن ،و P و Q نقاط تقاطع قطرهای p و q با n باشند . خط های واصل بین راس ها و نقطه های P و Q را با b_1 و b_2 و b_3 و b_4 نشان می دهیم . و فرض می کنیم که m_1 و m_2 و m_3 و m_4 و m_5 و m_6 و m_7 و m_8 خط های واصل بین راس های چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ و راس های چهار ضلعی $B_1B_2B_3B_4$ ، حاصل از خط های b_1 و b_2 و b_3 و b_4 ، باشند (شکل ۲۳) .



شکل۲۳

قضایای مسئله ۲۰ (الف) – (د)،به موجب اصل دوگانی ، ایجاب می کنند که :

الف. نقطه های تلاقی m_1 و m_5 ، m_2 و m_6 ، m_3 و m_7 ، m_4 و m_8 ، بر n واقع باشند.

ب. نقطه های تلاقی m_2 و m_3 ، m_6 و m_7 ، بر q باشند و نقطه های تلاقی m_1 و m_8 ، m_4 و m_5 بر p .

ج. نقطه های تلاقی m_1 و m_2 ، m_3 و m_8 ، m_4 و m_7 ، m_5 و m_6 ، بر خط واصل بین نقطه تقاطع

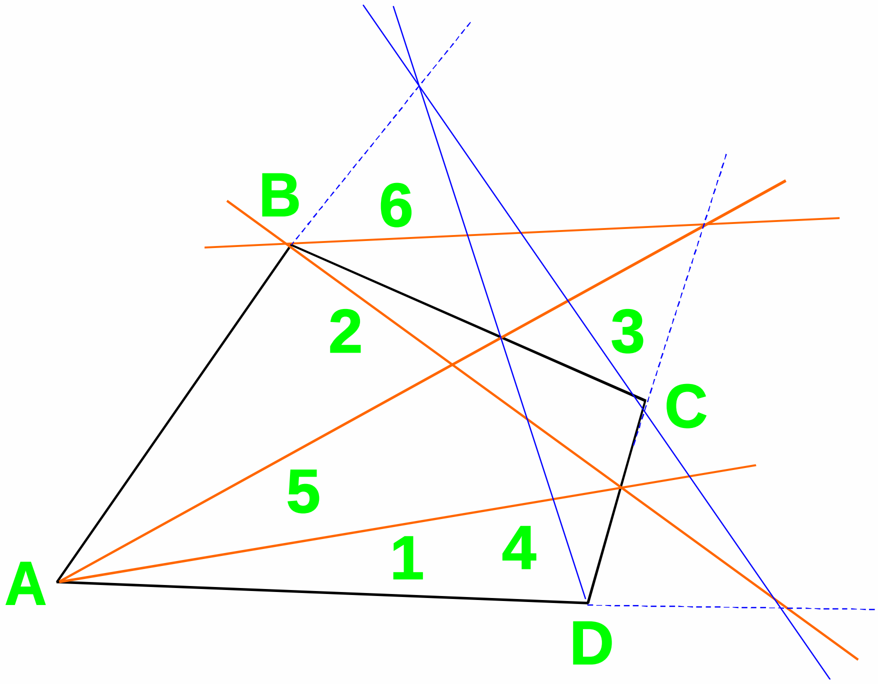
قطرهای A_1A_3 و A_2A_4 ،و نقطه تقاطع اضلاع A_1A_4 و A_2A_3 واقع باشند ؛ نقطه های تقاطع m_1 و m_6 ، m_7 و m_8 ، m_3 و m_4 ، m_2 و m_5 ، بر خط واصل بین نقطه تقاطع قطرهای A_1A_3 و A_2A_4 و نقطه تقاطع اضلاع A_1A_2 و A_3A_4 قرار داشته باشند .

د. نقطه های تلاقی m_1 و m_3 ، m_5 و m_7 ، b_4 و m_2 ، b_2 و m_6 ؛ m_2 و m_4 ، m_6 و m_8 ، b_4 و m_3 ، b_2 و m_7 ؛ m_3 و m_5 ، m_1 و m_7 ، b_1 و m_4 ، b_3 و m_8 ؛ m_4 و m_6 ، m_2 و m_8 ، b_1 و m_5 ، b_3 و m_1 ، بر چهار خط مار بر نقطه تلاقی قطرها قرار داشته باشند .

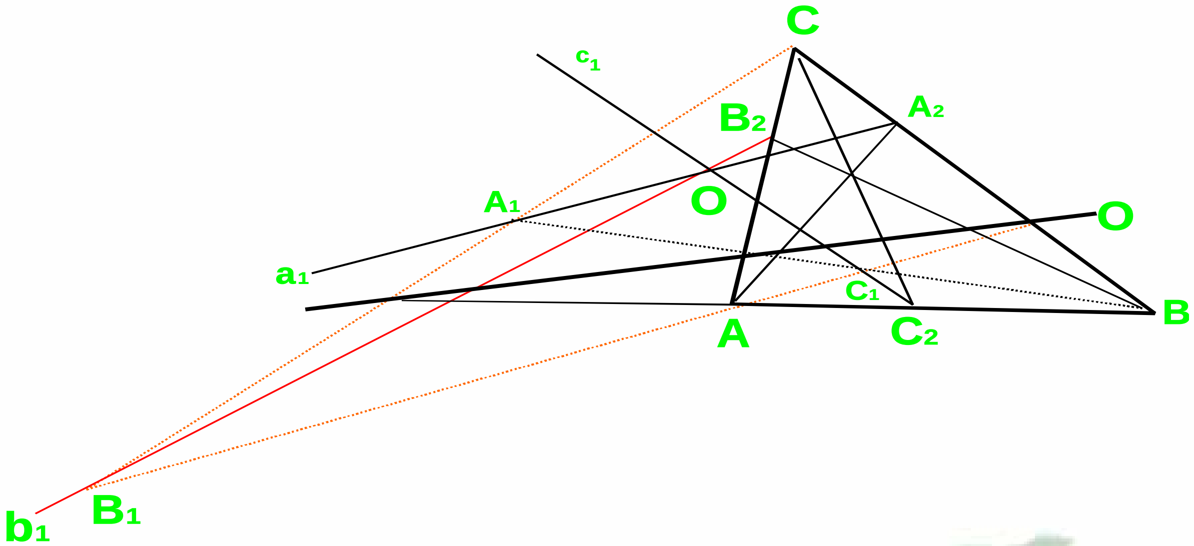
قضایای مسائل ۲۱ (الف) – (ج) ، به موجب اصل دوگانی ، قضایای زیر را ایجاب می کند . فرض می کنیم $ABCD$ که یک چهار ضلعی باشد، ۱ خطی دلخواه مار بر راس A ، ۲ خط واصل بین B و نقطه تلاقی CD با خط ۱ باشد ، ۳ خط واصل بین C و نقطه تلاقی DA با خط ۲، ۴ خط واصل بین D و نقطه تلاقی AB با خط ۳ باشد ، وهکذا (شکل ۲۴) . در این صورت :

الف. خط ۱۳ ، حاصل از سه بار دور زدن همه راس های چهار ضلعی ، بر خط اولیه ۱ منطبق است (روشن است که این قضیه با قضیه مسئله ۲۱(الف) هم ارز است) .

ب. نقطه های تقاطع خط های ۱و ۷ ، ۲و ۸ ، ۳ و ۹ ، و غیره ، بر خط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل چهار ضلعی قرار دارند .



شکل۲۴



شکل۲۵

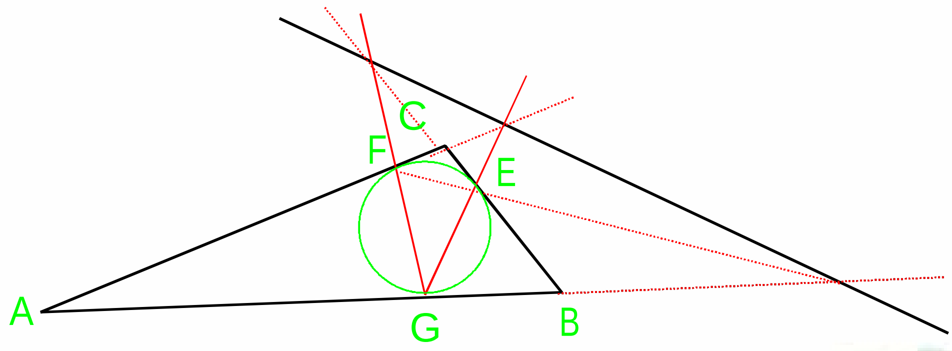
ج. خط های واصل بین نقطه های تقاطع خط هـای ۱و ۲ ، ۷ و ۸ ؛ ۲ و ۳، ۸ و ۹ ؛ ۳ و ۴ ، ۹ و ۱۰ ؛ و غیـره ، از نقاط تلاقی قطرهای چهار ضلعی می گذرند .

قضیه مسئله ۲۲ (ب) به قضیه زیر بدل می شود . نقطه هـای تلاقـی یـک خـط غیـر مـشخص o را بـا اضـلاع

مثلث ABC به راس های مقابل وصل می کنیم . فرض می کنیم $A_1B_1C_1$ مثلث حاصل از این سه خط باشد . اگر O یک نقطه دلخواه و a_1 و b_1 و c_1 خط های واصل از O به راس های مثلث باشند ، و A_2 و B_2 و C_2 نقطه های تلاقی خط های a_1 و b_1 و c_1 با اضلاع متناظر ΔABC (شکل ۲۵) ، آنگاه خط های AA_2 و BB_2 و CC_2 در یک نقطه تلاقی می کنند .

حل ۱۳. بر اثر تبدیل قطب و قطبی ، قضیه مسئله ۱ (الف)به قضیه زیر بدل می شود . نقطه های تلاقی اضلاع یک مثلث ABC با اضلاع مثلث EFG ، حاصل از نقطه های تماس اضلاع مثلث ABC با دایره محاطی اش ، هم خط اند (شکل ۲۶) .

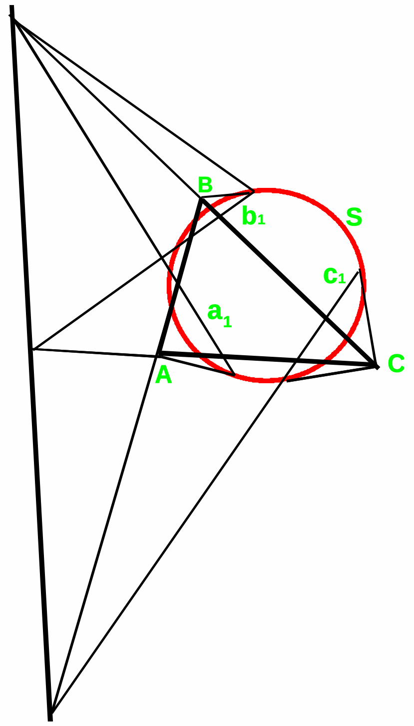
قضیه مسئله ۱ (ب) به قضیه زیر بدل می شود . فرض می کنیم ABC یک مثلث باشد و S دایره ای که اضلاع AB و AC و BC را بریده است . اگر a_1 و b_1 و c_1 خط های واصل بین نقطه های تماس مماس های مرسوم بر S ، به ترتیب از A و B و C باشند (شکل ۲۷)، آنگاه نقطه های تلاقی a_1 و b_1 و c_1 با اضلاع متناظر مثلث ABC هم خط اند .



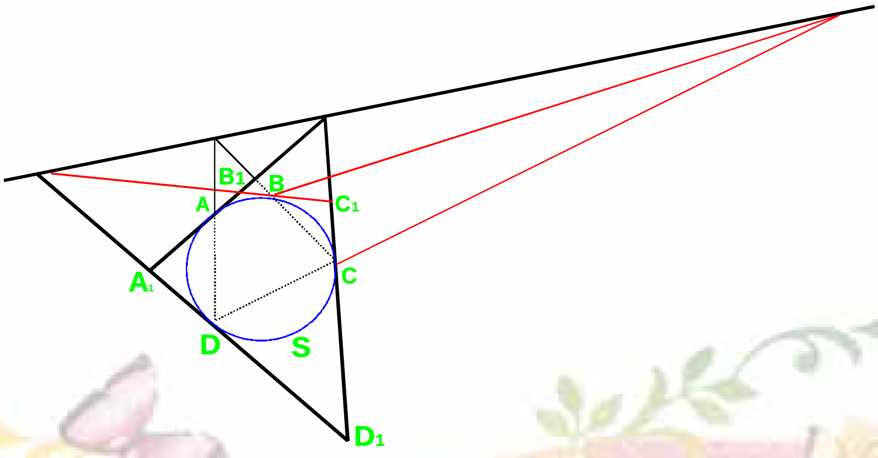
شکل ۲۶

قضیه مسئله ۲(الف) به قضیه زیر بدل می شود . گیریم $A_1B_1C_1D_1$ یک چهار ضلعی محیط بر یک دایره S باشد ، و A و B و C و D نقطه های تماس اضلاع آن با S (شکل ۲۸) . در این صورت نقطه های تلاقی اضلاع مقابل چهار ضلعی $ABCD$ بر خط واصل بین نقاط تقاطع اضلاع $A_1B_1C_1D_1$ واقع اند . بر اثر تبدیل شدن قطب و قطبی قضیه مسئله

۲ (ب) به خودش بدل می شود .



شکل۲۷



شکل۲۸

قضایای مسائل ۳ (الف) – (ج) به قضایای زیر بدل می شوند .

فرض می کنیم l خط واصل بین نقطه های تلاقی اضلاع مقابل یک چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره S باشد ، و m و n خط های حاصل از قطرهای این چهار ضلعی . پس :

الف. هر گاه دو راس از یک مثلث محیط بر S بر دو خط از سه خط l و m و n قرار داشته باشند ، راس سوم آن بر خط سوم از این سه خط واقع است .

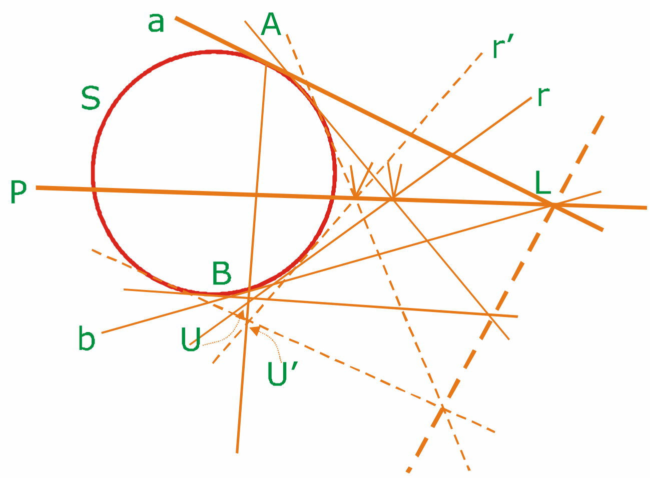
ب. بینهایت چهار ضلعی محیط بر S وجود دارند که قطرهای آنها بر خط های m و n قرار دارند . خط های واصل بین نقطه های تلاقی اضلاع مقابل همه این گونه چهار ضلعی ها بر l منطبق اند .

ج. بینهایت چهار ضلعی محیط بر S وجود دارند که یک قطرشان بر m قرار دارد و خط واصل بین نقاط تلاقی اضلاع مقابل آنها خط l است. قطر دوم این گونه چهار ضلعی ها بر n قرار دارد .

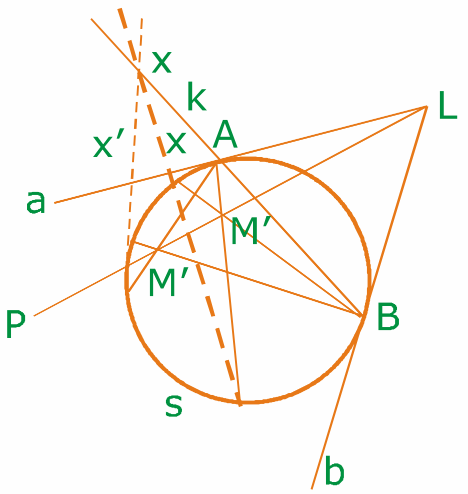
قضیه‌های مسائل ۵ (الف) و (ب) به قضایای زیر بدل می شوند . دایره S ، یک نقطه L خارج S ، و یک خط P مار بر L داده شده اند ؛ K معرف خط واصل بین A و B ، نقطه های تماس مماس های مرسوم از L بر S ، است . در این صورت:

الف. اگر M نقطه متغیری بر p باشد ، آنگاه دومین نقطه های تلاقی هر جفت از خط های واصل از M به A و B با دایره S یک خط x را مشخص می سازند ، و همه این خط ها K را در یک نقطه ثابت X می برند.شکل زیر(الف)

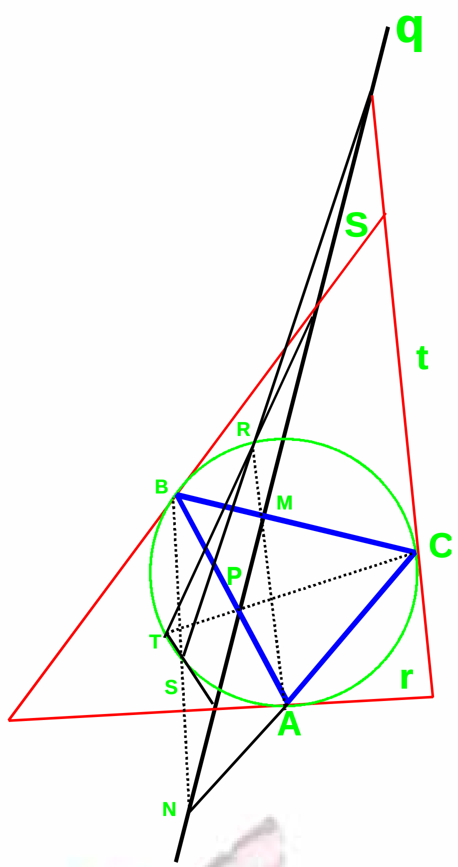
ب. اگر یک مماس r بر دایره S ، k,p را در نقطه‌های U,V قطع کند، آنگاه نقطه تلاقی دومین مماس‌های مرسوم بر S از U,V بر خط ثابتی مار بر L قرار دارد. شکل زیر(ب)



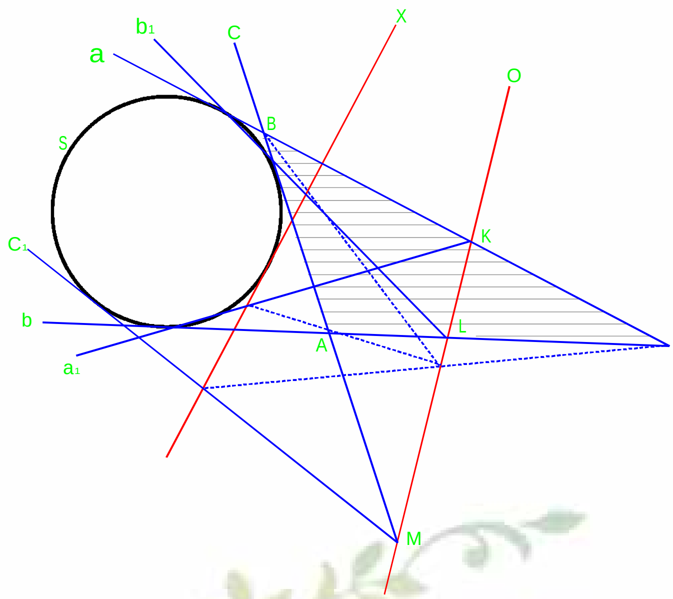
(ب)



(الف)



شکل۳۰



شکل۲۹

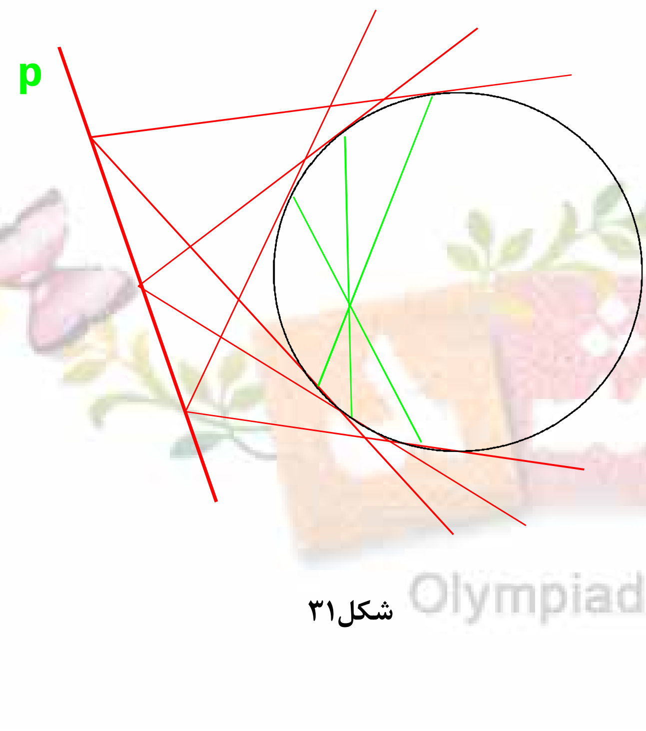
فرض می‌کنیم a و a_1، b و b_1، c و c_1 مماس های مرسوم بر یک دایره S از نقطه های K و L و M واقع بـر یـک خط o باشند ، و x مماسی دلخواه بر S . در این صورت خط های واصل بین راس های مثلث حاصل از a و b و c (کـه در

شکل ۲۹ سایه زده شده است) و نقاط متناظر تقاطع x و خط های a_1 و b_1 و c_1 در یک نقطه واقع بر o متلاقی اند (چرا؟).

یک تبدیل قطب و قطبی قضایای مسائل ۸ و ۹ را به یکدیگر بدل می کند . قضیه مسئله ۱۲ به قضیه زیر بدل می‌شود . فرض می کنیم r و s و t مماس های مرسوم بر دایره محیطی مثلث ABC در راس های A و B و C باشند ، و M و N و P سه نقطه بر اضلاع BC و CA و AB واقع بر یک خط q . اگر دومین نقطه های تلاقی خط های AM و BN و CP را با دایره محیطی به ترتیب با R و S و T نشان دهیم ، آنگاه نقطه های تلاقی خط های RS و t ، ST و r ، TR و s بر q واقع اند (شکل ۳۰) .

۱۴ . چه قضیه ای از مسئله ۴ بخش تصویرمرکزی یک صفحه بر یک صفحه به دست می آید اگر تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره S را به کار بریم ؟

حل. بر اثر تبدیل قطب و قطبی ، قضیه مسئله ۴ به قضیه زیر بدل می شود : اگر P یک خط و S یک دایره باشد ، هر جفت از مماس های مرسوم بر S از یک نقطه واقع بر P یک وتر از دایره را مشخص می کند . همه این وتر ها از یک نقطه می گذرند (شکل ۳۱) .



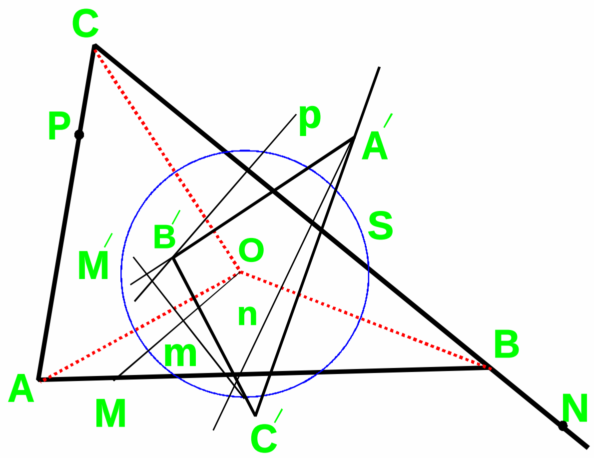
شکل۳۱

۱۵. دایره S و سه خط l و l_1 و l_2 مفروض اند . بر S چهار ضلعی $ABCD$ را چنان محیط کنید که A و C بر l، و B بر l_1 و D بر l_2 واقع باشند .

حل. این مسئله ، دوگان مسئله ۶ در بخش قبل است . (حالتی که خط دایره S را نبرد به مسئله ۶ (الف) مربوط می شود ، و حالتی که S را می برد به مسئله ۶(ب)) . بنابراین ، این مسئله را می توان چنین حل کرد : یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره مفروض ، ما را به مسئله ۶ هدایت می کند . پس از حل آن مسئله یک چهار ضلعی به دست می‌آوریم که چهار ضلعی مطلوب ما از راه تبدیل قطب و قطبی از آن به دست می آید . ولی ، در حالت کنونی ما نیاز نداریم که اول مسئله ۶ را ، که راه حلش مبتنی بر گزاره ای است که بر اثر تبدیل قطب و قطبی به مسئله زیر بدل می‌شود ، حل کنیم : اگر راس های A و C از یک چهار ضلعی $ABCD$ ، که بر دایره ای محیط شده است ، بر یک خط l واقع باشند و راس B ی آن بر یک خط l_1 ، آنگاه راس D ی آن بر خط ثابت m قرار خواهد گرفت . به کمک این گزاره مسئله ما به آسانی حل می شود (← راه حل های مسائل ۶ (الف) و (ب)) .

۱۶. با استفاده از تبدیل قطب و قطبی ، قضیه سوا را ، را از قضیه منلائوس و ، بعکس قضیه منلائوس را از قضیه سوا را به دست آورید.

حل. فرض می کنیم M و N و P سه نقطه واقع بر اضلاع AB و BC و CA ، یا بر امتداد آنها ، از یک مثلث ABC باشند (شکل ۳۲) . در نتیجه تبدیل قطب و قطبی مثلث ABC به یک مثلث $A'B'C'$ ، که اضلاع a و b و c ی آن قطبی های نقطه های A و B و C هستند ، بدل می شود و نقطه های M و N و P به خط های m و n و p



شکل۳۲

مار بر نقطه های C' و A' و B' .فرض می کنیم M' و N' و P' نقطه های تلاقی خط های m و n و p با اضلاع $\Delta A'B'C'$ باشند . سعی می کنیم بین عبارت های

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

رابطه ای برقرار کنیم .

ملاحظه می کنیم که نسبت $A'M'/B'M'$ مساوی است با خارج قسمت $(A'M'/C'M')(B'M'/C'M')$.

مطابق قانون سینوس ها داریم

$$\left|\frac{B'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'} \text{ و } \left|\frac{A'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'}$$

از اینجا نتیجه می شود $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدر مطلق برابر است با

$$\frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'}\Bigg/\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'}=\frac{\sin\angle C'B'M'}{\sin\angle C'A'M'}\Bigg/\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle A'C'M'}$$

می دانیم که قطبی A بر OA عمود است ، که O مرکز دایره S در تبدیل قطب و قطبی است. بنابراین

$A'B'\perp OC$ و $C'A'\perp OB$ و $C'B'\perp OA$ و و در نتیجه :

$sin\angle C'A'M' = sin\angle BOC$ و $sin\angle C'B'M' = sin\angle AOC$

(زاویه های $C'B'M'$ و AOC و نیز زاویه های $C'A'M'$ و BOC اضلاعش بر هم عمودند ، و بنابراین مساوی یا مکمل اند ، و لذا دارای سینوس های مساوی هستند) . از این رو داریم :

$$\frac{sin\angle C'B'M'}{sin\angle C'A'M'} = \frac{sin\angle AOC}{sin\angle BOC}$$

چون $C'M' \perp OM$ ، هم چنین داریم

$$\frac{sin\angle B'C'M'}{sin\angle A'C'M'} = \frac{sin\angle AOM}{sin\angle BOM}$$

حال عبارت اخیر را تبدیل می کنیم . برای این منظور مساحت های مثلث های AOM و BOM را از دو راه حساب ، ونسبت آنها را پیدا می کنیم :

$$\frac{S_{AOM}}{S_{BOM}} = \left|\frac{\frac{1}{2}AO.OM.sin\angle AOM}{\frac{1}{2}BO.OM.sin\angle BOM}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}AM.h_{AB}}{\frac{1}{2}BM.h_{AB}}\right|$$

(در اینجا h_{AB} ارتفاع مشترک مثلث های AOM و BOM است) . از تساوی اخیر بلافاصله به دست می آوریم :

$$\frac{sin\angle AOM}{sin\angle BOM} = \left|\frac{OB}{OA}.\frac{AM}{BM}\right|$$

بنابراین نسبت $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدر مطلق برابر است با

$$\frac{sin\angle AOC}{sin\angle BOC}\Big/\left(\frac{OB}{OA}.\frac{AM}{BM}\right) = \frac{1}{AM/BM}.\left(\frac{sin\angle AOC}{sin\angle BOC}.\frac{OA}{OC}\right)$$

با استدلالی مشابه نشان داده می شود که نسبت های $B'N'/C'N'$ و $C'P'/A'P'$ از لحاظ قدر مطلق به ترتیب برابرند با

$$\frac{1}{CP/AP}.\frac{sin\angle COB}{sin\angle AOB}.\frac{OC}{OA} \text{ و } \frac{1}{BN/CN}.\frac{sin\angle BOA}{sin\angle COA}.\frac{OB}{OC}$$

از ضرب این سه عبارت در یکدیگر معلوم می شود که قدر مطلق های عبارت های

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

عکس یکدیگرند .

مانده است که علامت های آنها را با هم مربوط کنیم . برای سادگی ، فرض می کنیم که O، مرکز S ، در داخل ΔABC باشد . داریم $OA \perp B'C'$ ، $OB \perp A'C'$ و $OM \perp C'M'$. این روابط ایجاب می کند که اگر OM بین OA و OB باشد ، آنگاه $C'M'$ در خارج زاویه $A'C'B'$ باشد ، و اگر OM خارج زاویه AOB باشد ، آنگاه $C'M'$ بین $C'A'$ و $C'B'$ باشد (← وضع خط ها در شکل ۳۲) .

از آنجا نتیجه می شود که نسبت های AM / BM و $A'M' / B'M'$ علامت هایشان مخالف یکدیگرند . عیناً به همین طریق نشان داده می شود که نسبت های BN / CN و $B'N' / C'N'$ ، CP / AP و $C'P' / A'P'$ ، مختلف العلامه هستند . این مطلب نتیجه گیری ما را که عبارت های

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

مختلف العلامه هستند ، موجه می سازد . روی هم رفته

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} = -\frac{1}{\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}} \qquad (*)$$

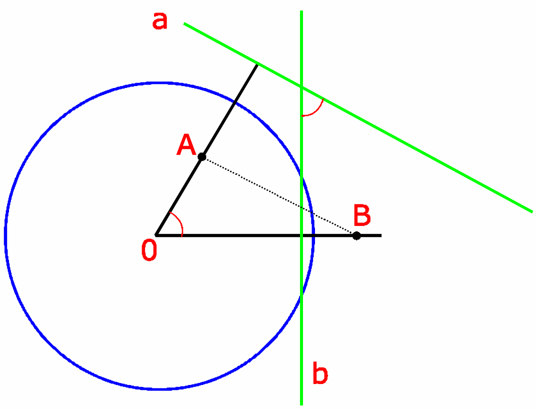
به موجب ویژگی (الف) از تبدیل قطب و قطبی خط های $A'N'$ و $B'P'$ و $C'M'$ در یک نقطه متقاطع (یا موازی) هستند اگر و فقط اگر ، M و N و P هم خط باشند . این امر و فرمول (*) ایجاب می کنند که بر اثر تبدیل قطب وقطبی ، قضیه های سوا و منلائوس به یکدیگر بدل می شوند . از اینجا نتیجه می شود که کافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم .

حال ویژگی های دیگر تبدیل های قطب و قطبی را در نظر می گیریم :

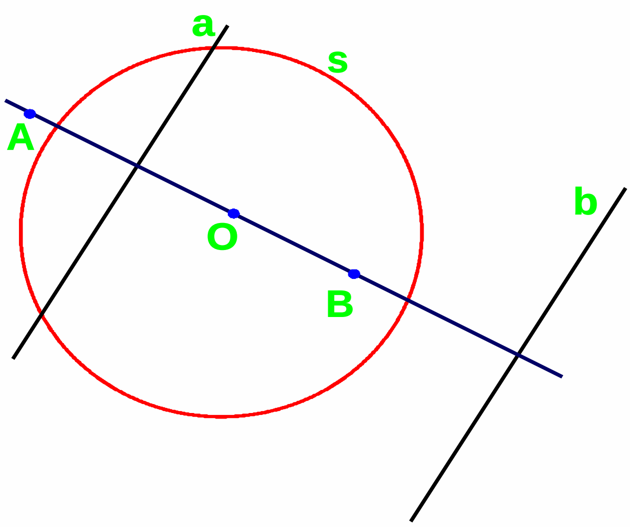
ب. تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره S ، خطوط موازی را به نقاط هم خط با مرکز O ی S بدل می کند ، و به عکس ، نقاط هم خط با O ، مرکز S ، را به خطوط موازی بدل می کند (شکل ۳۳) .

این ویژگی نتیجه مستقیم این واقعیت است که قطب یک خط a ، بر خط مار بر مرکز S و عمود بر a واقع است.

ج. هر گاه A و B دو نقطه ، a و b نگاره های آنها بر اثر تبدیل قطب وقطبی نسبت به دایره S به مرکز O باشند ، آنگاه زاویه بین دو خط a و b با زاویه AOB (یا با مکمل آن) برابر است .



شکل۳۴



شکل۳۳

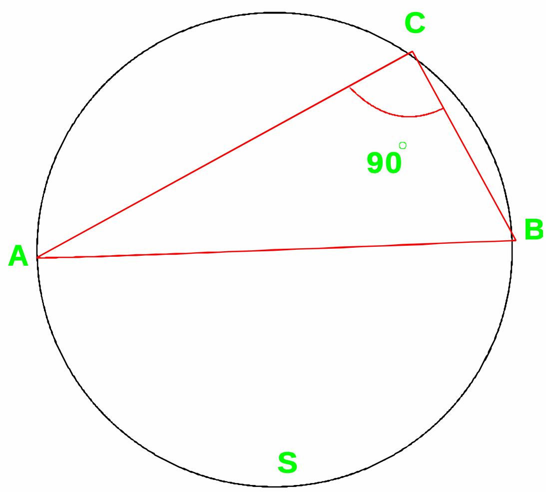
این ویژگی از اینجا نتیجه می شود که ضلع های زاویه AOB و ضلع هـای زاویـه ای کـه a و b بـا هـم می‌سازند نظیر بر هم عمودند . (شکل ۳۴) .

ویژگی های (ب) و(ج) در تبدیل قطب وقطبی به ما این امکان را می دهند کـه قـضایای تـازه ای را از بـسیاری از قضایای هندسه مقدماتی به دست آوریم . مثلا گزاره هر زاویه محاطی مقابل به قطر یک قائمه است (شکل ۳۵ (الف)) را در نظر می گیریم . یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره مورد بحث ، S ،نقاط A و B و C را به مماس های a و b و c و

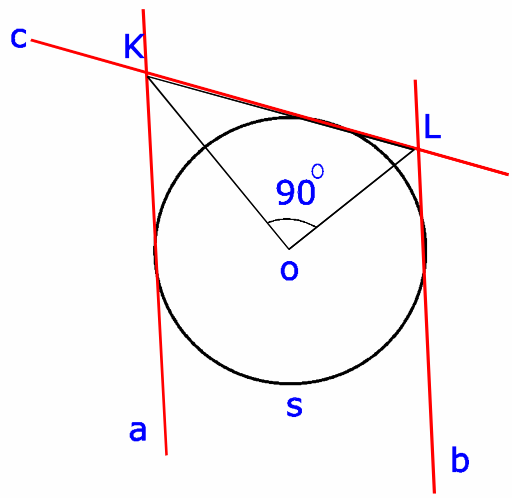
بر S بدل می کند . به ویژه هرگاه A و B دو سر قطری از S باشند ، آنگاه مماس های a و b موازی می شوند ($\leftarrow$ ویژگی (ب) ی تبدیل قطب وقطبی) .

با توجه به ویژگی (ج) از تبدیل قطب وقطبی ، اکنون می توانیم بیان کنیم که : هرگاه S دایره ای به مرکز O باشد و دو مماس موازی بر S مماس سوم بر آ نرا در نقاط K و L ببرند ، آنگاه زاویه KOL قائمه است (شکل ۳۵ (ب)) .

یک مثال پیچیده تر دیگر . تقریباً واضح است که یک چهار ضلعی که راس هایش وسط های یک متوازی الاضلاع باشند ، یک متوازی الاضلاع است . می بینیم از به کار بردن تبدیل قطب وقطبی برای این قضیه چه گزاره ای می توانیم به دست آوریم .



شکل۳۵(الف)

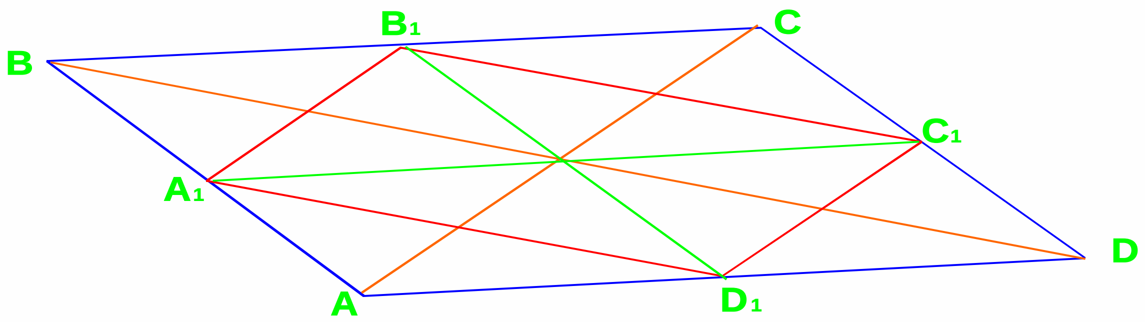


شکل۳۵(ب)

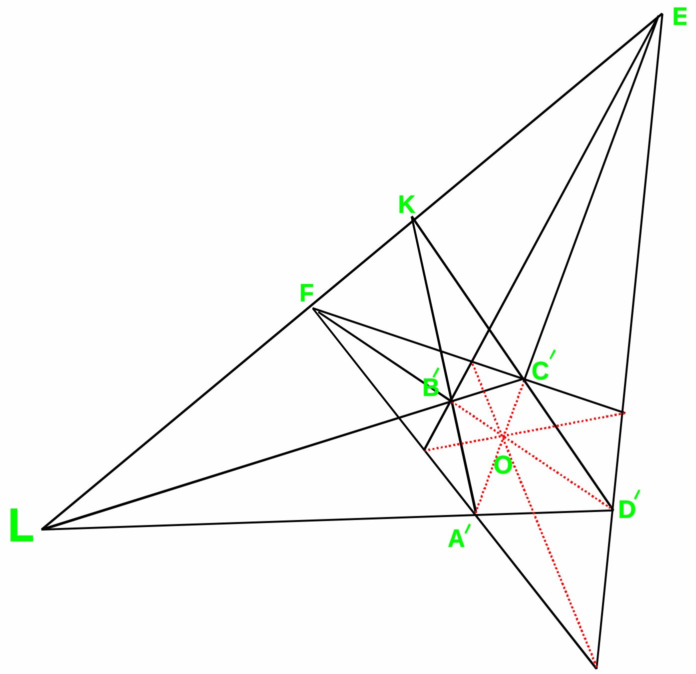
نخست باید نقطه های وسط اضلاع را بر حسب موجوداتی که نگاره های آنها بر اثر تبدیل قطب و قطبی معلوم انـد تعریف کنیم (زیرا نگاره وسط یک پاره خط در یک تبدیل قطب و قطبی بر ما معلوم نیست) . تعریف زیـر یکـی از ایـن تعاریف است : وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع نقطه های برخورداضلاع ومیان خطهای آن است – میان خط ها خـط هایی هستند که از نقطه برخورد قطرها به موازات اضلاع کشیده می شوند – این تعریف ، تعریفی است که ما می پذیریم.

به موجب ویژگی (ب) ی تبدیل قطب وقطبی ، متوازی الاضلاع $ABCD$ به یـک چهـار ضـلعی $A'B'C'D'$ بـدل می‌شود که محل برخورد قطرهایش بر O ، مرکز S ، منطبق است (← شکل ۳۶ (ب) ؛ S در شکل نـشان داده نـشده است). راس های مقابل متوازی الاضلاع به اضلاع مقابل چهار ضلعی $A'B'C'D'$ بدل می شود ، قطرهای متوازی الاضلاع به نقاط K و L ، محل برخورد جفت های اضلاع مقابل چهار ضلعی ، و نقطه تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع به خـط KL .

به موجب ویژگی های (ب) و (ج) از یک تبدیل قطب وقطبی ، میان خط های متوازی الاضلاع به نقاط E و F، محل تلاقی خط KL با قطرهای $A'C'$ و $B'D'$ از چهار ضلعی $A'B'C'D'$ بدل می شود . این نکات ایجاب مـی کننـد کـه وسـطهای اضلاع متوازی الاضلاع به خط های $B'E'$ و $E'D'$ ، $F'A'$ و $F'C'$ بدل می شوند و لذا گزاره اصلی مایـه پیـدایش گـزاره دوگان آن به شرح ذیل می شود : نقطه تلاقی قطرهای چهار ضلعی ای که اضلاعش بر خطوط FA' و EB' و FC' و ED'



شکل۳۶(الف)



شکل۳۶(ب)

واقع اند ،بر نقطه تلاقی قطرهای چهار ضلعی $A'B'C'D'$ منطبق است .(شکل ۳۶ ب) .

این گزاره جدید نه مسلم است و نه ساده . اثبات مستقیم آن تا حدی پیچیده است .

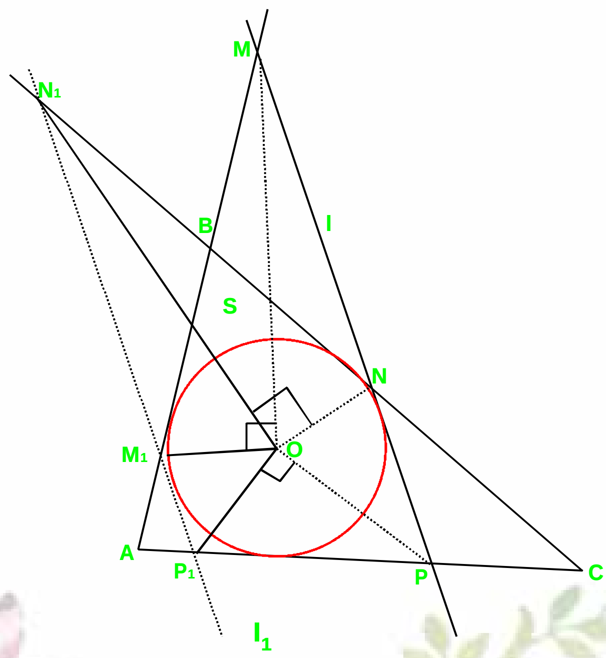
۱۷. از ویژگی (ب) ی تبدیل قطب وقطبی برای اثبات قضیه دزارگ استفاده کنید.

حل. گیریم ABC و $A_1B_1C_1$ دو مثلث منظری از O ، نقطـه تقـاطع AA_1 و BB_1 و CC_1 باشـند. تبـدیل قطـب وقطبی II نسبت به یک دایره S به مرکز O را در نظر می گیریم . به موجب ویژگی (ب) از تبدیل قطب وقطبی ، II مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ را به مثلث هایی که اضلاعشان دو به دو موازی هستند بدل می کند. این گونه مثلث هـا بـا یـک انتقال یا یک تجانس به هم مربوط می شوند. ولی در این صورت خط های واصل به راس های این مثلـث هـا متقـارب یـا موازی هستند . اما ویژگی (الف) تبدیل قطب و قطبی به ما اجازه می دهد که نتیجه بگیریم که نقطه های تقـاطع اضـلاع

متناظر مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ هم خط اند .

قسمت دوم قضیه دزارگ که می گوید اگر دو مثلث به جای اینکه تصویر منظری از یک نقطه باشند ، تصویر منظری از یک خط باشند ، از قسمت اول بر اثر اصل دوگانی نتیجه می شود (برای اینکه این را نشان دهیم ، یک تبدیل قطب وقطبی نسبت به یک دایره دلخواه را برای نمودار مربوط به قسمت اول قضیه به کار می بریم . ← مسئله ۱۰) .

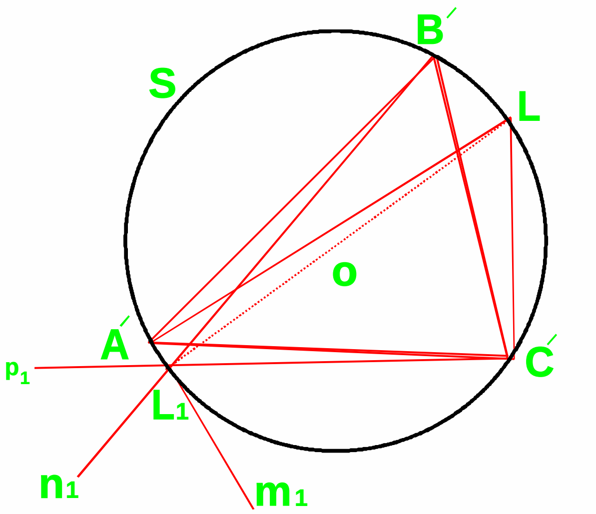
۱۸. دایره S در مثلث ABC محاط شده است . خط l بر دایره S مماس است و ضلع های مثلث را در نقاط M و N و P قطع می کند (شکل ۳۷) . از O، مرکز S ، عمود بر خطوط OM و ON و OP اخراج می کنیم و نقاط تلاقی آنها را با اضلاع متناظر مثلث ، M_1 و N_1 و P_1 نام می گذاریم . ثابت کنید که نقاط M_1 و N_1 و P_1 بر یک خط قرار دارند .



شکل ۳۷

حل. تبدیل قطب وقطبی نسبت به دایره S را به کار می بریم . اضلاع BC و CA و AB ی ΔABC به نقطه‌های A' و B' و C' واقع بر S بدل می شوند و مثلث محیطی ABC و مثلث محاطی $A'B'C'$ بدل می شود (یعنی

اضلاع ΔABC به راس های $\Delta A'B'C'$ بدل می شود و به عکس) . مماس l به یک نقطه L واقع بر S بدل می شود ؛ نقطه‌های M و N و P به خط های LA' و LB' و LC' بدل می شوند ، و نقطه های M_1 و N_1 و P_1 به خط های m_1 و n_1 و p_1 مار بر A' و B' و C' عمود بر $A'L$ و $B'L$ و $C'L$ ؛ نتیجه گیری اخیر از ویژگی (ج) مربوط به تبدیلات قطب وقطبی حاصل می شود (شکل ۳۸) . قضیه ای در مسئله بیان شده است به قضیه زیر بدل می شود : خط های m_1 و n_1 و p_1 در یک نقطه از S متلاقی اند . کافی است یکی از این دو قضیه را اثبات کنیم . اما این مطلب که خط های m_1 و n_1 و p_1 در نقطه ای از S متلاقی اند کاملا روشن است . زیرا $m_1 \perp A'L$ ایجاب می کند که m_1 دایره S را در نقطه L_1 ، متقاطر L ، ببرد، هم چنین ، خط های n_1 و p_1 هم باید از L_1 بگذرند . [اشاره می کنیم که چون L و L_1 متقاطر نسبت به S هستند، نتیجه می شود که در شکل ۳۷ $l \| l_1$ ؛ رک. ویژگی (ب) از یک تبدیل قطب وقطبی .]



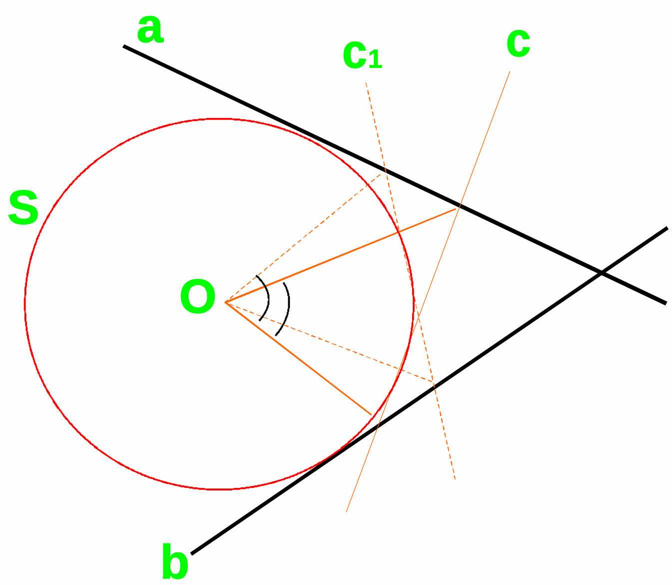
شکل ۳۸

۱۹ . قضیه حاصل از کاربرد قطب وقطبی را برای قضیه زیر بیان کنید :

زاویه های محاط در یک دایره و متقابل به یک کمان با هم برابرند .

حل. قطعه مماسی که به وسیله دو مماس ثابت a و b از یک مماس متغیر سوم بر دایره جدا می شود ، از مرکز دایره

به زاویه ثابتی دیده می شود (شکل ۳۹؛ ← شکل ۳۵ ب) .



شکل۳۹

۲۰ . قضایای حاصل از کاربرد قطب وقطبی را برای قضایای زیر بیان کنید :

الف.سه ارتفاع یک مثلث متقارب اند .

ب. نیمسازهای یک مثلث متقارب اند.

حل.

الف. بر اثر تبدیل قطب وقطبی نسبت به یک دایره S به مرکز O ، یک مثلث ABC به یک مثلث $A'B'C'$ بدل می شود ، و ارتفاعات ΔABC به نقطه های P' و Q' و R' ، واقع بر اضلاع $\Delta A'B'C'$ بدل می شوند به طوری که

$\angle A'O'P' = \angle B'O'Q' = \angle C'O'R' = 90^0$

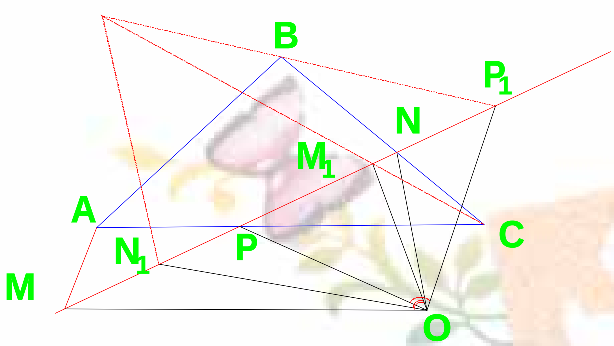
(شکل ۴۰ (الف) ؛ ← ویژگی (ج) از تبدیل قطب وقطبی) . لذا به قضیه زیر هدایت می شویم : گیریم O

نقطه ای در صفحه مثلث ABC باشد . نقطه های تلاقی خط های مار بر O و عمود بر OA و OB و OC با اضلاع متناظر آن هم خط اند .

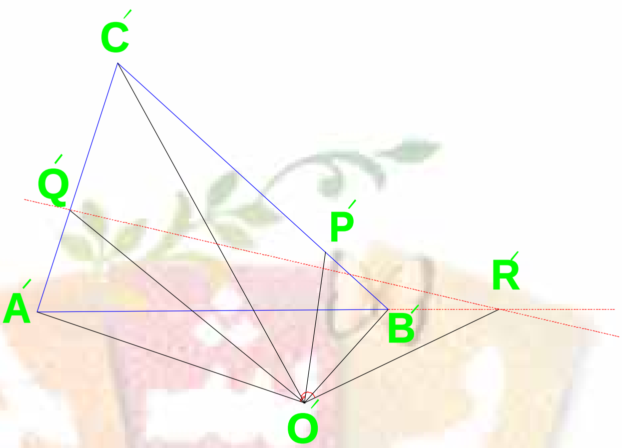
یادداشت . استفاده از تبدیل قطب وقطبی برای شکل ۴۰ (الف) به قضیه جالب زیر منجر می شود : گیریم o یک خط و O یک نقطه در صفحه مثلث ABC باشند و M و N و P نقطه های تلاقی خط o با اضلاع AB و BC و CA از مثلث . اگر M_1 و N_1 و P_1 سه نقطه بر o چنان باشند که $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \angle POP1 = 90^0$ آنگاه خط های AN_1 و BP_1 و CM_1 متقارب اند(شکل ۴۰ ب) .

به نوبه خود ، می توان یک تبدیل قطب وقطبی (نسبت به یک دایره دلخواه به مرکز $O_1=O$) برای این قضیه به کاربرد و بدین ترتیب قضیه ای تازه (نسبتا پیچیده) به دست آورد ...

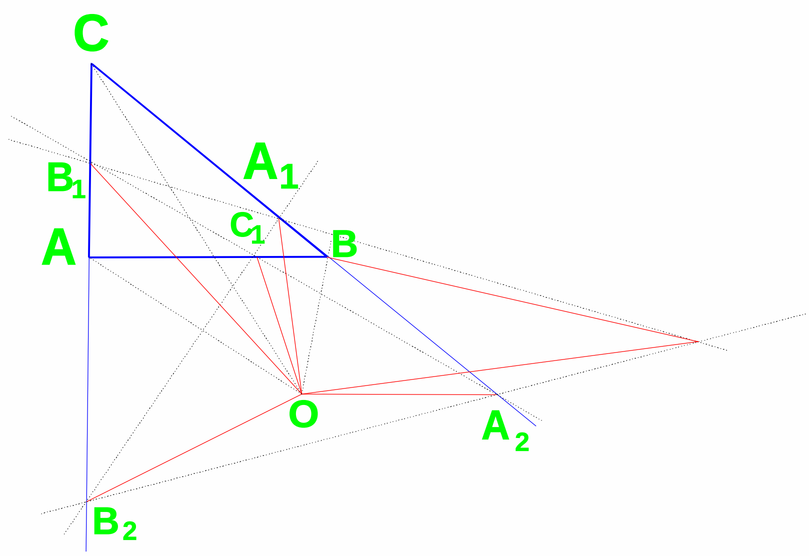
ب. گیریم l نیمساز یکی از زوایای حاصل ازخط های m و n باشد . بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S به مرکز O ، خط های l و m و n به نقطه های هم خط M و N و L بدل می شوند به طوری که پاره خط های ML و NL به دو زاویه مساوی یا مکمل در O مقابل اند (ویژگی (ج) از تبدیل قطبی) ؛ یا به عبارت دیگر ، L نقطه تلاقی MN است با نیمساز یکی از دو زاویه حاصل از خط های OM و ON.



شکل۴۰(ب)



شکل۴۰(الف)

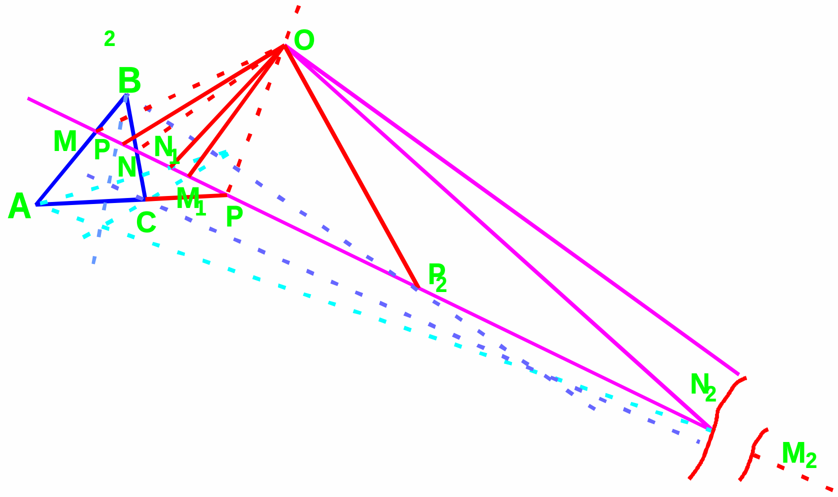


شکل۴۱(الف)

چون نمی دانیم که L روی کدام یک از این دو نیمساز واقع است، هر دو نیمساز زاویه های حاصل از خط های m و n را در نظر می گیریم. این خط ها به نقطه های تلاقی MN با نیمسازهای دو زاویه مجاور حاصل از OM و ON بدل می‌شوند. بنابراین بجاست که نیمسازهای خارجی ΔABC را هم در نظر بگیریم وقضیه مربوط به نقطه های تلاقی نیمسازها را چنین تنظیم کنیم : شش نیمساز زاویه های داخلی و خارجی یک مثلث ABC سه به سه در چهار نقطه متقارب اند . بر اثر تبدیل قطب وقطبی ، این قضیه به قضیه زیر بدل می شود : گیریم A و B و C و O چهار نقطه باشند که هیچ سه تایی از آنها بر یک خط نباشند . نقطه های تلاقی شش نیمساز زاویه های حاصل از خط های OA و OB ، OB و OC ، OC و OA ، با اضلاع متناظر مثلث ABC سه به سه بر چهار خط قرار دارند (شکل ۴۱ الف) .

یادداشت. استفاده از تبدیل قطب وقطبی برای شکل۴۱الف به قضیه زیر منجر می شود : گیریم o یک خط ، و O نقطه ای در صفحه یک مثلث ABC باشد ، و M و N و P نقطه های تلاقی خط o بااضلاع AB و BC و CA . اگر M_1 و M_2 ، N_1 و N_2 ، P_1 و P_2 ، نقطه های تلاقی o با نیمسازهای زاویه های حاصل از ON و OP ، OP و OM ، OM و ON ، باشند ، آنگاه سه خط AN_1 و AN_2 ، BP_1 و BP_2 ، CM_1 و CM_2 ، سه به سه در چهار نقطه متقارب اند

(شکل ۴۱ ب ؛ ← یادداشت پس از مسئله قبل).



شکل۴۱(ب)

قضیه های جدید از قضیه های قدیم مفیدند . ازاین رو ، مثلا، اگر از ویژگی (ج) و قضیه مسئله ۱ استفاده کنیم ، آنگاه به آسانی می توانیم نشان دهیم که ب، بر اثر یک تبدیل قطب وقطبی ، قضیه زیر به دست می آید :

اگر p_1 و p_2 و p_3 فواصل اضلاع مثلث ABC از یک نقطه O باشند و اضلاع مثلث از O به زاویه های مساوی (یا مکمل) دیده شوند ، آنگاه از عددهای $1/p_1$ و $1/p_2$ و $1/p_3$ ، آن یک که بزرگتر است از مجموع دو عدد دیگر بزرگتر نیست .

اگر دایره S در $2n$ ضلعی $A_1A_2...A_{2n}$ محاط باشد و l مماس بر S ، حاصلضرب فواصل راس های با اندیس زوج $2n$ ضلعی از l ، مساوی است با حاصلضرب فواصل راس های با اندیس های فرد آن از l .

اگر دایره S در n ضلعی $A_1A_2...A_n$ محاط باشد و l خطی مماس بر S ، حاصلضرب فواصل راس های n ضلعی از l مساوی است با حاصلضرب فواصل نقاط تماس n ضلعی از l .

گیریم S دایره ای محاط در n ضلعی منتظم $A_1A_2...A_n$ باشد و l مماسی بر S . هرگاه d_0 و d_1 و ... و d_{n-1} فاصله های n ضلعی از l باشند و d_0 کوچکترین این فاصله ها باشد ، آنگاه

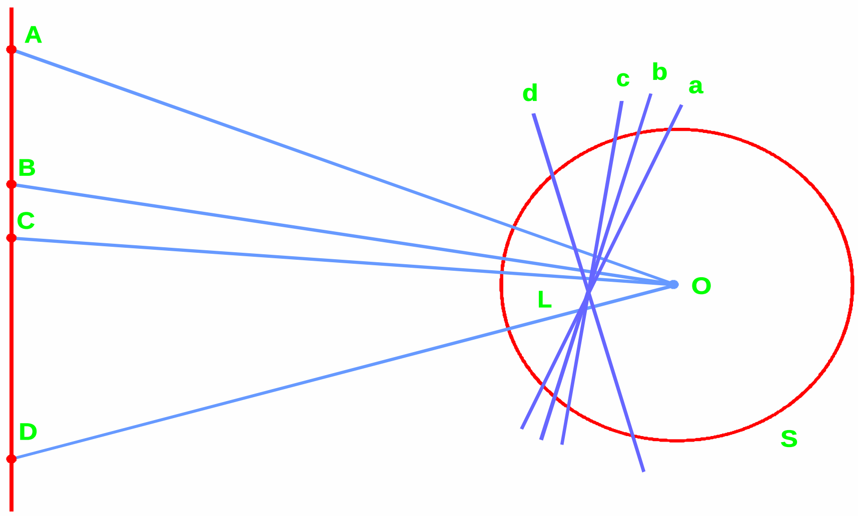
$$\frac{1}{d_0}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\mathbf{L}+\frac{1}{d_{n-1}}$$

به دست آوردن این نتایج را با استفاده از قطبی معکوس به عهده خواننده می گذاریم .

اکنون می توانیم ویژگی دیگری از تبدیل قطب وقطبی را بیان کنیم :

- ویژگی د. اگر یک تبدیل قطب و قطبی چهار نقطه A و B و C و D واقع بر یک خط l را به چهار خط a و b و c و d (که به موجب ویژگی (الف) تبدیل های قطب و قطبی در یک نقطه L متقارب اند) بدل کند، آنگاه نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d با نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D مساوی است .

اثبات ویژگی (د) کاملا ساده است . چهار نقطه A و B و C و D واقع بر یک خط و قطبی های آنها a و b و c و d نسبت به یک دایره S را درنظر می گیریم (شکل ۴۲). تعریف نسبت ناهمساز چهار خط ایجاب می کند که نسبت ناهمساز نقاط A و B ؛ C و D با نسبت ناهمساز خطوط OA و OB ؛ OC و OD . (O مرکز S) . مساوی باشد . چون قطبی یک نقطه نسبت به یک دایره S بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز S عمود است ، لذا خطوط OA و OB و OC و OD به ترتیب بر خطوط a و b و c و d عمود می شوند . از اینجا نتیجه می گیریم که دو چهار خطی a و b و c و d ، OA و OB و OC و OD می توانند با یک حرکت مناسب برهم منطبق شوند ؛ زیرا این عمل را می توان ابتدا با انتقال خطوط OA و OB و OC و OD به طوری که O بر L منطبق شود ، و سپس دوران این خطوط به زاویه 90^0 حول L ، انجام داد . از اینجا نتیجه می شود که نسبت ناهمساز چهار خط OA و OB ؛ OC و OD با نسبت ناهمساز چهار خط



شکل۴۲

a و b ؛ c و d مساوی است ؛ اما در این حالت نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D نیز با نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d مساوی است ، و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم .