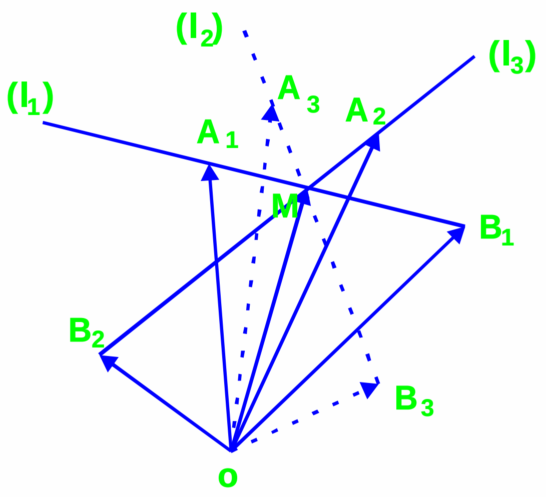
همرسی

نقاط A_1 و B_1 را روی خط l_1 و نقاط A_2 و B_2 را روی خط l_2 در نظر بگیرید . فرض کنید M محل برخورد این دو خط باشد، این به آن معنی است که وجود دارد α و β در بازه (۱ و ۰) به طوریکه :

$$\vec{M} = \alpha.\vec{A}_1 + (1-\alpha)\vec{B}_1 = \beta.\vec{A}_2 + (1-\beta).\vec{B}_2$$



حال ، اگر خط سومی مانند l_3 گذرنده از نقاط A_3 و B_3 ، از نقطه M هم بگذرد ، آن گاه معادله سومی بـه شـکل $\vec{M} = \lambda.\vec{A}_3 + (1-\lambda).\vec{B}_3$ خواهیم داشت .

حال اگر با توجه به مفروضات مسئله ، این دستگاه سه معادله ای ، قابل حل بود، آن گـاه سـه خـط l_1، l_2 و l_3 در M همرسند ، و بالعکس یعنی اگر خطوط همرس باشند ، معادله ها هم برقرار می باشند.

سوال ۱. ثابت کنید در مثلث دلخواه ΔABC، محل تلاقی نیمساز $\angle ABC$ با خط میانه موازی با ضـلع AB ، روی خط واصل میان نقاط تماس دایره محاطی مثلث ΔABC با اضلاع AB و AC ، قرار دارد .

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

حل. فرض کنید : $\vec{BC}=a.\vec{\alpha},\vec{CA}=b.\vec{\beta},\vec{AB}=c.\vec{\lambda}$

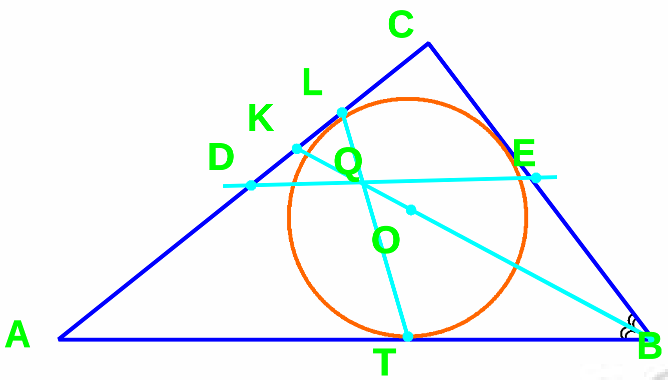
که $a,b,c\in \mathbb{R}$ و $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\lambda}|=1$ هم چنین E راوسط BC و D راوسط CA و K را پای نیمساز زاویه راس A در نظر بگیرید.

فرض کنید DE ، BK را در نقطه Q قطع کند . هم چنین محل تماس دایره مذکور با اضلاع AC و AB را به ترتیب L و T بنامید . ثابت می کنیم $\vec{TL}$ $\vec{LQ}$ همراستا هستند، آنگاه حکم مسئله یعنی هم خطی T و L و Q اثبات خواهد شد .

می دانیم که : $\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{AB}=0$

یعنی : $a.\vec{\alpha}+b.\vec{\beta}+c.\vec{\lambda}=0$ هم چنین از هندسه کلاسیک داریم :

$|LA|=(P-a)$



(که P نصف محیط مثلث ΔABC است) در نتیجه :

$\vec{LA}=(P-a).\vec{\beta}$

به طریق مشابه : $\vec{AT}=(P-a).\vec{\lambda}$

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

$$\vec{LT} = \vec{LA} + \vec{AT} = (P-a)(\vec{\beta} + \vec{\lambda})$$

هم چنین :

$$\vec{ED} = -\frac{1}{2}c.\vec{\lambda}, \vec{EQ} = -\frac{1}{2}a.\vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow \vec{QD} = \vec{ED} - \vec{EQ} = \frac{1}{2}(a-c).\vec{\lambda}$$

داریم :

$$\vec{DA} = \frac{1}{2}b.\vec{\beta}, \vec{AQ} = -\vec{DA} - \vec{QD} = -\frac{1}{2}b.\vec{\beta} - \frac{1}{2}(a-c)\vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow \vec{LQ} = \vec{LA} + \vec{AQ} = \frac{(b+c-a)}{2}.\beta - \frac{1}{2}b.\vec{\beta} - \frac{1}{2}(a-c).\vec{\lambda}$$

$$= (\frac{c-a}{2}).\vec{\beta} + (\frac{c-a}{2}).\vec{\lambda} = (\frac{c-a}{2})(\vec{\beta} + \vec{\lambda})$$

پس :

$$\vec{LQ} = (\frac{c-a}{2})(\vec{\beta} + \vec{\lambda})$$

$$\vec{LT} = (\frac{b+c-a}{2})(\vec{\beta} + \vec{\lambda})$$

در نتیجه $\vec{LQ}$ بر حسب $\vec{LT}$ چنین است :

$$\vec{LQ} = (\frac{c-a}{b+c-a})\vec{LT}$$

یعنی Q بر روی خط LT قرار دارد و داریم : $\frac{LQ}{LT} = \left|\frac{c-a}{b+c-a}\right|$ ■

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

سوال ۲. دو وتر AB و CD از دایره ای مفروض در M یکدیگر را قطع کرده اند . وسط BD را S بنامیـد . SM را امتداد دهید تا AC را در K قطع کند . نشان دهید :

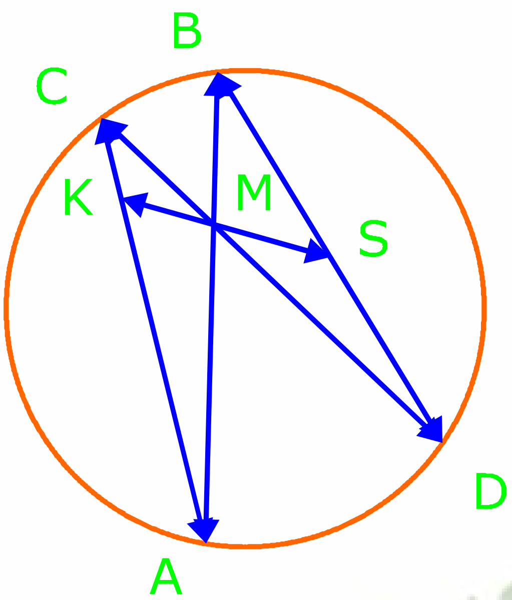
$$\frac{AK}{KC}=\frac{AM^2}{CM^2}$$

حل. با توجه به فرض مسئله می توان نوشت :

$$\exists\lambda : \overrightarrow{AK}=\lambda.\overrightarrow{KC}$$

پس :

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{\lambda+1}.\overrightarrow{MA}+\frac{\lambda}{\lambda+1}.\overrightarrow{MC} \qquad (۱)$$



هم چنین می توان نوشت :

$$\exists\alpha : \overrightarrow{MK}=\alpha.\overrightarrow{MS}=\frac{\alpha}{2}.\overrightarrow{MB}+\frac{\alpha}{2}.\overrightarrow{MD}$$

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir

از طرفی با توجه به قوت نقطه M نسبت به دایره داریم :

$$|MA|.|MB|=|MC|.|MD|=\beta$$

$$\Rightarrow \frac{|MB|}{|MA|}=\frac{\beta}{|MA|^2},\frac{|MD|}{|MC|}=\frac{\beta}{|MC|^2}$$

در نتیجه :

$$\overrightarrow{MB}=\frac{-\beta.\overrightarrow{MA}}{|MA|^2},\overrightarrow{MD}=\frac{-\beta.\overrightarrow{MC}}{|MC|^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{MK}=\frac{-\alpha\beta}{|MA|^2}-\overrightarrow{MA}-\frac{\alpha\beta}{|MC|^2}-\overrightarrow{MC} \qquad (۲)$$

حال با مساوی قرار دادن روابط (۱)و(۲) ، با توجه به غیر همراستا بودن $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MC}$ داریم :

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{-\alpha\beta}{|MA|^2},\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{-\alpha\beta}{|MC|^2}\Rightarrow\lambda=\frac{|MA|^2}{|MC|^2}$$

اما در ابتدای حل فرض کرده بودیم $\overrightarrow{AK}=\lambda\,\overrightarrow{KC}$ ؛ پس حکم ثابت شد .

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir