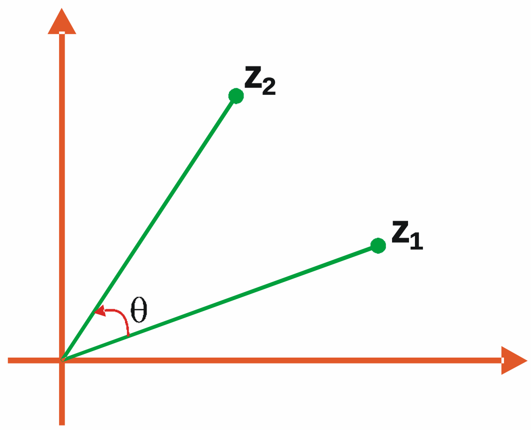
۲. دوران

فرض کنید z_2 دوران یافته z_1 تحت زاویه θ در جهت مثلثاتی حول مبدا مختصات باشد؛

بنابراین طبق تعریف دوران، اندازه پاره خط $\overrightarrow{oz_1}$ با $\overrightarrow{oz_2}$ برابر است، یعنی :

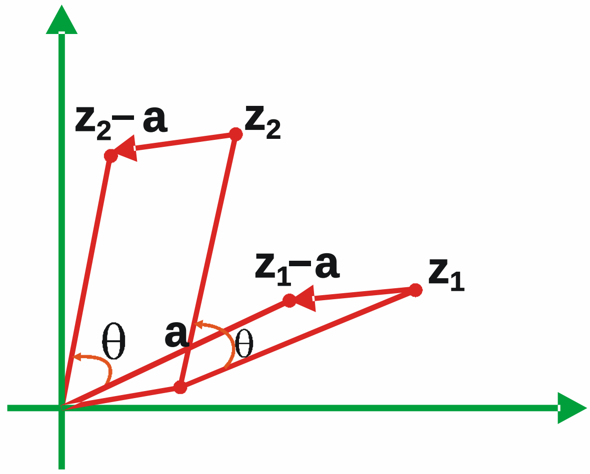
$|z_2| = |z_1|$، و بنابراین تعریف، تنها آرگومان z_2 نسبت به z_1, θ درجه اضافه می‌گردد، یعنی:

$Arg(z_2) = Arg(z_1) + \theta$ ، بنابراین : $z_2 = z_1 Cis\theta$.



شکل۱

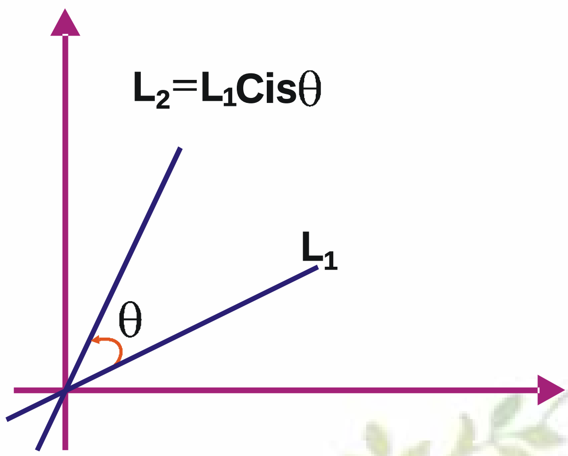
حال اگر همین دوران حول نقطه a صورت گرفته باشد، و با یک انتقال a را به مبدا ببریم،



شکل۲

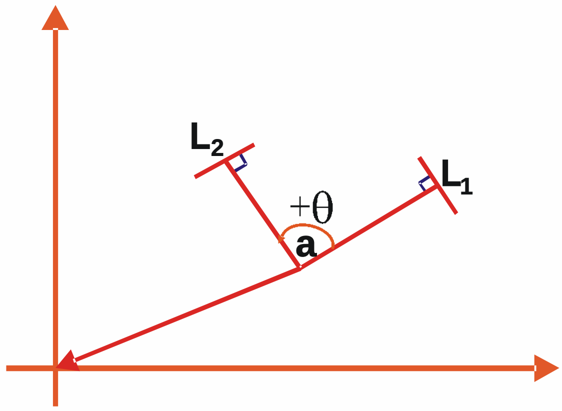
z_1 و z_2 به z_1-a, z_2-a تبدیل می‌شوند. پس بنابر آنچه که پیشتر بدست آوردیم، خـواهیم داشت:

$$z_2 - a = (z_1 - a)Cis\theta \Rightarrow z_2 = \left(z_1 - a\right)Cis\theta + a$$



شکل۳

با توجه به آنچه که بیان شد، نقطه $ke^{i\theta_1}\ (k \in \mathbb{R})$ با دوران حول مبدا تحــت زاویــه $+\theta_2$، بــر نقطه $ke^{i(\theta_1+\theta_2)}$ منطبق می‌شود. همچنین خط $l_2 = l_1 Cis\theta$ دوران یافته l_1 تحت $+\theta$ درجــه حــول مبدا است (l_1 از مبدا می‌گذرد)



شکل ۴

حال اگر l_2 دوران یافته l_1 حول به اندازه $+\theta$ باشد، برای بدست آوردن معادله l_2، ابتــدا a را به مبدا انتقال می‌دهیم، پس l_1 به $l_1 - a$، l_2 به $l_2 - a$ تبدیل می‌شود. حال هر نقطه از $l_2 - a$ دوران یافته دقیقاً یکی از نقاط $l_1 - a$ تحت زاویه $+\theta$ و حول مبدا می‌باشد، پس داریم:

$$l_2 - a = (l_1 - a)Cis\theta \Rightarrow l_2 = (l_1 - a)Cis\theta + a$$

یعنی اگر معادله l_1 برابر باشد با: $l_1 : kz_1 + b\ (k \in \mathbb{R})$؛ آن گاه خواهیم داشت:

$$l_2 : (kz_1 + b - a)Cis\theta + a$$