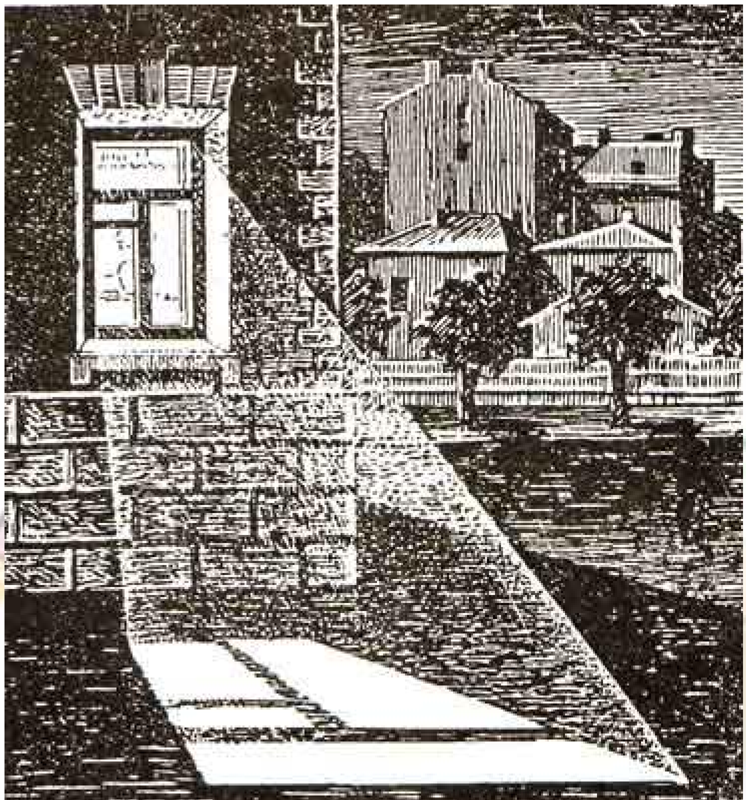
تصویر مرکزی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیل تصویری یک صفحه

فرض می کنیم π و π' دو صفحه در فضا باشند . یک نقطه O که بر هیچ یک از این دو نباشد انتخاب وازایـن نقطـه صفحه πرا بر صفحه π' تصویر می کنیم ، یعنی به هر نقطه P در π نقطه P' واقع بر π' را چنان مربوط می کنـیم کـه P' بر OP واقع باشد (شکل ۱الف و ب).

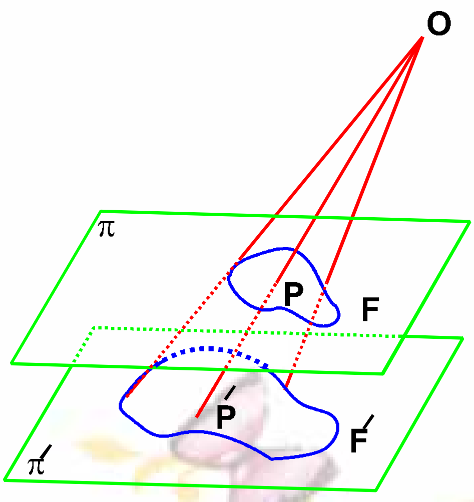
نگاشتی که چنین تعریف کردیم تصویر مرکزی(πبر π') به مرکز O نامیده می شود . بر اثر تصویر مرکـزی ، نگـاره یک شکل F از π ، شکل F' از π' است (مثلا ، سایه ای را مجسم کنیـد کـه در شـب از چهـارچوب پنجـره یـک اطـاق بسیارروشن بر خیابان افتاده است ؛ (شکل۲).



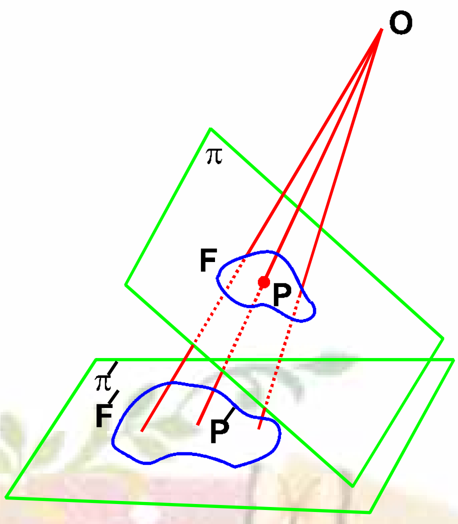
اگر صفحات π و π'موازی باشند ، یک تصویر مرکزی از π بر π' هر شکل F از π را به شکل مــشابهش F' در π' بدل می کند (در این حالت یک تجانس به مرکز O پدید می آورد ← شکل ۱الف) در نتیجه قبل از همه سروکار ما با حالتی است که π و π' موازی نباشند (شکل ۱ ب).

ملاحظه می کنیم که در حالت اخیر در π خطی وجود دارد که نقطه های آن نگاره ای در π' ندارند، و آن خط x فصل مشترک π با صفحه ای است که بر O می گذرد و با π' موازی است (شکل۳الف) و نیز در π'خطی وجود دارد که نقطه های آن پیشنگاشتی در صفحه π ندارند ، و آن خط y' فصل مشترک π' با صفحه ای است که بر O می گذرد و با π موازی است (شکل ۳ ب).

بنابراین در تصویر مرکزی یک صفحه π بر یک صفحه π'، دو خط استثنایی یکی (در πودیگری در π') وجود دارند که آنها را خط های خاص صفحات π و π' می نامیم.*



شکل۱(الف)

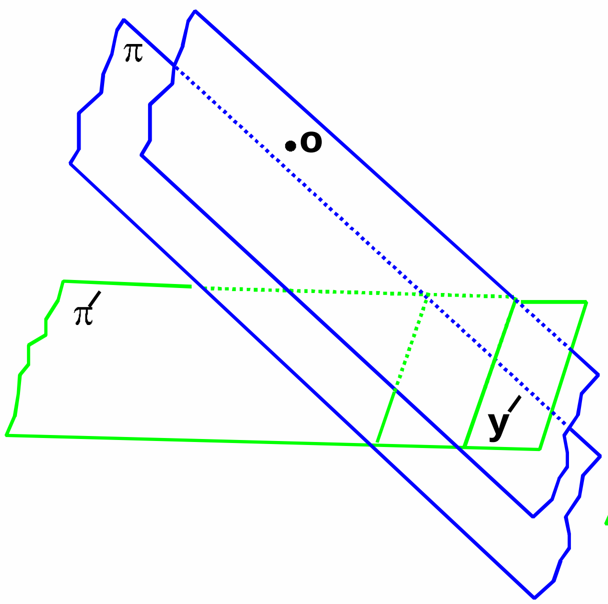


شکل۱(ب)

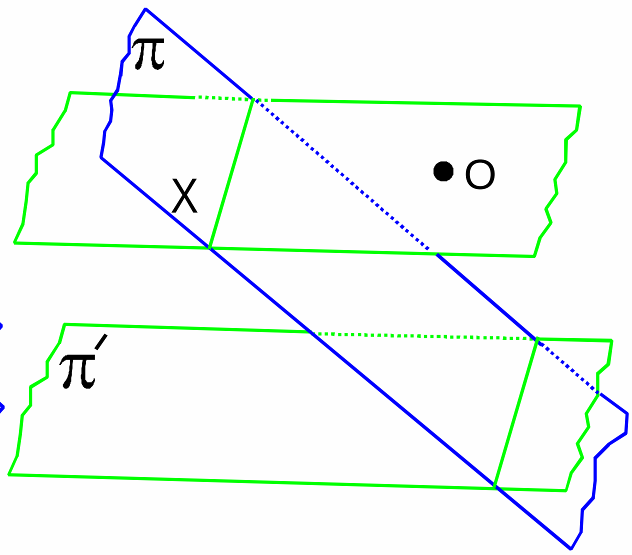
* روشن است که x یا z' موازي و هر دو با فصل مشترک صفحات πو π' موازي اند .

در تصویر مرکزی ، خیلی بیشتر از تصویر موازی ، ریخت شکلها تغییر می کند . نگاره یک پاره خط بـر اثـر تـصویر مرکزی ممکن است یک پاره خط ،یا دو نیم خط (شکل ۴) ، و نگاره های یک مثلث ممکن است یکی از شکل هـا در شـکل ۵الف – ه باشد .

اغلب ممکن است یک نمودار پیچیده را به وسیله یک تصویر مرکزی مناسب ساده کرد و بدین ترتیـب حـل بعـضی مسائل مربوط به آن نمودارراآسان تر نمود . در این گونه مواردازویژگی های تصویر مرکزی به شره زیر استفاده خواهیم کرد.

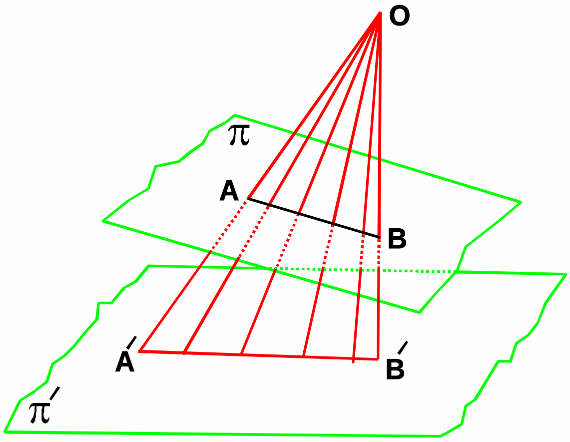


شکل۳(ب)

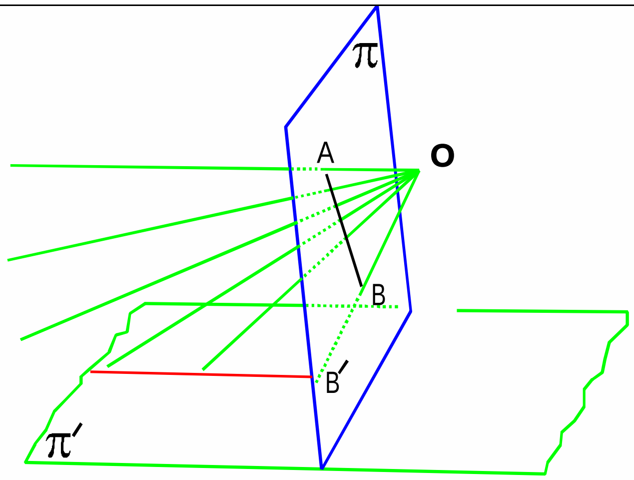


شکل۳ (الف)

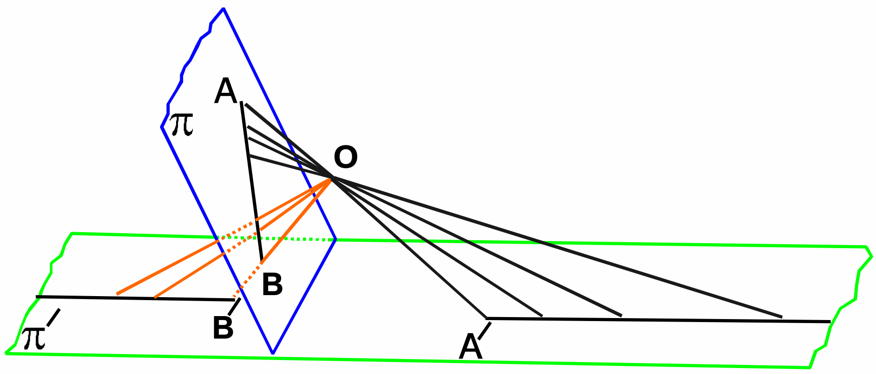
- **ویژگی الف**. در تصویر مرکزی خط های صفحه π به خط های صفحه π' بدل می شوند (بـه اسـتثنای خـط خاص x در صفحه π که نقطه هایش ، چنانکه قبلا اشاره شد ، به هیچ یک از نقطه های π' بدل نمی شوند).



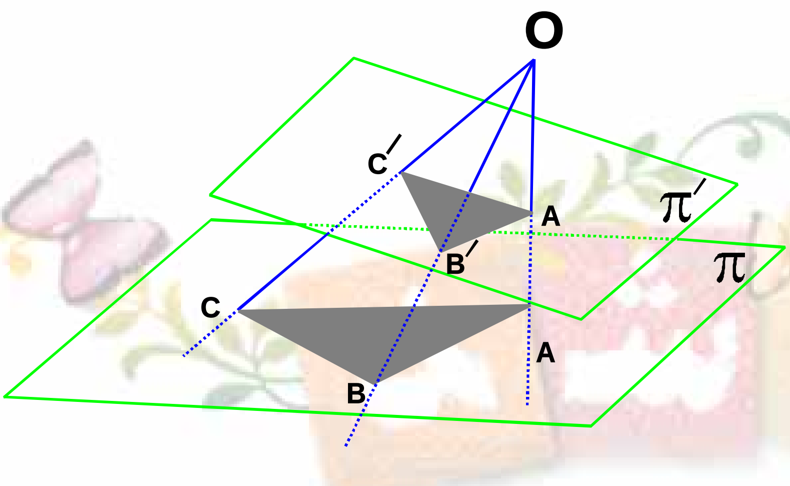
شکل۴(الف)



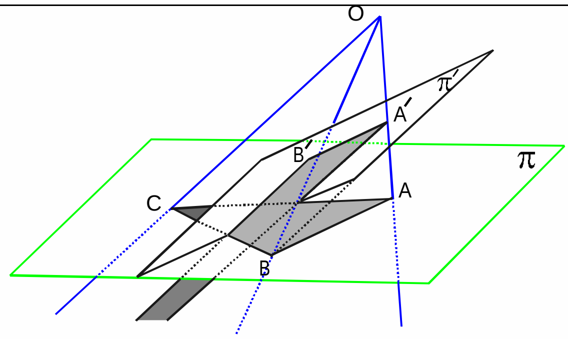
شکل۴(ب)



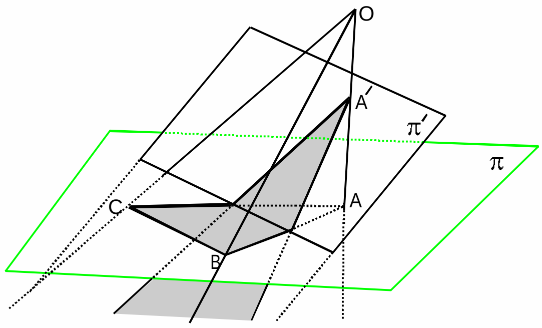
شکل۴(ج)



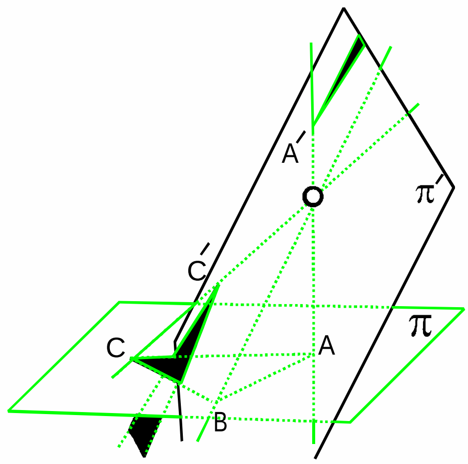
شکل۵(الف)



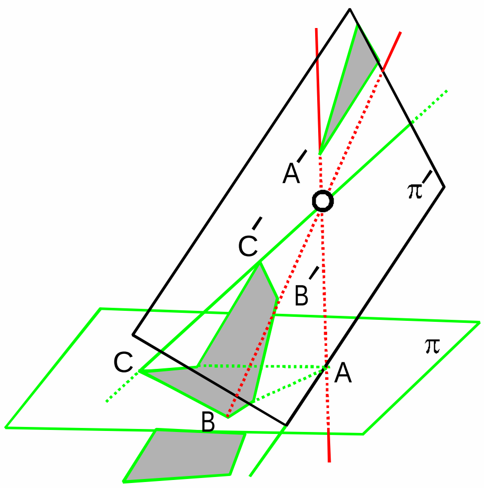
شکل۵(ب)



شکل۵(ج)

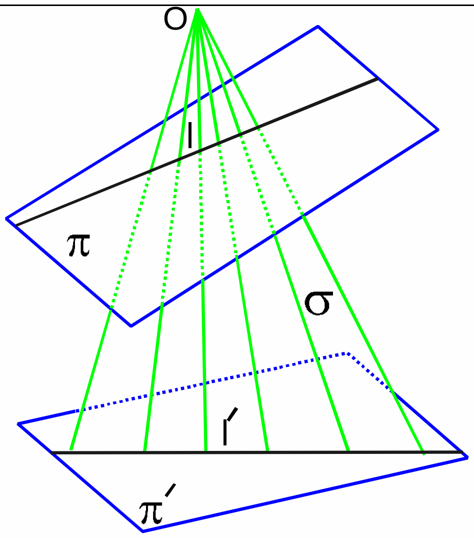


شکل۵(د)



شکل۵(ه)

زیرا ، خط های واصل بین نقطه O و نقطه های خط l از صفحه π ، یک صفحه σ پدید می آورند . تصویر به مرکــز O خط lرا به خط l' ، فصل مشترک σ و π' بدل می کند .(شکل ۶).



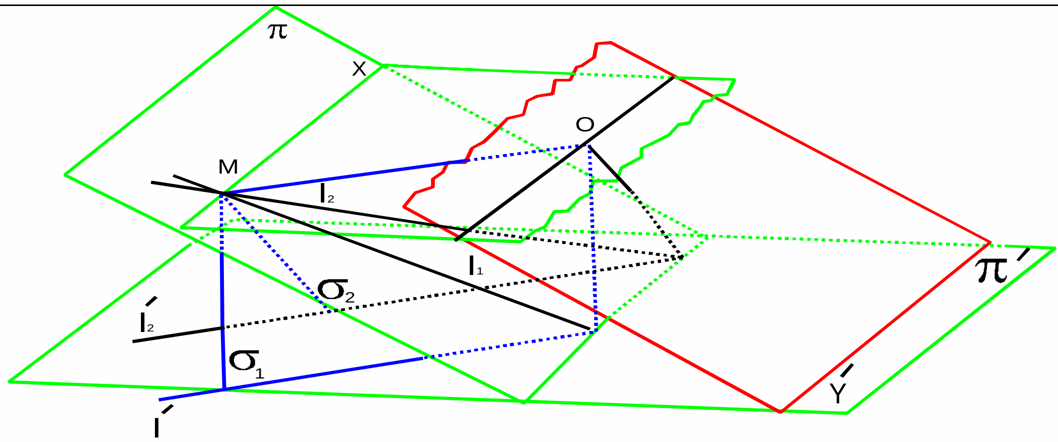
شکل۶

به عکس ، هر خط l' از صفحه π' (به استثنای خط خاص y') نگاره یک خط l از صفحه π است .

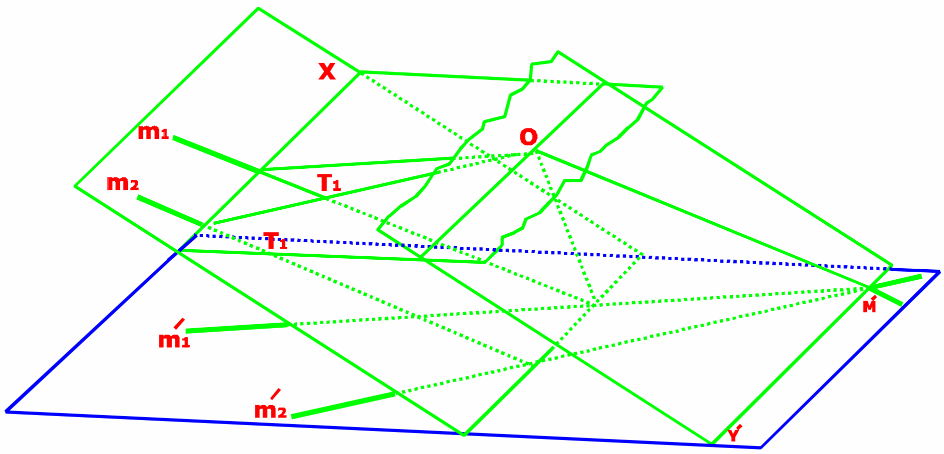
- **ویژگی ب**. گیریم که خط های l_1 و l_2 از صفحه π یکدیگر را در یک نقطه M روی خط خاص x ببرنـد . در این حالت نگاره آنها بر اثر یک تصویر مرکزی ، دو خط موازی l'_1 و l'_2 از π' خواهد شد .

زیرا در این حالت صفحات σ_1 و σ_2 که از نقطه O و خط های l_1 و l_2 تشکیل می شوند یکدیگر را در OM که مـوازی π' است می برند . از آنجا نتیجه می شود که l'_1 و l'_2 ، نگاره های l_1 و l_2، خط هایی موازی در صفحه π' هستند . (شکل ۷ الف) .

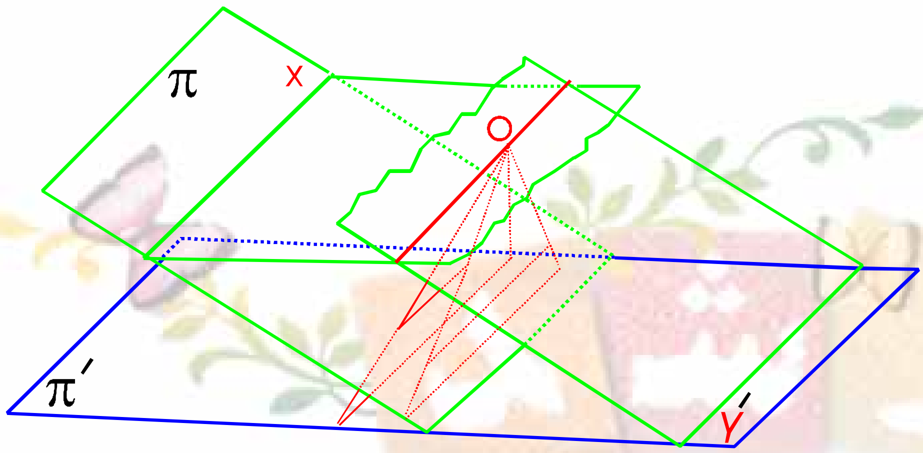
در تصویر مرکزی ، دو خط موازی m_1 و m_2 از π به دو خط متقاطع m'_1 و m'_2 از π' بدل می شوند کـه نقطـه تلاقـی آنها M' ، بر خط خاص y' واقع است . این نکته از این واقعیت تشکیل می شود که صفحات T_1 و T_2 که بـه ترتیـب از O و خط های m_1 و m_2 تشکیل می شوند یکدیگر را در خط OM' قطع می کنند که با π موازی اسـت و π' را در یـک نقطـه M' واقع بر خط خاص y' تلاقی می کند (شکل ۷ب) . استثنا بر این قاعده خط های موازی با x هستند ؛ این خطها بر خـط های موازی با y' نگاشته می شوند (شکل۸).



شکل ۷(الف)



شکل ۷(ب)



شکل ۸

۱.

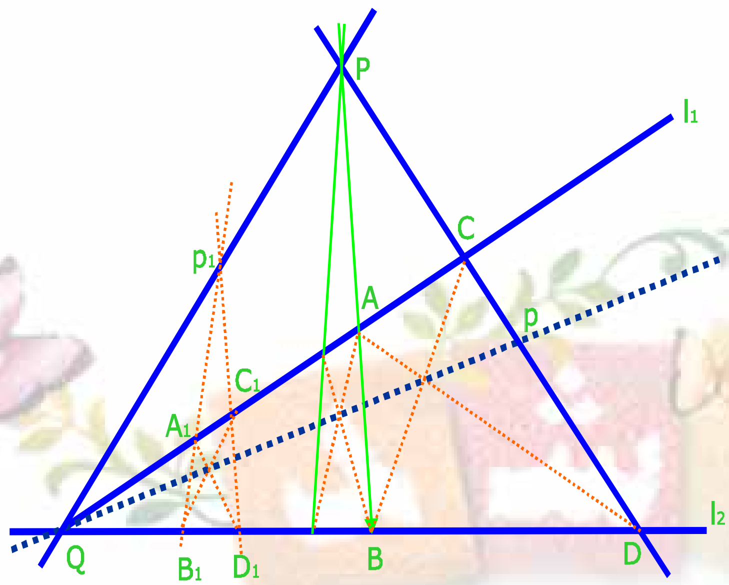
الف. در یک صفحه ، دو خط l_1 و l_2 یک نقطه P ناواقع بر هیچ یک از آنها داده شده اند . از P دو خط می‌گذرانیم که یکی از آنها l_1 و l_2 را در نقطه های A و B ببرد و دیگری آنها را در نقاط C و D (شکل ۹الف) . نشان دهید که

I . مکان هندسی نقطه تلاقی AD و BC (به ازای کلیه جفت خط هایی که از P می گذرند) یک خط P است .

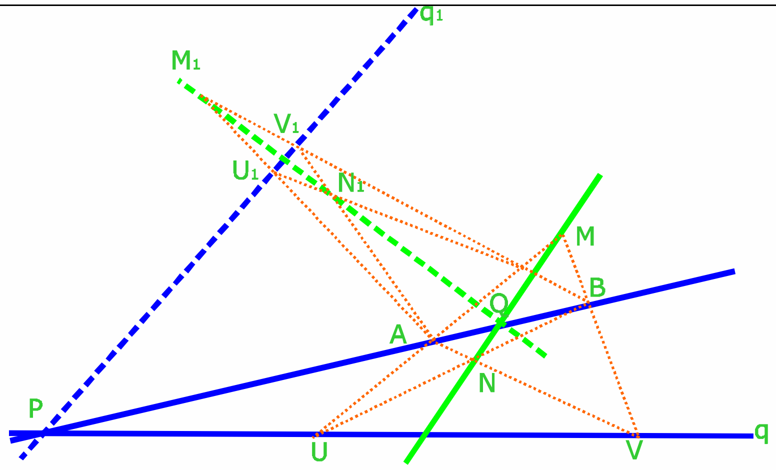
II . به ازای l_1 ناموازی با l_2، خط P ازنقطه Q ، محل تلاقی l_1 و l_2 ، می گذرد ، و

III . P تغییر نمی کند هرگاه به جای P یک نقطه P_1 از خط PQ را قرار دهیم .

ب. خط q و دو نقطه A و B ناواقع بر q در یک صفحه داده شده اند . فرض می کنیم U و V دو نقطه بر q ، M نقطه تلاقی خط های UA و VB ، و N نقطه تلاقی خط های UB و VA باشد (شکل ۹ ب) . به ازای هر انتخاب نقاط U و V بر q ، یک خط MN پدید می آید.نشان دهید که همه این خط ها در یک نقطه Q واقع بر خط AB متقاطع اند ؛ هم چنین نشان دهید که هر گاه به جای q یک خط q_1 قرار دهیم که بر P، نقطه تلاقی q و AB ، بگذرد نقطه Q عوض نمی شود .



شکل۹(الف)

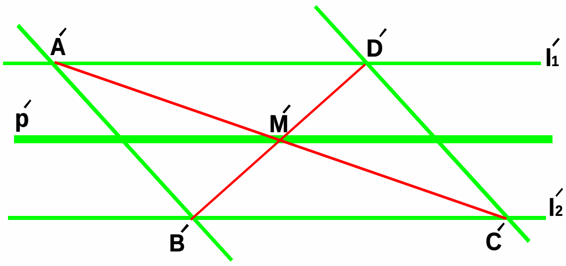


شکل۹(ب)

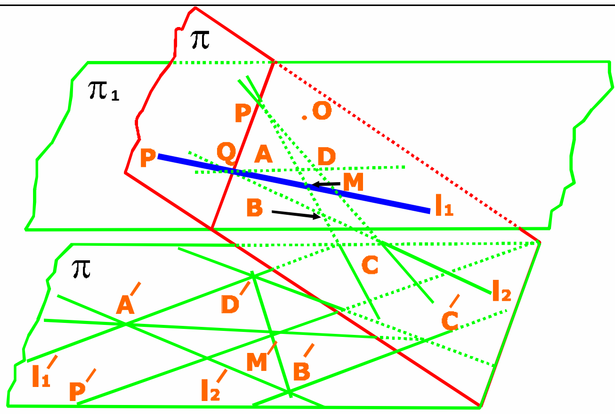
حل.

الف. فرض می کنیم Q نقطه تلاقی خط های l_1 و l_2 باشد . صفحه π ی شکل ۹ الف را بـر یـک صـفحه π' تـصویر می‌کنیم به طوری که PQ خط خاص صفحه π باشد . برای این کار کافی است بر QP صفحه دلخـواهی ماننـد π_1 ، غیـر از π بگذرانیم و π رااز یک نقطه O ی π_1 بر یک صفحه π' موازی π_1 تصویر کنیم (← شکل۱۰ الف) . در این صورت شـکل ۹الف (در صفحه π) به شکل ۱۰ ب (در صفحه π') بدل می شود و مکان نقطه های M ، نقطــه برخــورد خــط هــای AC و BD ، به یک خط P' موازی با l'_1 و l'_2 متساوی الفاصله از آن دو بدل می شود . از ویژگی (الـف) تـصویر مرکـزی نتیجـه می‌شود که مکان نقطه های M یک خط است .

اگر $l_1 \| l_2$ ، آنگاه از راه تصویر صفحه π بر صفحه π' بر یک صفحه زمانی به شکل ۱۰ ب می رسیم ، که خط مـار بـر P موازی l_1 و l_2 خط خاص π باشد .



شکل۱۰(ب)



شکل۱۰(الف)

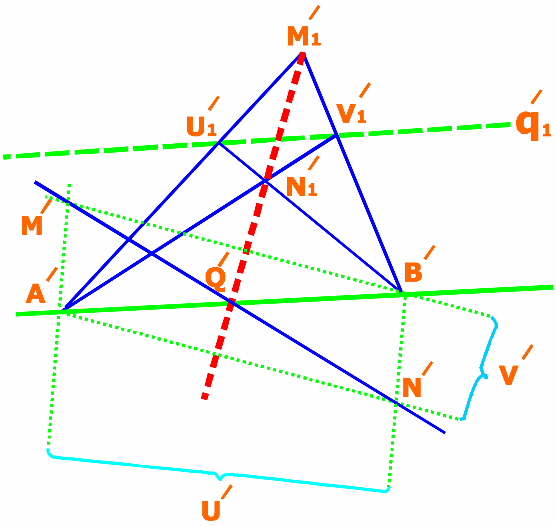
از ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی بلافاصله نتیجه می شود که هرگاه l_1 و l_2 در یک نقطه Q متقاطع باشند ، آنگاه P از Q می گذرد و اگر $l_1\|l_2$ ، آنگاه P با l_1 و l_2 موازی است .

و اگر P_1 نقطه دلخواهی از خط PQ باشد آنگاه ، بر اثر تصویر مرکزی ما، خط های متقاطع در P_1 به خط های موازی بدل می شوند و مکان نقطه های M_1 ، محل تلاقی خط های A_1C_1 و B_1D_1 ، به خط P' بدل می شود . از این جا نتیجه می‌شود که مکان نقطه های M_1 بر P منطبق است . (هم چنین اگر $l_1\|l_2$ و بنابراین $PP_1\|l_1$ ، آنگاه P و P_1 همان خط P را مشخص می کنند.)

ب. صفحه π ی شکل ۹ ب را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که خط q خط خاص π باشد . در این صورت خط های UA و UB ، VA و VB به خط های موازی بدل می شوند (شکل۱۱)؛ خط MN به قطر $M'N'$ از متوازی الاضلاع $M'A'N'B'$ بدل می شود و قطر دیگر $A'B'$ را در Q' نصف می کند . بنابراین ، به ازای هر انتخاب U و V ، خط MN به یک خط $M'N'$ بدل می شود که $A'B'$ را در همان نقطه Q' می برد؛ از آنجا نتیجه می شود که همه خط های MN ، خط AB را در یک نقطه Q می برند .

حال فرض می کنیم q_1 خط دیگری باشد که AB را در نقطه P ببرد. بر اثر تصویر ما ، q_1 به یک خط q_1' موازی

با $A'B'$ ، چهار ضلعی ABV_1U_1 به ذوزنقه $A'B'V_1'U_1'$ ، و خط M_1N_1 به خط $M_1'N_1'$ ، واصل بین نقطه تلاقی قطرها و نقطه تلاقی اضلاع مقابل ذوزنقه ، بدل می شوند (شکل۱۱) . اما در این صورت $M_1'N_1'$ قاعده $A'B'$ از ذوزنقه را در نقطه Q' وسط آن خواهد برید که دومین حکم مسئله ما را ایجاب می کند .



شکل۱۱

۲.

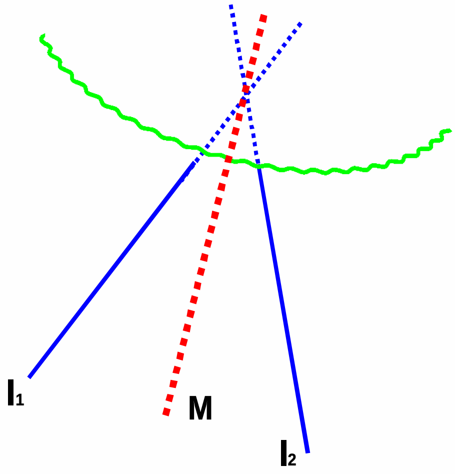
الف. M نقطه ای در یک صفحه و l_1 و l_2 دو خط در آن صفحه اند که در یک نقطه غیر قابل دسترسی یکدیگر را می برند. با استفاده از ستاره تنها، از نقطه M خطی رسم کنید که از نقطه تلاقی l_1 و l_2 بگذرد (شکل۱۲الف).

ب. یک خط غیرقابل دسترس l در یک صفحه به وسیله دو جفت خط P_1 و P_2 ، q_1 و q_2 که در نقطه های P و Q واقع بر l یکدیگر را می برند مشخص شده است (شکل ۱۲ ب). فرض می کنیم m و M به ترتیب خط و نقطه ای مفروض باشند . با استفاده از ستاره تنها، از M خطی رسم کنید که از نقطه تلاقی m و l بگذرد .

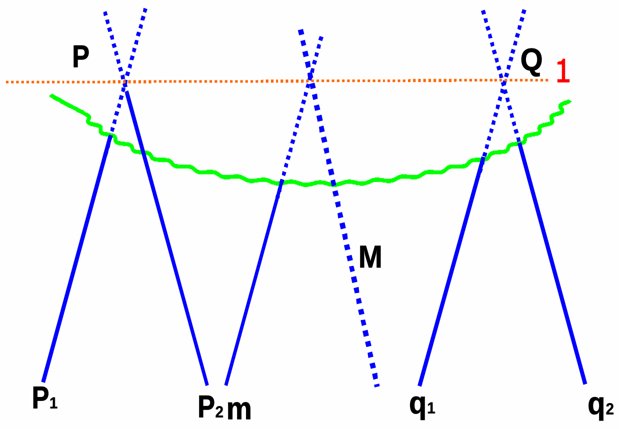
ج. با استفاده از ستاره تنها خطی مانند l رسم کنید که از دو نقطه غیر قابل دسترس P و Q که به وسیله دو

جفت خط P_1 و P_2 ، q_1 و q_2 مشخص شده اند بگذرد (شکل ۱۲ج) .

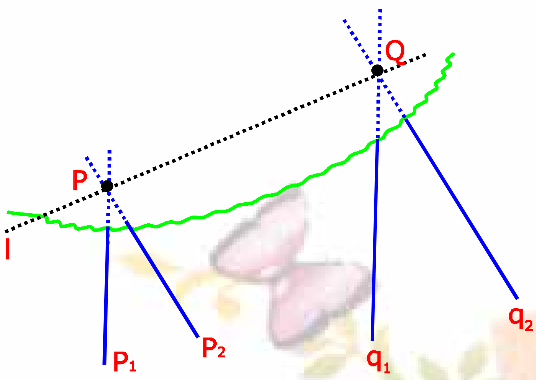
د. هر یک از دو خط غیر قابل دسترس l_1 و l_2 در یک صفحه (شکل ۱۲د) به وسیله دو جفت خط ، به گونه خط l در مسئله ۲(ب) مذکور در بالا ، مشخص شده است . با استفاده از ستاره تنها، از یک نقطه مفروض M خطی رسم کنید که از نقطه L ،محل تلاقی l_1 و l_2 ، بگذرد.



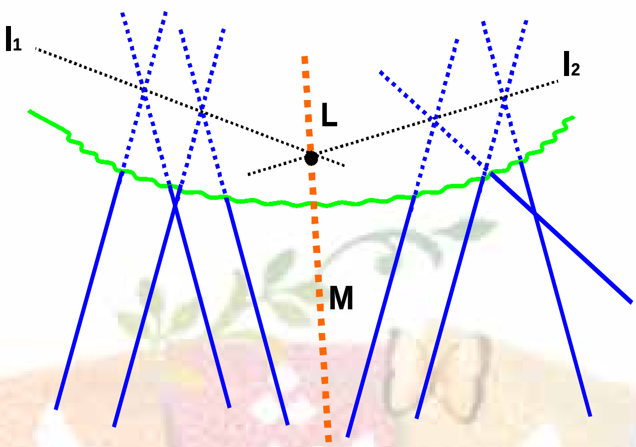
شکل ۱۲(الف)



شکل ۱۲(ب)



شکل ۱۲ (ج)

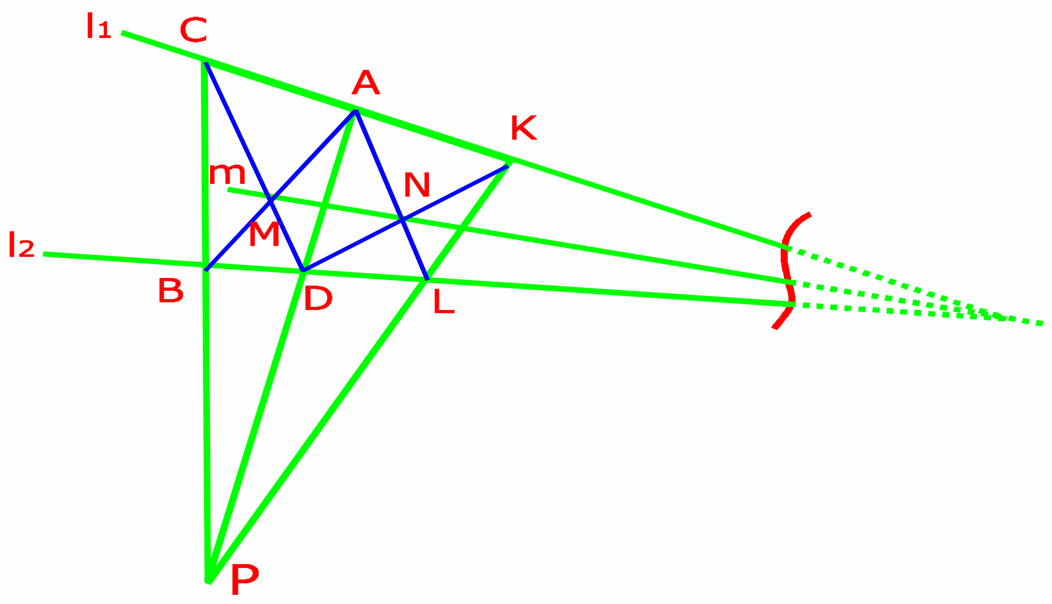


شکل ۱۲ (د)

حل.

الف.از نقطه M یک جفت خط رسم می کنیم که l_1 و l_2 را در نقطه های A و C، و B و D (شـکل ۱۳) ببرنـد .

سپس از P نقطه تلاقی خط های AD و BC ، خطی مرور می دهیم که خط های l_1 و l_2 را به ترتیب در K و L ببرد. از قضیه مساله ۱ نتیجه می شود که خط m ، واصل بین M و نقطـه تلاقـی AL و DK، از نقطـه برخورد l_1 و l_2 می گذرد .



شکل ۱۳

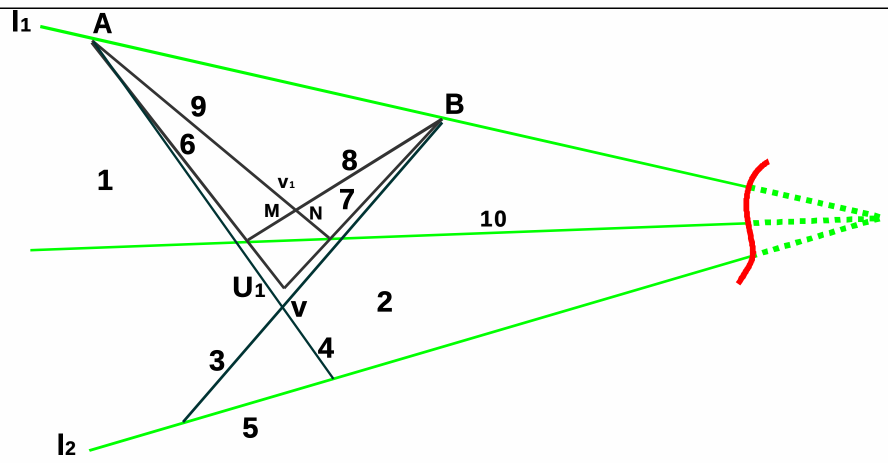
یادداشت ۱ . اشاره به این نکته که اگر $l_1 \| l_2$ (پس نقطه تلاقی آنها غیر قابل وصول است ، بدین معنی است که وجود ندارد) ، آنگاه ترسیم ما به رسم خطی به موازات دو خط مفروض از نقطه مفروض M با استفاده از ستاره تنها ، بدل می شود که مورد توجه ما نیست . این اتفاقی ، نیست ، بلکه نتیجه ویژگی های تصویر مرکزی است. باز ترسیم های مـسائل ۲ (ب)-(د) روش هایی برای رسم خط های موازی با استفاده از ستاره تنها در اختیار ما قـرار مـی دهنـد . بـه خواننـدگان توصـیه می‌کنیم که این ترسیم ها را انجام دهند .

یادداشت ۲ . راه حل بالا برای مسئله ۲(الف) ، که مبتنی بر قضیه مسئله ۱(الف) بود ، تنها راه حل ممکن نیست . یک راه حل برا ساس قضیه مسئله ۱(ب) در شکل ۱۴ الف مطرح شده است .(در اینجا خط های l_2 و MN ، خط l_1 را در یک نقطه می برند ؛ اعدادی که پهلوی خطها گذاشته شده اند ترتیب ترسیم خط ها را نشان می دهند .) شکل ۱۴ ب معرف راه حلی است بر اساس قضیه مسئله ۶. (مثلث های ABM و $A_1B_1M_1$ مثلثهای منظری هستند . تصادفاً ترسیم ما به کمک قضیه دزارگ نیز اثبات می شود . زیرا مثلث های CDK و BAL در شکل ۱۳ تصویر منظری هستند.)شکل ۱۴ج معرف ترسیمی است بر اساس قضیه ای (راس های شش ضلعی $ABCDEF$ یک در میان بر خط های m_1 و m_2 قرار دارند) . این ترسیم نیز می تواند به وسیله قضیه ای اثبات می شود (اضلاع شش ضلعی $ABCDEF$ یک در میان از نقطه های F و C می گذرند) . راه حل های دیگری هم برای مسئله ۲(الف) وجود دارد . هم چنین درستی ترسیمی که در بالا ذکر شد از راه های زیادی اثبات می شود .

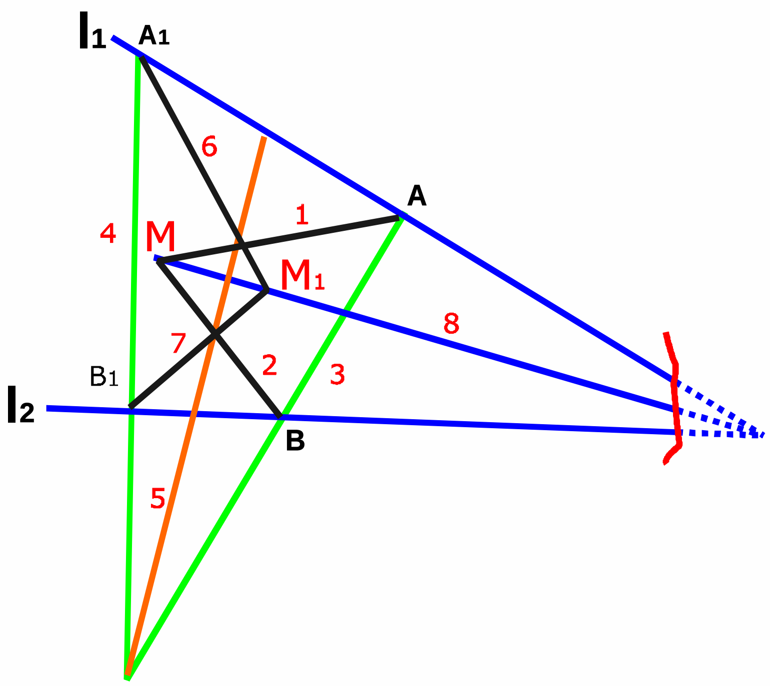
هم چنین ، راه حل های مسائل ۲(ب) – (د) ، و ۳ و ۴ که در زیر داده شده اند ، تنها راه های ممکن نیستند . توصیه می کنیم که خواننده سعی کند راه های ترسیم دیگری بیابد .

ب. یک راه ترسیم ممکن : نقطه M و دو نقطه اختیاری A و B واقع بر m را به نقطه های نادسترس P و Q وصل می کنیم (← راه حل قسمت (الف)) . خط های AP و BQ در نقطه C ، خط های AQ و BP در D ، خط های MQ و CD

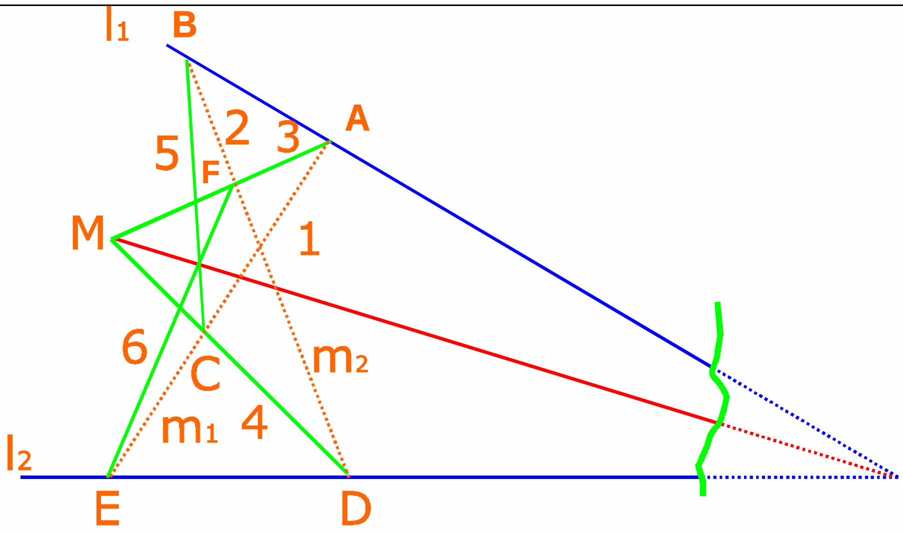
در E، و خط های MP و CD در نقطه F برخورد می کنند (شکل ۱۵) . E را به P و F را به Q وصل و فرض می کنیم N نقطه تلاقی FQ و EP باشد . از قضیه مسئله ۱ (ب) نتیجه می شود که خط های MN و PQ و m در یک نقطه X متقاطع اند (در شکل ۱۵، C و D ، E و F دو جفت نقطه از یک خط اند).



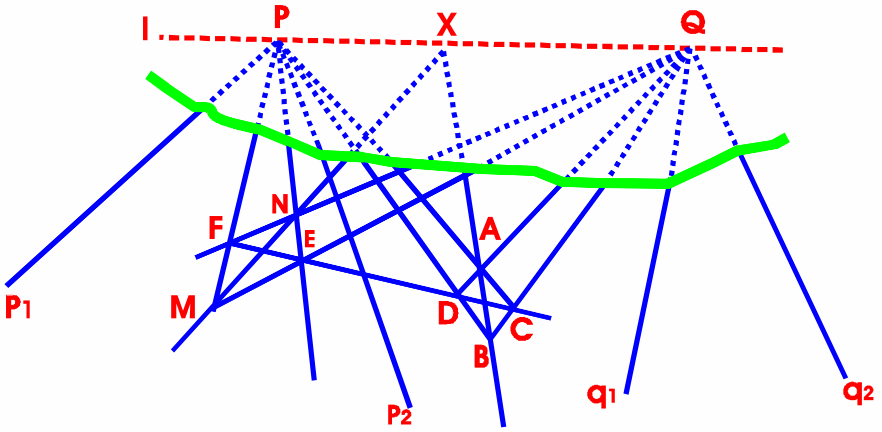
شکل۱۴(الف)



شکل۱۴(ب)

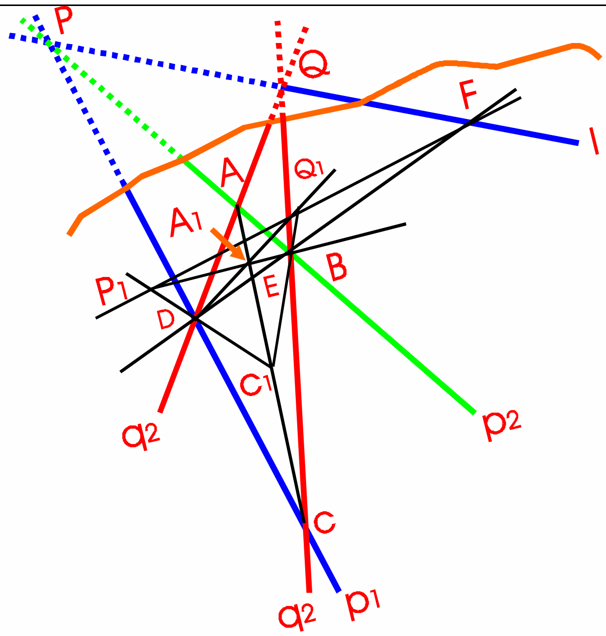


شکل۱۴(ج)



شکل۱۵

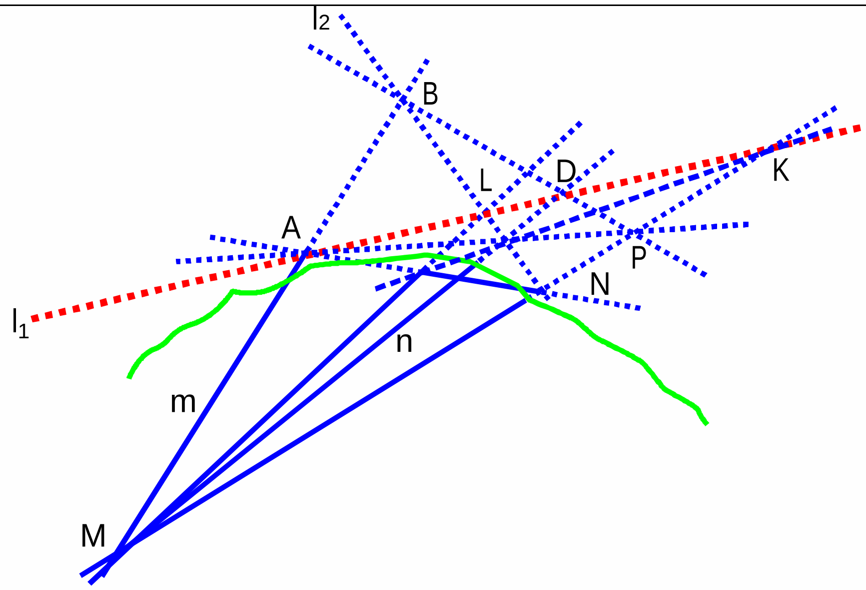
ج. یک راه ترسیم ممکن : فرض می کنیم خط های P_1 و P_2 ، q_1 و q_2 در نقاط A و B و C و D یکدیگر رابرند (شکل ۱۶) . (اگراین خط ها در محدوده صفحه رسم متقاطع نباشند ، می توانیم به جای آنها خط هایی بگذاریم که از نقطه های P و Q بگذرند ؛ مسئله ۲(الف)). بر خط AC)) یا بر هر خط دیگر که BD را در همان نقطه E ببرد.)



شکل۱۶

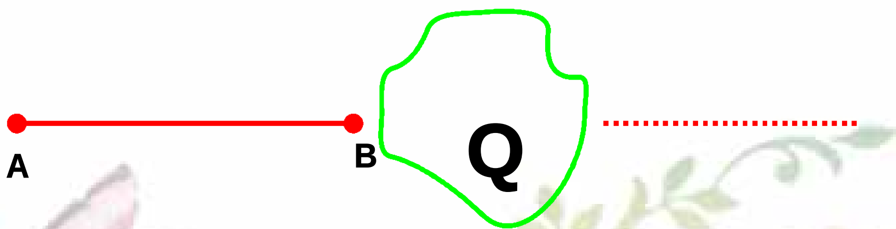
دو نقطه A_1 و C_1 را چنان انتخاب می کنیم که خط های A_1B و C_1D ، A_1D و C_1B در حدود صفحه رسم در نقطه های P_1 و Q_1 یکدیگر را ببرند . به موجب قضیه مسئله۱ (ب) خط P_1Q_1 از F ، نقطه تلاقی BD و PQ می گذرد . مانده است که F را به نقطه نادسترس P وصل کنیم (← مسئله ۲(الف)) .

د. یک راه ترسیم ممکن : فرض می کنیم m و n دو خط دلخواه مار بر نقطه M باشند (شکل۱۷) . می دانیم که چگونه باید از نقطه های نادسترس A و B و C و D ، محل تلاقی l_1 و l_2 با m و n ، خط هایی رسم کنیم (مسئله ۲ب) هم چنین می دانیم که چگونه A را به C و B را به D وصل کنیم (مسئله ۲ ج) . حال M را به P ، نقطه تلاقی AC و BD ، وصل (مسئله ۲ (الف)) و فرض می کنیم MP خط های l_1 و l_2 را در K و N ببرد. به موجب قضیه مسئله ۱(الف) ، نقطه تلاقی خط های KC و NA (که می توان آنها را پیدا کرد ؛ مسائل ۲(ب) و (ج)) بر خط مطلوب واقع است .



شکل۱۷

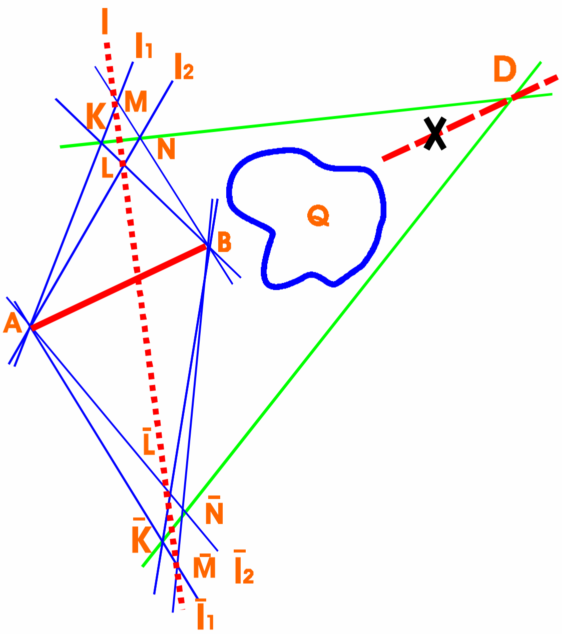
۳. پاره خط AB و یک ناحیه Q هم صفحه با آن را در نظر می گیریم (شکل۱۸) با استفاده از ستاره تنها چگونه می‌توانیم پاره خط AB را به سمت راست ناحیه Q امتداد دهیم بی آنکه خطی در درون Q رسم کنیم ؟ (تعبیر این مسئله چنین است : خطی را بر روی زمین به سوی دیگر جنگل ، مثلا به سمتی که از اینجا امتداد مفروض نمی تواند دیده شود ، امتداد دهید.)



شکل۱۸

حل. یک راه رسم ممکن : از A دو خط l_1 و l_2 را که از ناحیه Q نگذرند ، و از B دو خط که l_1 و l_2 را در نقطه های K و L ، M و N ببرند ، رسم می کنیم . خط ML را با l نشان می دهیم (شکل ۱۹) . بعد ، از A دو خط دیگر l_1

و l_2 مرور می دهیم که l را در نقطه های M و L ببرند . فرض می کنیم BL و BM خـط هـای l_1 و l_2 را در نقطـه هـای K و N ببرند . از قضیه مسئله ۱(ب) نتیجه می شود که D ، نقطه تلاقی خط های KN و KN ، بر خط AB قرار دارد . با تکـرار این روش نقطه دیگری از خط AB در طرف راست ناحیه Q پیدا می کنیم . با داشتن این دو نقطه امکان امتـدا دادن AB را در فراتر از ناحیه Q به دست می آوریم .



شکل۱۹

۴. دو نقطه A و B را در یک صفحه در نظر می گیریم . چگونه می توانیم آنها را با یک خط بـه هـم وصـل کنـیم در صورتی که فقط یک ستاره کوتاه تر از فاصله AB در دست داشته باشیم (شکل ۲۰) ؟

شکل۲۰

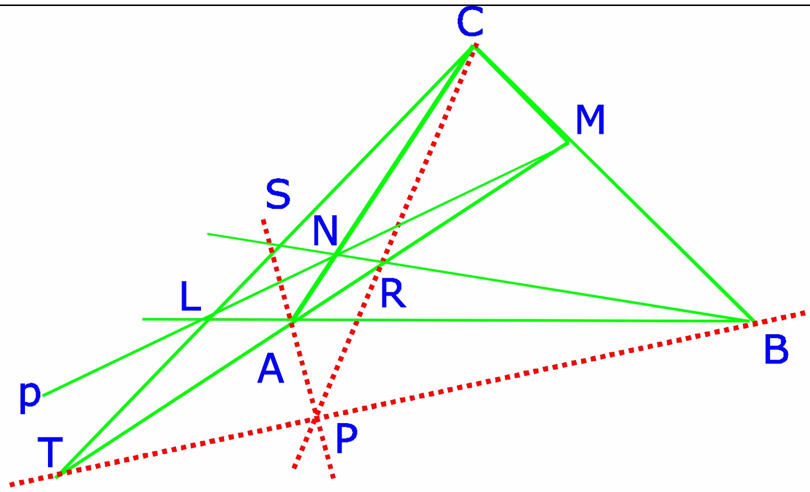
حل. یک راه حل ممکن : از نقطه A دو خط l_1 و l_2 رسم می کنیم که با هم زاویه کوچکی بسازند که B درون آن واقع شود . باید توجه داشت که کوتاهی ستاره مانع از این نیست که یک قطعه از یک خط را امتداد بدهیم . بعد ، دو خط از B می گذرانیم که l_1 و l_2 را در نقطه های K_1 و K_2 ، L_1 و L_2 قطع کنند . فرض می کنیم P نقطه تلاقی K_1L_1 و K_2L_2 باشد. حال از P تعدادی خط رسم می کنیم که l_1 و l_2 را در نقطه های K_3 و K_4 و .... و K_n ، L_3 و L_4 و ... و L_n قطع کنند (شکل۲۲).

قضیه مسئله ۱ (الف) ایجاب می کند که نقطه های تقاطع K_2L_3 و K_3L_2 ، K_3L_4 و K_4L_3 و ... بر خط AB واقع باشند . بدین طریق می توان نقاط نزدیک دلخواهی از خط AB را پیدا کرد که بتوانند با یک ستاره کوتاه به هم وصل شوند .

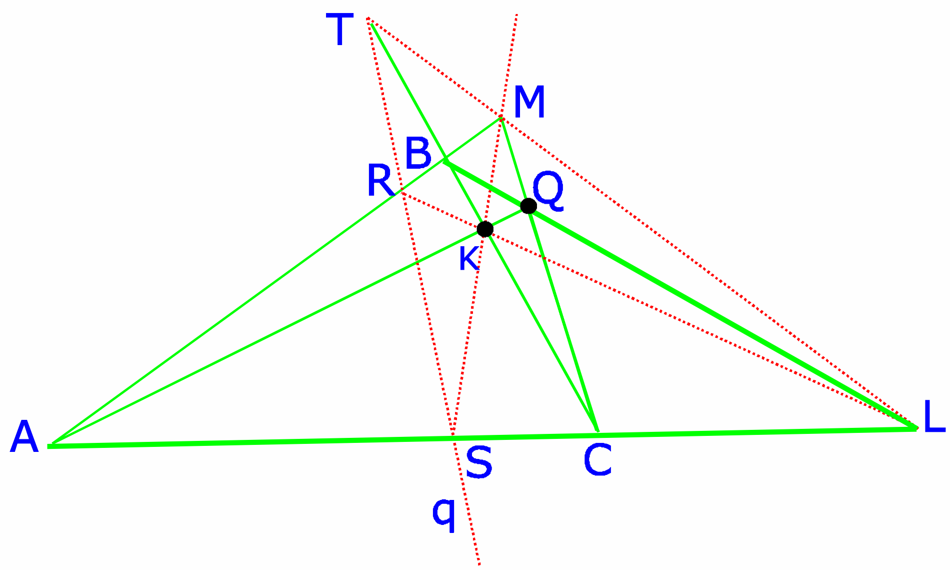
۵ .

الف. خط P اضلاع AB و BC و CA و از مثلث ABC (یا امتداد آنها)را در نقطه های L و M و N بریده است و مانند شکل ۲۱(الف) نقطه برخورد AM و BN را به R ، نقطه برخورد BN و CL را به S و نقطه برخورد AM و CL را به T نشان می دهیم . نشان دهید که خط های AS و BT و CR متقارب اند .

ب. مثلث ABC و یک نقطه Q مفروض اند . مانند شکل ۲۱(ب) ، نقطه های برخورد خط های QA و QB و QC را با اضلاع مثلث ABC (یا امتداد آنها) به K و L و M نشان می دهیم و نقطه های تلاقی جفت های خط های KL و AB ، KM و AC ، LM و BC را به R و S و T . نشان دهید که نقطه های R و S و T هم خط اند .



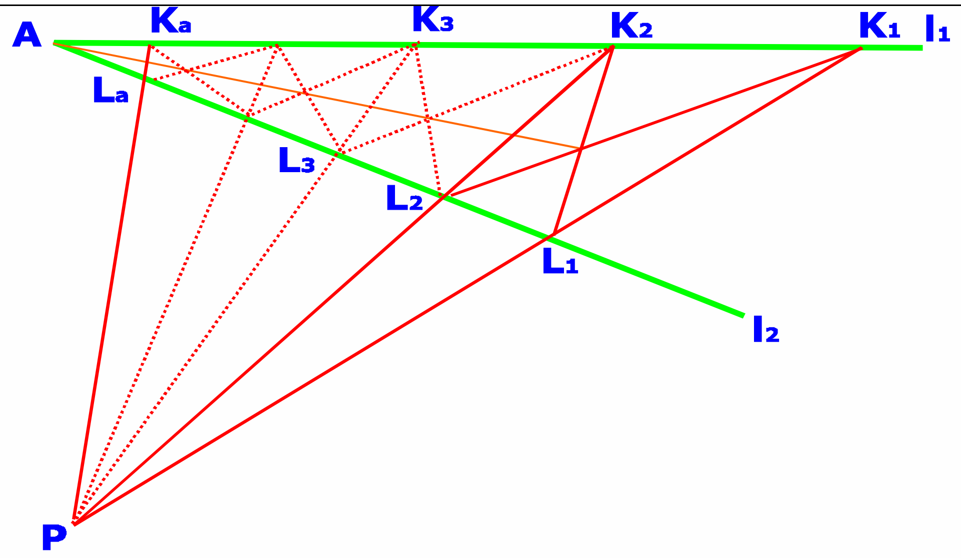
شکل۲۱(الف)



شکل۲۱(ب)

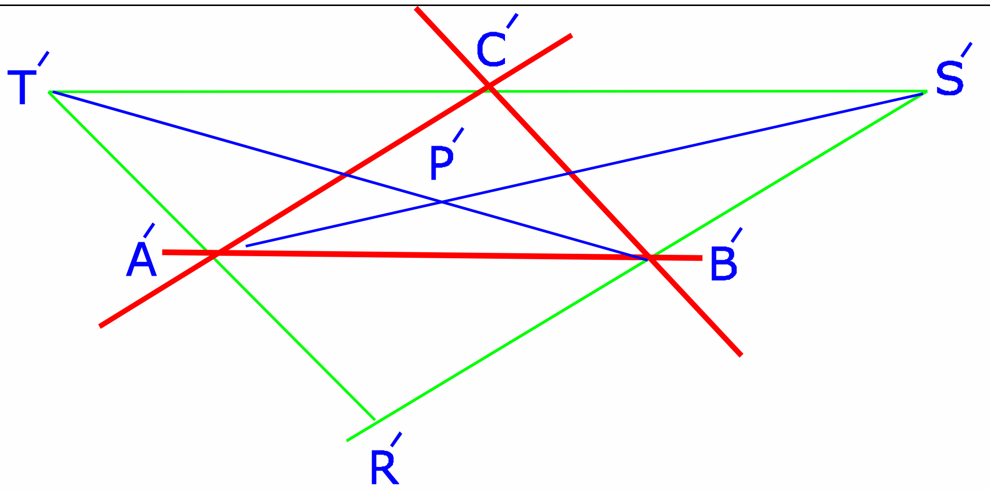
حل.

الف. با استفاده از یک تصویر مرکزی ، صفحه π ی (شکل ۲۱الف) را بر صفحه π' می نگاریم به طوری که P خط خاص π باشد.



شکل۲۲

در این صورت خط های AM و BC به خط هـای مـوازی $A'M'$ و $B'C'$ ، خـط هـای BN و AC بـه خـط هـای موازی $B'N'$ و $A'C'$ ،وخط های CL و AB به خط های موازی $C'L'$ و $A'B'$ بدل می شوند . خط های AS و BT و CR به میانه های $A'S'$ و $B'T'$ و $C'R'$ از مثلث $A'B'C'$ (شکل۲۳) بدل می شوند و لذا باید یکدیگر را در یک نقطه P' ببرند . از اینجا نتیجه می شود که AS و BT و CR در یک نقطه P یکدیگر را می برند .

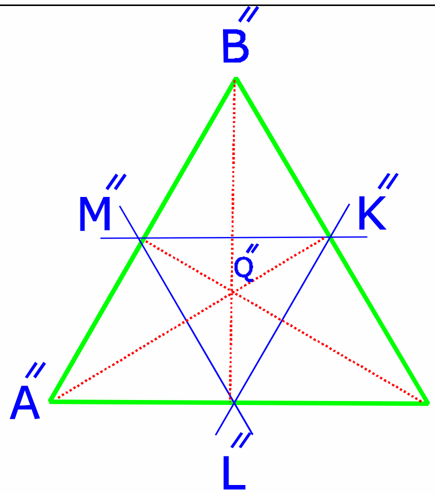


شکل۲۳

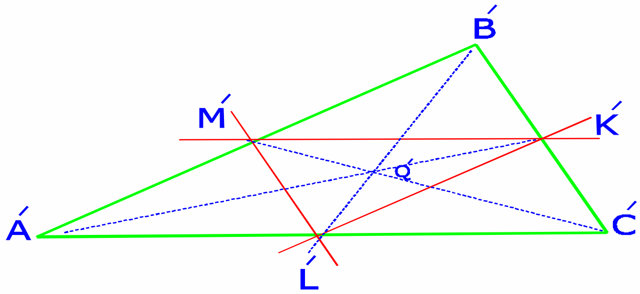
ب. با استفاده از یک تصویر مرکزی صفحه πی شکل ب را بر صفحه دیگر π' می نگاریم به طوری که RS خط خاص صفحه π شود . در π' داریم $K'L'\|A'B'$ و $K'M'\|A'C'$ (شکل ۲۴ الف) . حال از یک تصویر موازی استفاده می‌کنیم و $\Delta A'B'C'$ را بر یک مثلث متساوی الاضلاع $A''B''C''$ می نگاریم (شکل ۲۴ ب). در این صورت خط های $A''K''$ و $B''L''$ بر $C''D$ ، محور تقارن $\Delta A''B''C''$ یکدیگر را می برند . و خط های $A''K''$ و $C''M''$ بر $B''E$ محور تقارن مثلث ما متقاطع می شوند . از اینجا نتیجه می شود که Q'' ، نقطه تقاطع خط های $A''K''$ و $C''M''$ و $B''L''$ خط های نقطه تلاقی دو محور تقارن یعنی مرکز ثقل مثلث است ؛ و خط های $L''K''$ و $K''M''$ و $M''L''$ میان خط های مثلث اند . بنابراین $L''M''\|B''C''$.

ویژگی (ب) ی یک تصویر موازی ایجاب می کند که داشته باشیم $L'M'\|B'C'$.

به علاوه ویژگی (ب) ایجاب می کند که T ، نقطه تقاطع LM و BC ، نیز بر خط خاص صفحه π واقع باشد، یعنی R و S و T هم خط باشند .



شکل(ب)

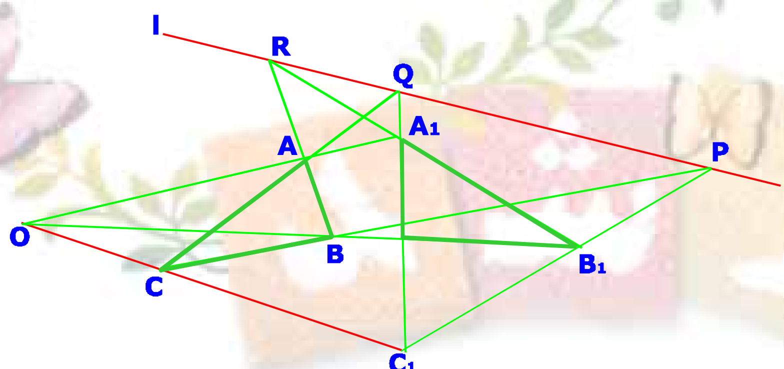


شکل۲۴(الف)

۶. چهار ضلعی $EFGH$ در چهار ضلعی $ABCD$ محاط شده است (E بر AB و F بر BC ، و غیره) . نشان دهید که اگر نقطه برخورد اضلاع EF و HG بر قطر AC ی $ABCD$ باشد ، نقطه برخورد EH و FG بر قطر BD ی آن است .

حل. حکم مسئله ما فقط شکل دیگر قضیه دزارگ است (مسئله ۷؛ ΔAEH و ΔCFG مثلث های منظری هستند.)

۷. قضیه دزارگ . ثابت کنید که هر گاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند که خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب باشند، آنگاه نقطه های برخورد خط های AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، هم خط اند (شکل۲۵) . به عکس ، اگر نقطه های برخورد AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 هم خط باشند ، آنگاه خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب اند .



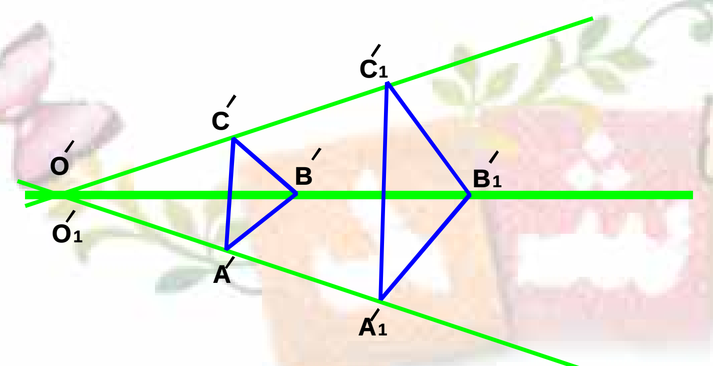
شکل۲۵

حل. اول ثابت می کنیم که هر گاه خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب باشند ، آنگاه P و Q و R ، نقطه های تلاقی خط های BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 ، AB و A_1B_1 ، هم خط اند . برای اثبات این مطلب ، صفحه π ی شکل ۲۵ را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که QR خط خاص π باشد . در این صورت به موجب ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی داریم $A'B'\|A_1'B_1'$ و $A'C'\|A_1'C_1'$. از $C'A'\|C_1'A_1'$ نتیجه می گیریم که $O'C'/O'C_1' = O'A'/O'A_1'$ و از $A'B'\|A_1'B_1'$ نتیجه می گیریم $O'A'/O'A_1' = O'B'/O'B_1'$ ؛ یعنی $O'B'/O'B_1' = O'C'/O'C_1'$. بنابراین خط های $B'C'$ و $B_1'C_1'$ موازی اند و P ، نقطه تقاطع BC و B_1C_1 بر خط خاص صفحه π قرار دارد ، یعنی نقطه های P و Q و R هم خط اند .

حال عکس آن را ثابت می کنیم . بدین منظور صفحه π ی شکل ۲۵ را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم چنانکه خطی که شامل P و Q و R است خط خاص π باشد بر اثر این تصویر مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ به مثلث های متشابه $A'B'C'$ و $A_1'B_1'C_1'$ که اضلاع متناظرشان موازی اند بدل می شوند(شکل۲۶) . فرض می کنیم O' نقطه تلاقی $A'A_1'$ و $B'B_1'$ باشد و O_1' نقطه تلاقی $A'A_1'$ و $C'C_1'$. داریم $O'A'/O'A_1' = A'B'/A_1'B_1'$ و $O_1'A'/O_1'A_1' = A'C'/A_1'C_1'$. از سوی دیگر از تشابه مثلثهای $A'B'C'$ و $A_1'B_1'C_1'$ نتیجه می گیریم که

$$A'B'/A_1'B_1' = A'C'/A_1'C_1'$$

بنابراین $O'A'/O'A_1' = O_1'A'/O_1'A_1'$ ؛ یعنی دو نقطه O' و O_1' بر هم منطبق اند . چون خط های $A'A_1'$ و $B'B_1'$ و $C'C_1'$ متقارب اند ، پس خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 نیز متقارب اند .



شکل ۲۶

۸.

الف. مثلث ABC و سه نقطه هم خط P و Q و R داده شده اند . در این مثلث یک مثلث XYZ چنان محاط کنید که اضلاعش به ترتیب از نقطه های P و Q و R بگذرند .

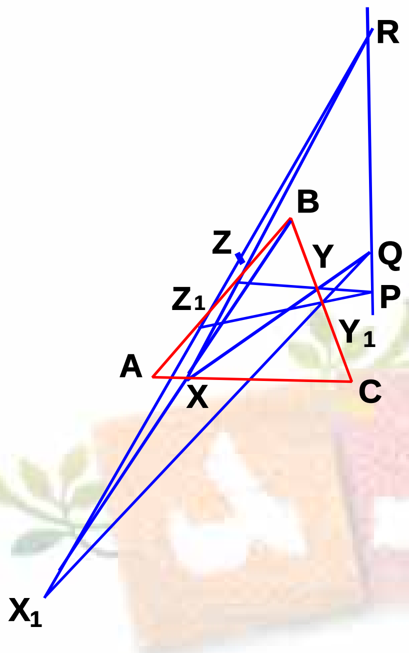
ب. در یک n ضلعی $A_1A_2...A_n$ ، n ضلعی دیگری محاط کنید که اضلاعش از n نقطه هم خط مفروض بگذرند .

ج. سه خط متقارب l_1 و l_2 و l_3 سه نقطه A و B و C در یک صفحه داده شده اند . مثلثی مانند XYZ چنان رسم کنید که اضلاعش از نقطه های A و B و C بگذرند و راسهایش بر خط های l_1 و l_2 و l_3 واقع باشند .

حل.

الف. از P خطی رسم می کنیم و نقطه های تقاطعش را با اضلاع AB و BC ی ΔABC به Z_1 و Y_1 نشان می دهیم ، و نقطه برخورد خط های QY_1 و RZ_1 را به X_1 (شکل ۲۷ الف) .

اکنون فرض می کنیم که مسئله ما حل شده باشد ، یعنی مثلث مطلوب XYZ رسم شده باشد ، یادآوری می‌کنیم که در این حالت $\Delta X_1Y_1Z_1$ و ΔXYZ مثلث های منظری هستند

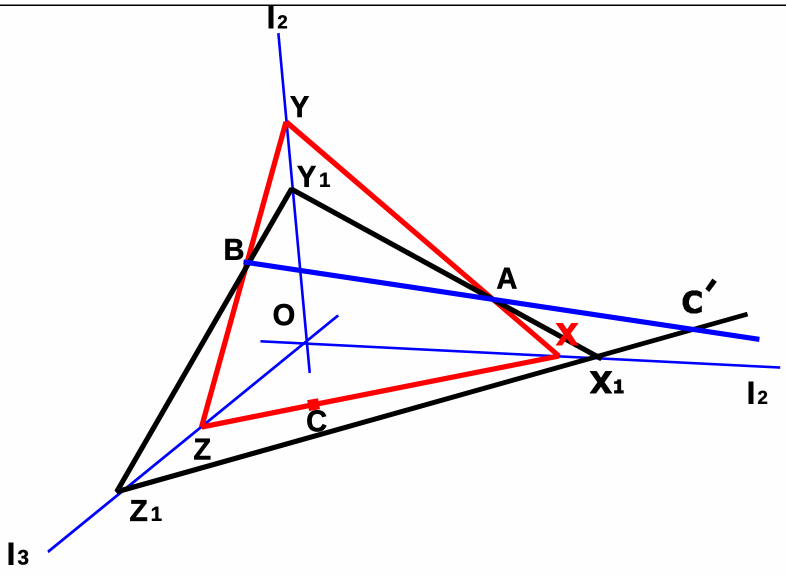


شکل ۲۷(الف)

(P و Q و R نقطه های تلاقی اضلاع دو مثلث ، هم خط انـد .) از اینجـا نتیجـه مـی شـود کـه خـط هـای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 در یک نقطه متقارب اند (← مسئله ۷) و B نقطه تقارب آنهاست . از وصل B به X_1 و پیدا کردن نقطه تلاقی BX_1 و AC ، راس X از مثلث مطلوب را به دست می آوریم . اکنون پیدا کردن بقیه راس ها دیگر اشکالی ندارد .

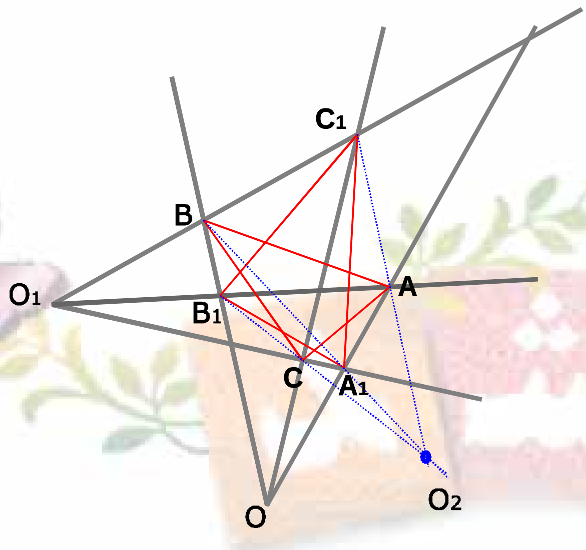
ب. ابتدا ثابت می کنیم که اگر یک n ضلعی چنان تغییر کند که اضلاعش از n نقطه ثابت واقع بـر یـک خـط l بگذرند و $(n-1)$ راس آن بر $(n-1)$ خط مفروض حرکت کنند، آنگاه مکان راس n ام آن یک خـط اسـت . برای اثبات این مطلب ، شکل خود را بر یک صفحه جدید π' تصویر می کنیم به طوری که l خـط خـاص π باشد ، (← مثلا ، راه حل مسئله ۱ (الف)) .

ج. از A خطی مرور می دهیم که خط های l_1 و l_2 را به ترتیب در نقطه های X_1 و Y_1 ببرد. Z_1 ، نقطـه تلاقـی خط های Y_1B و l_3 ، را به X_1 وصل می کنیم . حال فرض می کنیم که مسئله حل شده ، یعنی ΔXYZ رسم شده باشد (شکل ۲۷ ب) . چون خـط هـای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 در O متقـارب انـد ، مثلـث هـای XYZ و $X_1Y_1Z_1$ مثلث های منظری می شوند ، و نقطه های تلاقی خـط هـای X_1Y_1 و XY (یعنـی ، نقطـه A) ، Y_1Z_1 و YZ (یعنی نقطه B) ، Z_1X_1 و ZX هم خط اند . حال می توانیم به آسانی C' ، نقطـه تلاقـی ZX و Z_1X_1 ، را پیدا کنیم ، زیرا بر نقطه تلاقی خط های Z_1X_1 و AB منطبق است . ضلع ZX از مثلث مطلوب بر خط واصل بین نقطه های C و C' واقع است .



شکل ۲۷(ب)

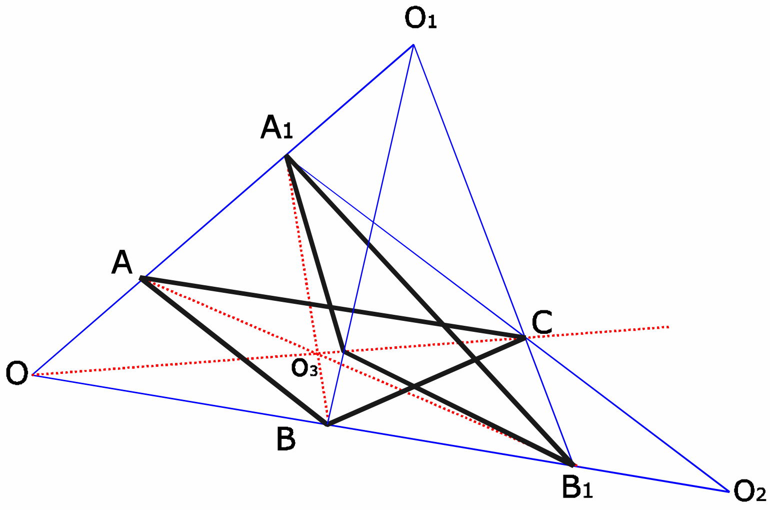
۹. قضیه درباره مثلث های منظری دو گانه . مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ چنان داده شده اند که خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 یکدیگر را در یک نقطه O می برند و خط های AB_1 و BC_1 و CA_1 در یک نقطه O_1 (شکل ۲۸) . ثابت کنید که خط های AC_1 و BA_1 و CB_1 نیز یکدیگر را در یک نقطه O_2 می بند؛ به عبارت دیگر دو مثلث منظری دوگانه (به تعبیر حکم مسئله ما) در واقع منظری سه گانه اند .



شکل ۲۸

حل. تفاوت این قضیه با قضیه مسئله ۶ فقط در شکل بیان است ؛ نقطه های C و B_1 و نقطه O_2 ، محل تلاقـی A_1B و AC_1 ، نقطه های تلاقی قطرهای چهار ضلعی های $A_1OO_1C_1$ و OO_1BA و A_1C_1BA هستند.

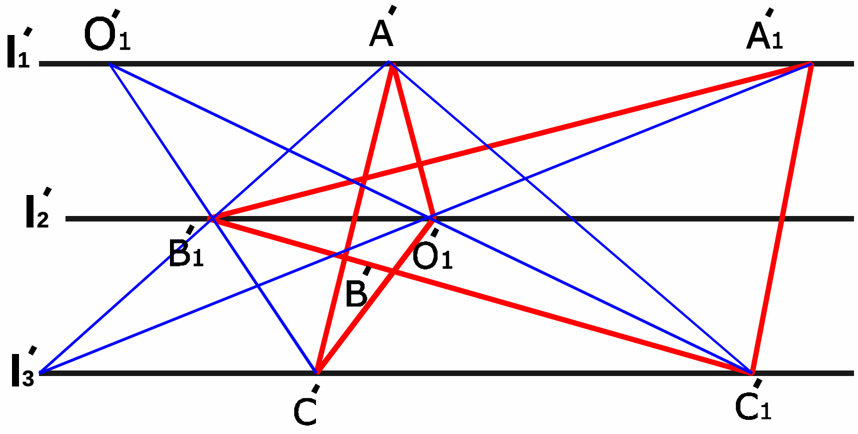
۱۰. قضیه در باب مثلث های منظری سه گانه . فرض می کنیم مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ چنـان باشـند کـه AA_1 و BB_1 و CC_1 در نقطه O، خط های AA_1 و BC_1 و CB_1 در O_1 وخط های AC_1 و BB_1 و CA_1 در نقطه O_2 یکدیگر رابربرند . (شکل ۲۹.) ثابت کنید که خط های AB_1 و BA_1 و CC_1 نیز در یک نقطه O_3 متقارب انـد (بـه عبـارت دیگـر ، دو مثلـث منظری سه گانه ، به تعبیر مسئله ما الزاماً منظری چهارگانه اند .)



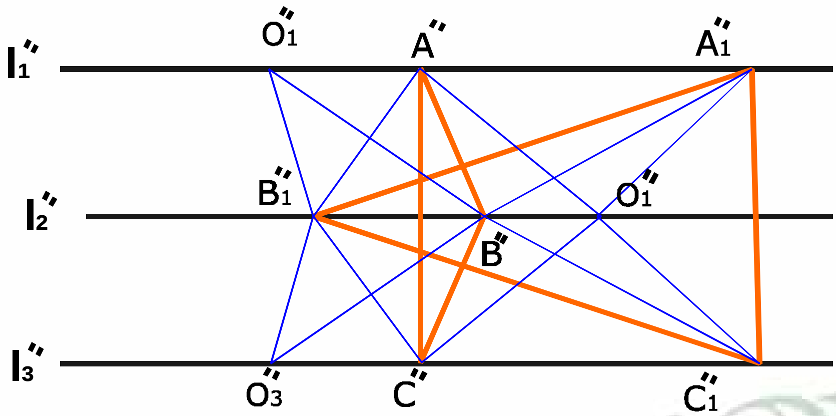
شکل۲۹

حل. از تصویر مرکزی استفاده می کنیم تا نگاشت صفحه π ی شکل ۲۹ را بر یک صفحه π' به دست آوریم به طوری که خط خاص π خط واصل بین O ونقطه تلاقی AC و A_1C_1 باشد . به وسیله این نگاشت ، مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ بـه مثلث های $A'B'C'$ و $A_1'B_1'C_1'$ بدل می شوند با $A'A_1'\|B'B_1'\|C'C_1'$ و $A'C'\|A_1'C_1'$. خـط هـای $A'A_1'$ و $B'C_1'$ و $C'B_1'$ در یک نقطه O_1' متقارب اند و خـط هـای $A'C_1'$ و $B'B_1'$ و $C'A_1'$ در نقطـه O_2' (شـکل ۳۰ الـف) . خـط هـای مـوازی $A'A_1'$ و

$B'B'_1$ و $C'C'_1$ را به l'_1 و l'_2 و l'_3 نشان می دهیم . چون $A'C'_1$ و $C'A'_1$ قطرهای متوازی الاضلاع $A'C'A'_1C'_1$ هستند ، و چون $B'B'_1$ از نقطه تلاقی این قطرها می گذرد ، نتیجه می گیریم که خط $B'B'_1$ (یعنی l'_2) از l'_1 و l'_3 هم فاصله است . باید نشان دهیم که $A'B'_1$ و $B'A'_1$ و $C'C'_1$ متقارب اند . نتیجه آن این است که AB_1 و BA_1 و CC_1 متقارب اند.



شکل۳۰(الف)



شکل۳۰(ب)

حال از یک تصویر موازی برای نگاشت صفحه π' بر یک صفحه π'' استفاده می کنیم تا $\Delta A'C'C'_1$ را به یک مثلث قائم الزاویه $A''C''C''_1$ بدل کنیم . در این صورت شکل ۳۰ الف به شکل ۳۰ ب بدل می شود که l''_2 محور تقارن شکل شده

است. از اینجا نتیجه می شود که خط های $A''B_1''$ و $B''A_1''$ در نقطه O_3'' واقع بر خط $C''C_1''$ ، که قرینه O_1'' نسبت به l'' است ، متقاطع می شوند . در نتیجه خط های $A'B_1'$ و $B'A_1'$ و $C'C_1'$ از شکل ۳۰ الف در یک نقطه O_3' متقاطع خواهند شد . (O_3' آن نقطه از π' است که برا ثر تصویر موازی ما برروی O_3'' نگاشته شده است .)

۱۲. صفحه π ی چهار ضلعی $ABCD$ در مسئله ۶ رابر صفحه جدید π' تصویر کنید به قسمی که

I . ضلع AB خط خاص π باشد ؛

II . قطر AC خط خاص π باشد.

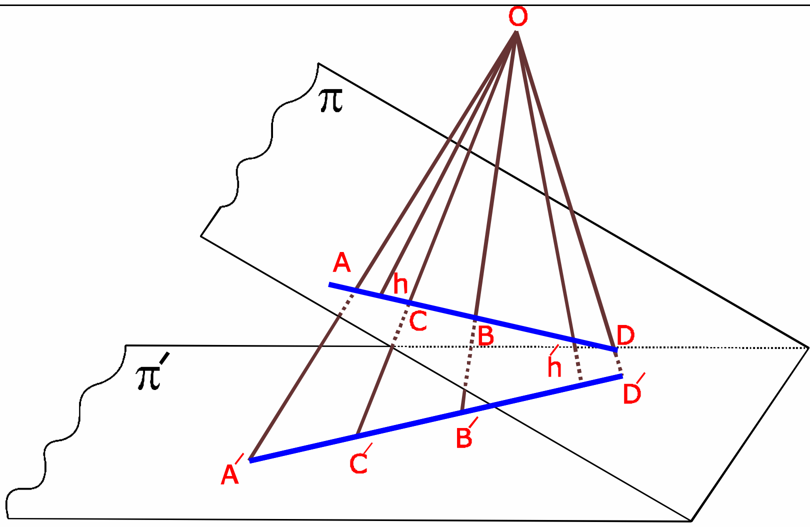
حل. چون مسئله ۶ با قضیه دزارگ هم ارز است (مسئله ۷) ، مسائل ۱۲ (i) و (ii) با بعضی از حالات خاص قضیه دزارگ ارزند . تشخیص چگونگی عملیت مورد نیاز و بیان صورت جدیدی را به عهده خواننده می گذاریم.

اثر تصویر مرکزی رابر طول یک پاره خط را درنظر می گیریم . فرض می کنیم AB پاره خطی در صفحه π و $A'B'$ نگاره آن بر یک صفحه π' بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشد (شکل ۳۳) . یادآور می شویم که نسبت مساحت های دو مثلثی که یک زاویه مشترک دارند مساوی است با نسبت حاصلضرب های اضلاع این دو زاویه . (این مطلب ، مثلا از فرمول معروف $S=(1/2)ab\sin C$ برای مساحت مثلث ABC نتیجه می شود .) بنابراین اگر فاصله های نقطه O رااز اضلاع AB و $A'B'$ به ترتیب به h و h' نشان دهیم ، خواهیم داشت

$$\frac{\Delta OA'B'}{\Delta OAB}=\frac{h'.A'B'}{h.AB}=\frac{OA'.OB'}{OA.OB}$$

یا

$$A'B'=AB\frac{OA'.OB'}{OAOB}.\frac{h}{h'}$$



شکل ۳۳

حال اگر A و B و C سه نقطه بر یک خط l از π ، و A' و B' و C' نگاره های آنها بر اثر تصویر بر π' باشند ، آنگـاه از استدلال فوق چنین بر می آید که

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC[(OA'.OC')/(OA.OC)](h/h')}{BC[(OB'.OC')/(OB.OC)](h/h')} = \frac{AC}{BC}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB}(*)$$

این رابطه نشان می دهد که در اینجا بر خلاف تصویر موازی ، نسبت های $A'C'/B'C'$ و AC/BC در حالـت کلـی نامساوی اند. ولی اگر نسبت دو نسبت حاصل از تقسیم پاره خط AB به وسیله دو نقطه C و D را (شکل ۳۳) تشکیل دهیم ، آنگاه روشن است که

$$\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB}\Big/\frac{AD}{BD}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB} = \frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$$

عبارت

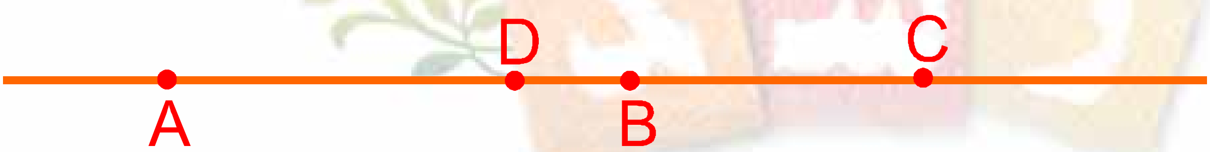
$$\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AC}{BD}$$

نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D نامیده می شود .

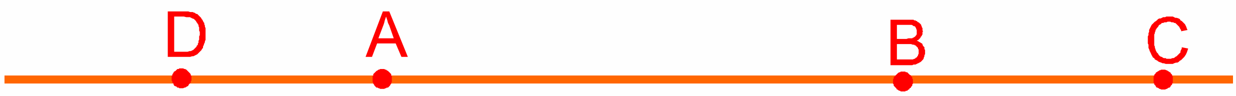
- ویژگی ج. در تصویر مرکزی نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D واقع بر یک خط محفوظ می ماند .

نسبت ناهمساز چهار نقطه (هم خط) ، نسبت دو نسبت ساده AC/BC و AD/BD است . از آنجا که نسبت های ساده می توانند مثبت یا منفی باشند ، طبیعی است که یک علامت مثبت یا منفی به نسبت ناهمساز چهار نقطه هم خط تخصیص دهیم . روشن است که نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ برای چهار نقطه A و B ؛ C و D مثبت است اگر C و D هردودرداخل یا هردودرخارج پاره خط AB باشند (زیرا در این صورت نسبت های ساده AC/BC و AD/BD دارای یک علامت اند) ، ومنفی است اگر یکی از نقطه های C و D در داخل AB ودیگری در خارج آن واقع باشد (زیرا در این صورت نسبت های ساده AC/BC و AD/BD علامت های مختلف دارند) . به عبارت دیگر ، می توانیم بگوییم که نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D منفی است اگر جفت های A ، B و C ، D جداساز یکدیگر باشند (شکل ۳۴الف) ، و مثبت است اگر این جفت ها جداساز یکدیگر نباشند (شکل ۳۴ ب) . از اینجا نتیجه می شود که تصویر مرکزی علامت نسبت به ناهمسازراحفظ می کند ، یعنی ویژگی (ج) معتبر است حتی اگر علامت نسبت ناهمساز را در نظر بگیریم .برای اثبات این حکم ، ملاحظه می کنیم که اگر جفت های نقطه های A ، B و C ، D جداساز یکدیگر باشند (نباشند) ،آنگاه جفت های خط های OA ، OB و OC ، OD جداساز یکدیگر هستند (نیستند) ؛ اما در این صورت جفت های نقطه های A' ، B' و C' ، D' نگاره های A ، B و C ، D بر اثر تصویر به مرکز O ، جداساز یکدیگر هستند (نیستند) .

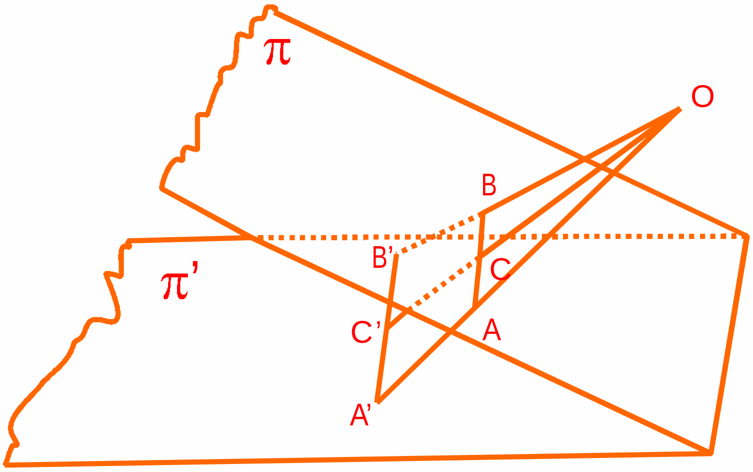
متذکر می شویم که هرگاه AB با خط خاص صفحه π (یعنی با فصل مشترک π و π') موازی باشد (شکل ۳۵) ، آنگاه واضح است که $AB \| A'B'$ و $OA'/OA = OB'/OB$



شکل۳۴(الف)



شکل۳۴(ب)



شکل۳۵

لذا در این مورد دستور (*) خواهد داد .

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$$

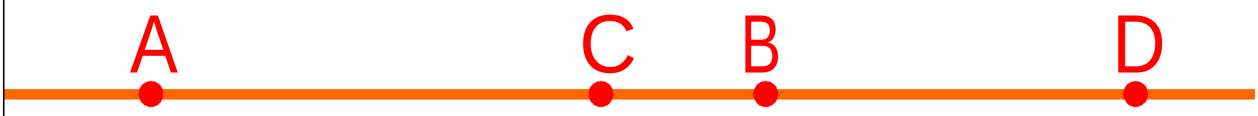
به عبارت دیگر ، در تصویر مرکزی نسبت ساده دو پاره خط از یک خط موازی با خط خاص صفحه ، محفوظ می ماند.

در تصویر مرکزی ، ویژگی (ج) نسبتا پیچیده است ، در گفتار مقدماتی ما نقش مهمی بازی خواهد کرد (← به ویژه ، بخش آخر) و در کتاب های پیشرفته ای که با تصویر مرکزی سروکار دارند نقش قاطعی ایفا می کند .

نسبت AC/BC را در نظر می گیریم که در آن C نقطه ای است که پاره خط AB را تقسیم می کند . حالتی کـه C وسط AB باشد ، یعنی وقتی AC و BC طول های مساوی و جهت های مختلف داشته باشند به قسمی که $AC/BC=-1$ ، مورد علاقه خاص ماست ، هم چنین وقتی برای چهار نقطه A و B ؛ C و D نسبت ناهمســاز $(AC/BC)/(AD/BD)$ را در

نظر می گیریم . حالت $(AC/BC)/(AD/BD)=-1$ را مجزا می کنیم . در ایـن حالـت یکـی از دو نقطـه C و D داخـل پاره‌خط AB و دیگری بیرون آن است . هم چنین نسبت های AC/BC و AD/BD از لحاظ قدر مطلق مساوی اند (شکل ۳۶) . برای تشخیص این وضعیت گوییم نقطه های C و D پاره خط AB را به نسبت هم سـاز (= نـسبت تـوافقی) تقـسیم می‌کنند

(یا نقطه های C و D مزدوج های همساز نقطه های A و B هستند .)

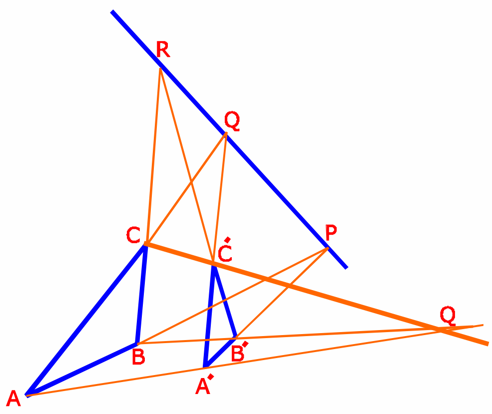


شکل ۳۶

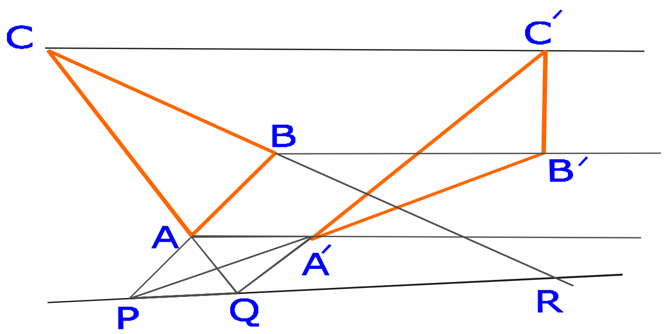
در پیش دیدیم که در مسائل متضمن تصاویر موازی ، مراکز پاره خط ها به نحو بارزی مجسم می شوند (کـه در آنهـا خط های واصل بین وسط های اضلاع مقابل برخی متوازی الاضلاع ها و غیره نقش اساسی بازی می کردند) . هـم چنـین در مسئله هایی که تصاویر موازی را در بر دارند ، اغلب جفتهای نقطه هایی پیدا می شوند که برخی پاره خط هـا را بـه نـسبت همساز تقسیم می کنند . بدین ترتیب ، مثلا مکان هندسی مسئله ۱(الف) – قطبی یک نقطه P نسبت به یک جفت خـط l_1 و l_2 – می تواند به عنوان مکان نقطه هایی مانند M تعریف شود که نقاط P و M پاره خط PM را ، که دو سـرش بـر l_1 و l_2 هستند ، به توافق تقسیم می کنند ؛ نقطه Q از مسئله ۱ (ب) نقطه ای است از خط AB که P و Q پاره خط AB را بـه توافق تقسیم می کنند و غیره . کلیه این احکام بلافاصله از روی ویژگی (ج) مربوط به تصاویر مرکزی اثبات می شوند.

اکنون برخی از بی دقتی های گفتار خود رااصلاح می کنیم . یادآوری می کنیم که وقتی یک صفحه π بر یک صـفحه π' تصویر می شود ، هر یک از دو صفحه خط خاصی پیدا می کند ؛ نقطه های خط خاص صفحه π نگاره ای در π' ندارنـد و نقطه های خط خاص صفحه π' نگاره های هیچ نقطه ای از π نیستند . به همین دلیل صورت گزاره هایی که متضمن تصاویر

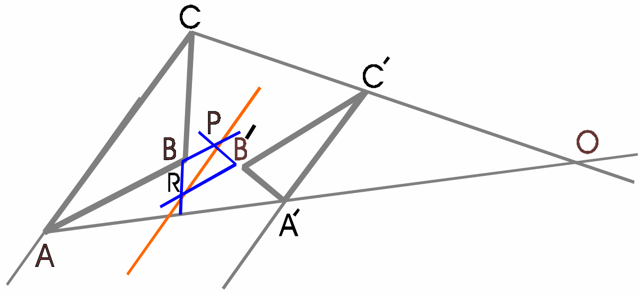
مرکزی هستند همواره حالت های خاص را باید در بر گیرند. بی دقتی هایی که هم اکنون متذکر شدیم ناشی از این وضـعیت بود که تاکنون ، علی الاصول ، چنین حالت های خاص را نادیده می گرفتیم . از این رو ، مثلا، حکم قضیه دزارگ (← مسئله ۷) ، دقیق بگوییم نادرسـت اسـت ، زیـرا ایـن امکـان را کـه یـک تـصویر مرکـزی ممکـن اسـت خـط هـای متقـارب (مثل AA_1 و BB_1 و CC_1 یا AB و A_1B_1 و PQ ، شکل ۲۵) را یا به خط های متقارب و یا به خط های موازی بدل کند ، در نظر نمی گیرد . یک بیان دقیق قضیه دزارگ بدین صورت است : اگر دو مثلث هم صفحه چنان باشند که خط های واصل به راس های متناظر متقارب یا موازی باشند ، آنگاه یا نقطه های تلاقی متناظر مثلث ها هم خط اند (شکل ۳۷ (الف) و (ب)) یا یک جفت از ضلع های متناظر با خط واصل به نقطه های برخورد دو جفت ضلع دیگر مـوازی هـستند . شـکل (۳۷(ج) و (د)) ، بالاخره یا اینکه اضلاع متناظر دو مثلث موازی اند (شکل ۳۷(ه) ، (ز) و به عکس . ملاحظه می ظرافتش را از دست می دهد و درک آن دشوار می شود . این گفته برای بسیاری از قضیه های دیگر نیز صحیح است .



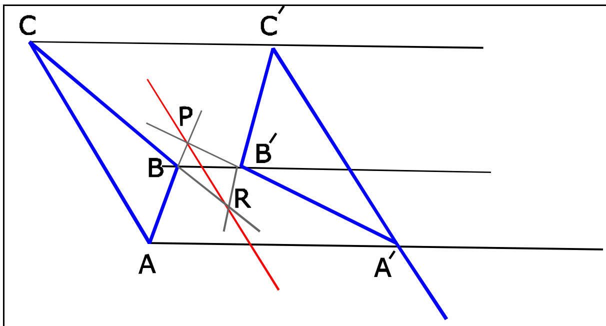
شکل۳۷(الف)



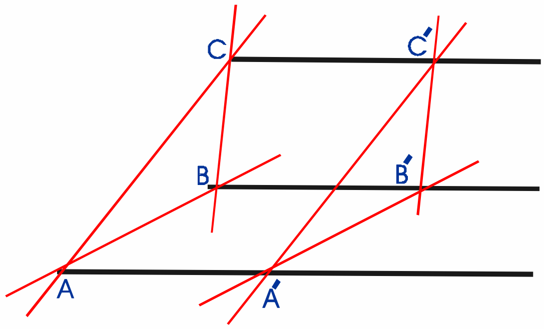
شکل۳۷(ب)



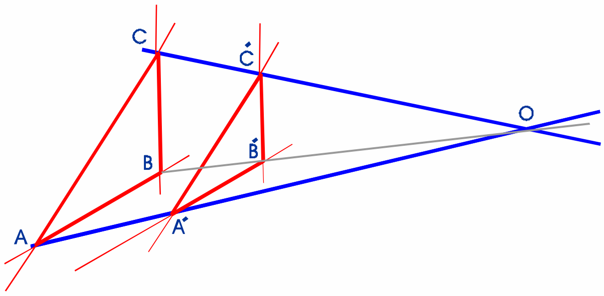
شکل ۳۷(ج)



شکل ۳۷(د)



شکل ۳۷(و)

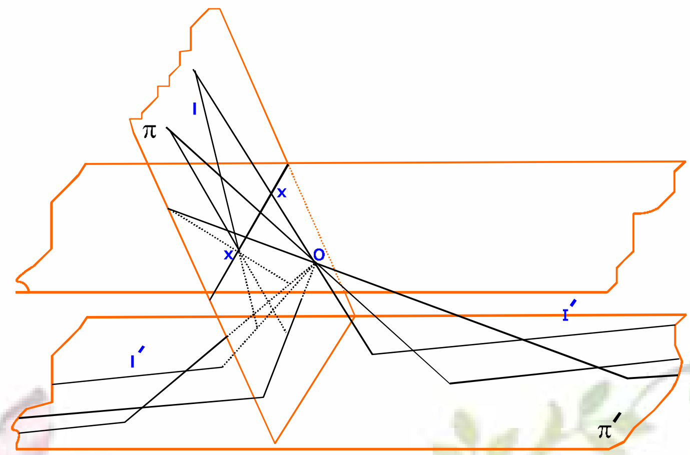


شکل ۳۷(ه)

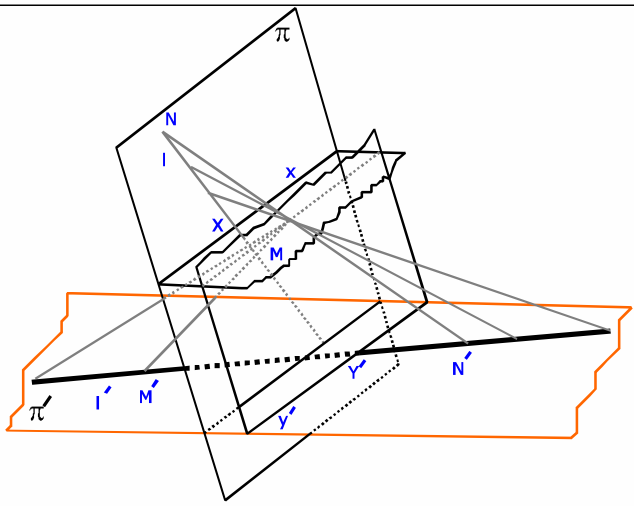
برای از بین برداشتن پیچیدگی های ناشی از ماهیت استثنایی خط های خاص ، بایـد بگـوییم کـه خـط خـاص x در صفحه π بر « خط بی نهایت » صفحه π' تصویر شده است ، و « خط بی نهایت » صفحه π بر خـط خـاص y' از π' تـصویر می‌شود . تاکید می کنیم که این اصطلاح موضوعی است قراردادی ؛ عبارت « خط x بر خط بینهایت تصویر مـی شـود » بـا عبارت « خط x بر چیزی تصویر نمی شود » هم ارز است . ما از هر نقطه خاص X از خط خاص x صحبت خواهیم کرد که به یک « نقطه بی نهایت » از صفحه π' تصویر شده است . ما از رده خط های موازی حاصل از تصویر رده خط های مـار بـر X (← شکل ۳۸) ، به عنوان رده خط هایی که « در یک نقطه بی نهایت تلاقی می کنند» صحبت خواهیم کرد . لذا هـر خـط یک نقطه در بی نهایت دارد که « نقطه تلاقی » l با هر خط موازی با آن است . کلیه نقطه های واقع در بی نهایت خـط هـای یک صفحه ، « خط بینهایت » آن صفحه را تشکیل می دهند .

حال به توجیه این اصطلاح می پردازیم . هرگاه یک نقطه M بر خط l به نقطه X محل برخورد l و x ، نزدیک شود تصویرش بر خط l' از صفحه π' [در یک امتداد ، بسته به امتدادی که M در آن به X نزدیک می شود (← شکل ۳۹)] بینهایت دور می شود . هم چنین اگر M در یکی از دو جهت بر l بی نهایت دور شود ، تصویرش به نقطه Y' ، محل برخورد l' و y' ، نزدیک می شود . (←شکل ۳۹)

وارد کردن نقطه های بی نهایت ما را ملزم می سازد که تعریف نسبت نا همساز چهار نقطه همخط را تکمیل کنیم . اشاره می کنیم که اگر D نقطه بینهایت خط AB باشد ، مساوی قرار دادن نسبت AD/BD با یک، طبیعی خواهد بود . (زیرا نسبت AM/BM وقتی نقطه M به نقطه بی نهایت D نزدیک شود ، یعنی وقتی M در یکی از دو جهت بر AB بی‌نهایت دور شود ، به حد یک نزدیک می شود .) لذااگر D نقطه ای در بی نهایت باشد ، نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ با نسبت ساده AC/BC یکی خواهد شد. به آسانی دیده می شود که ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی ، حتی اگر یکی از نقطه های A و B و C و D ، یا تصویرش ، نقطه ای در بی نهایت باشد باز صادق خواهد بود .



شکل ۳۸



شکل۳۹

وارد کردن خط ونقطه های بی نهایت به ما امکان می دهد که یک عده از گزاره های خاص را ، کـه همـه بـه طریـق مشابهی قابل اثبات هستند ، در یک گزاره واحد بگنجانیم . علت آن این است که تا آنجا که به تصاویر مرکزی مربوط است ، نقطه های فرضی در بی نهایت با نقطه های نوع دیگر بدل کرد . مثلا حالت های ویژه قضیه دزارگ ، که قبلا برشمردیم ، همه در حکم اصلی آن گنجانده شده اند . (مسئله ۷) به شرطی که نقطه تقاطع خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 وهم چنـین نقطـه های تقاطع ضلع های متناظر مثلث های ABC و $A_1B_1C_1$ نقاط معمولی یا نقاط بی نهایت تعبیر شوند .

صفحه ای که بدین ترتیب با افزودن نقاط فرضی و خط فرضی در بینهایت تکمیل شده است صفحه تصویری نام دارد .

می خواهیم به یک تفاوت اساسی بین دو استفاده ای که از نقطه های بینهایت کرده ایم اشاره کنیم :

۱. اصلاح مناسبی برای بیان برخی حقایق مربوط به تصاویر مرکزی ایجاد کنیم (مطالب مذکور در قبل) ،

۲. صفحه تصویری را ایجاد کنیم.

مفهوم صفحه تصویری گامی است فراترازاصطلاح تنها . گامی است در راه تجرید ریاضی که به یـک مفهـوم جدیـد ریاضی منجر می شود : صفحه ای که علاوه بر نقاط معمولی هندسه دبیرستانی دارای نقاط اضافی دیگر یعنی نقاط بی نهایت است . (دراین صفحه نقاط بینهایت با نقاط دیگر هم ترازند ، زیرا تصویر مرکزی می تواند نقاط یک نوع را به نقاط نوع دیگر

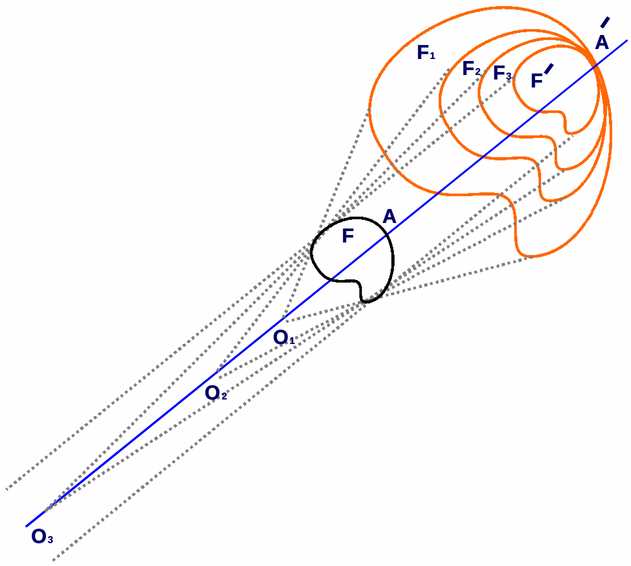
بدل کند). باید تاکید کنیم که یک صفحه تصویری همان اعتبار صفحه « اقلیدسی » معمولی (یا « صفحه انعکاسی » مذکور) را دارد . روی هم رفته ، مفهوم صفحه اقلیدسی یا خطوطی که می توانند تا بینهایت ادامه داده شوند ، تجریدی است ریاضی بی آنکه همتایی در واقعیت فیزیکی داشته باشد ، و توصیف مناسب آن به وسیله مجموله ای ازاصل موضوع ها ، که هندسه مسطحه اقلیدسی را می سازند ، انجام گرفته است . تعبیرهای متفاوت از مفهوم «صفحه» به انتخاب های متفاوت اصل موضوع ها منجر می شود. مثلا اصل موضوع زیر ، که در صفحه اقلیدسی معتبر نیست ، در صفحه تصویری صادق است : « هر دو خط (متمایز) یکدیگر را در یک نقطه منحصر به فرد می برند » (در واقع ، دو خط موازی به تعبیر اقلیدسی در یک نقطه واقع در بی نهایت در صفحه تصویری یکدیگر را می برند ، و یک خط معمولی و خط واقع در بینهایت، یکدیگر را در نقطه بی نهایت خط معمولی) . هر یک از راه های متفاوت پذیرفتنی نزدیک شدن به مفهوم صفحه با یک انتخاب خاص اصل موضوع ها مشخص می شود . بسته به نوع مسائلی که حل آنها را مطرح می کنیم ، ممکن است تعبیر اصطلاح « صفحه » را به یکی از راه ها مناسب بدانیم . یک مورد مناسب مطالعه انعکاس هایی است که صورت گرفته است ، و ما در آنجا از « نقاط بینهایت » به طریقی متفاوت با طریق معمول در صفحه تصویری ، استفاده می کنیم . « صفحه » حاصل با هر دو صفحه اقلیدسی و تصویری ، متفاوت است ولی « برتر» یا « پایین تر » از یکی از آنها نیست .

بجاست اشاره کنیم که وارد کردن نقطه ها و خط های « بی نهایت دور» ممکن است در حل مسئله هایی که تصاویر مرکزی در آنها دخالتی ندارند مفید باشد . مثلا به سهولت می توانیم انتقال را تجانسی بگیریم که مرکزش نقطه بینهایت دور در امتداد محور انتقال و نسبت آن ۱ باشد . [برای دیدن این نکته ، یک رشته تجانس در نظر می گیریم که یک شکل F را به شکل های F_1 و F_2 و F_3 و ...و نقطه ای مانند A از F به نقطه A' بدل می کند ؛ در این حال وقتی O_i $(i=1,2,3,...)$ مرکزهای این تجانس ها ، در امتداد AA' بینهایت دور می شوند نسبت های

$$\frac{O_i A'}{O_i A} \qquad (i=1,2,3,...)$$

به مقدار۱ و شکل های F_i به یک شکل F' نزدیک می شوند که از شکل F بر اثر انتقال با بردار AA' حاصل شده

است (← شکل ۴۰.)] در نتیجه این شناسایی دیگر لازم نیست حالات خاصی را که در عده ای از قضیه های متضمن اشکال مجانس پیدا می شوند ، جدا کنیم . مثلا ، بگوییم که هر دو دایره به دو طریق مجانس یکدیگرند. حاصلضرب دو تجانس باز یک تجانس است (با مرکزی در فاصله متناهی یا نامتناهی)؛ قضیه در باب سه مرکزتجانس نیز حالا می تواند به صورت خلاصه زیر بیان شود ، سه مرکز تجانس سه جفت شکل متجانس هم خط اند. این قضیه شامل حالتی است که یکی از مرکزها نقطه ای در بینهایت است (دو شکل از سه شکل قابل انطباق اند .) ، شامل حالتی است که هر سه مرکز (تجانس) نقطه هایی واقع در بینهایت اند . و محور (تجانس) خطی در بینهایت است (هر سه شکل دو به دو قابل انطباق اند) ، و سرانجام، شامل حالتی است که هر سه مرکز بر هم منطبق اند .

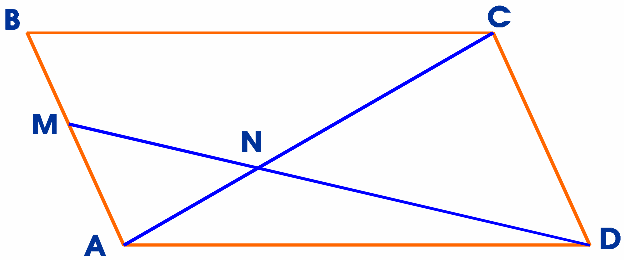


شکل۴۰

اگر دیدگاه فعلی خود راحفظ کنیم ، سه دایره همواره شش مرکز تجانس دارند که در مجموعه های سه تایی بر چهار محور تجانس قرار دارند (برای حالت های خاص که این قضیه را می پوشانند) . می توانیم به تقارن لغزه ای (یا لغزه) به صورت حالت یک تقارن تجانسی (یا تجانس) بنگریم ، و لذا حالتی که F بر اثر یک تقارن لغزه ای بر F' نگاشته می شود، مستلزم ملاحظات جداگانه نیست .

.۱۳

الف. متوازی الاضلاع $ABCD$ داده شده است . ثابت کنید که هرگاه خط DM از ضلع AB پاره خط $AM = AB/n$ را جدا کند، از قطر AC پاره خط $AN = AC/(n+1)$ را جدا خواهد کرد (شکل ۴۱ حالت $n = 2$ را نشان می دهد). اگر صفحه شکل را بر یک صفحه دیگر جنان تصویر کنیم که خط AB با خط خاص آن صفحه موازی باشد ، این گزاره به چه شکلی در خواهد آمد؟



شکل۴۱

ب. دو خط موازی l و l_1 پاره خط AB بر l داده شده اند . پاره خط AB را به وسیله ستاره تنها به n جزء مساوی تقسیم کنید.

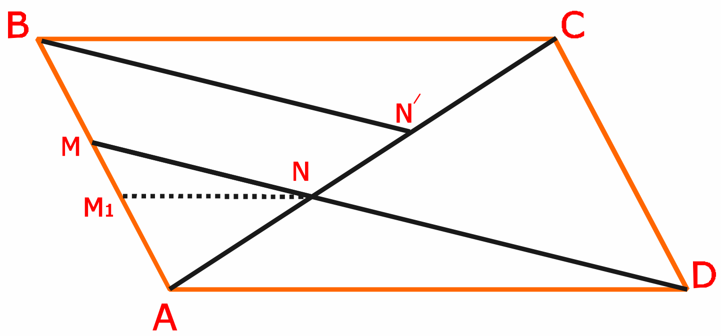
حل.

الف. از راس B ی متوازی الاضلاع ، خطی موازی MD رسم می کنیم تا قطر AC را در N' قطع کند (← شکل۴۲ الف) . چون $NM \| N'B$ ، لذا $AN'/AN = AB/AM = n$.بعد هم ، قابلیت انطباق مثلث های ADN و CBN' ایجاب می‌کند که $AN = CN'$. از اینجا نتیجه می شود که

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n+1$$

که همان چیزی است که ما می خواستیم ثابت کنیم .

اگر شکل ۴۲ الف را بر صفحه دیگری چنان تصویر کنیم که AB موازی با خط خاص صفحه تصویر شود ، آنگاه نسبت پاره خط های واقع بر خط AB محفوظ می ماند . . ولی این تصویر نسبت پاره خط های واقع بر قطر AC را حفظ نمی کند . بنابراین برای به دست آوردن صورت دیگری از قضیه ای که هم اکنون ثابت کردیم ، باید آن را طوری بیان کنیم که نسبت پاره خط های واقع بر AC حذف شوند، و فقط نسبت پاره خط های واقع بر AB باقی بمانند . این کار ، بسیار ساده به صورت زیر انجام می گیرد: از N خطی موازی AD رسم می کنیم تا ضلع AB رادر M_1 قطع کند .



شکل۴۲(الف)

قضیه ای که هم اکنون ثابت کردیم ایجاب می کند که اگر $AM=(1/n)AB$ ، آنگاه

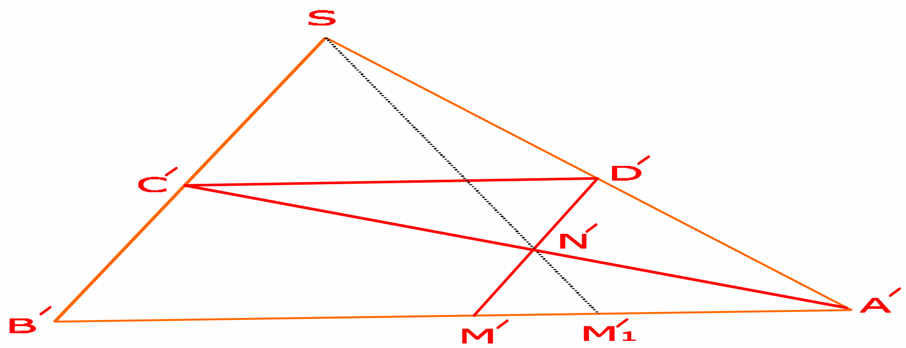
$$AM_1=\frac{1}{n+1}AB$$

اکنون روشن است که تصویر ما به نتیجه زیر منجر می شود : اگر نقطه M' قاعده $A'B'$ از ذوزنقه $A'B'C'D'$ را به نسبت $A'M'/A'B'=1/n$ تقسیم کند، آنگاه خط SN' واصل بین S ، نقطه تلاقی اضلاع (ناموازی) ذوزنقه ، و N' ، نقطه تلاقی $D'M'$ با قطر $A'C'$ ، یک نقطه M_1' رابر $A'B'$ مشخص می کند به طوری که

$$A'M_1'=\frac{1}{1+n}A'B'$$

(شکل ۴۲ ب) .[چون خط های AB و CD با خط خاص صفحه موازی اند، نگاره های آنها بر اثر این تصویر ، موازی باقی می مانند. این مطلب ایجاب می کند که متوازی الاضلاع $ABCD$ به یک ذوزنقه $A'B'C'D'$ بدل شود . خط های موازی AD ، BC و M_1N به خط های $A'D'$ ، $B'C'$ و $M_1'N'$ بدل می شوند که یکدیگر را در یک نقطه S می برند . نسبت پاره خط های واقع بر خط AB ، موازی با خط خاص صفحه ، بر اثر یک تصویر محفوظ می ماند.]

ب. یک نقطه اختیاری S از صفحه را به نقطه های A و B وصل، و فرض می کنیم C و D نقطه های تلاقی خط های SA و SB با l_1 باشند . اگر N_1 نقطه تلاقی DB و AC باشد ، آنگاه SN_1 خط AB را در یک نقطه M_2 می برد به طوری که $AM_2 = (1/2)AB$

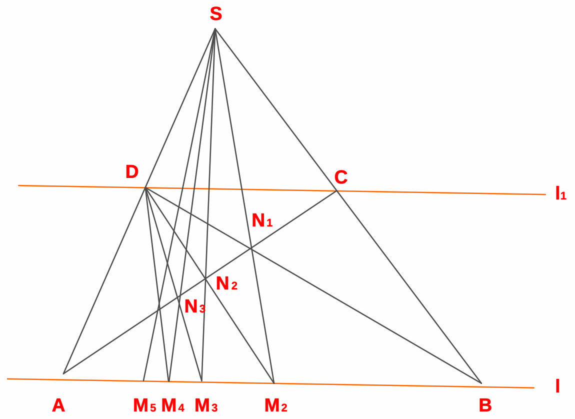


شکل۴۲(ب)

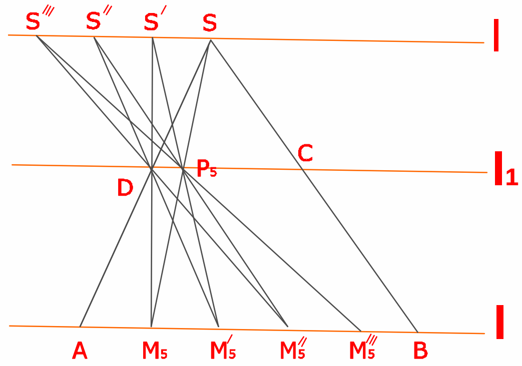
بعد اگر DM_2 خط AC را در یک نقطه N_2 ببرد ، آنگاه SN_2 خط AB را در یک نقطه M_3 می برد به طوری که $AM_3 = (1/3)AB$ ؛ اگر DM_3 خط AC را در یک نقطه N_3 ببرد، آنگاه SN_3 خط AB را در یک نقطه M_4 می برد به طوری که $AM_4 = (1/4)AB$ و هکذا (شکل ۴۳ الف، ← راه حل مسئله ۱۳(الف)) .

[وقتی نقطه M_n با تساوی $AM_n = (1/n)AB$ معین شد ، به آسانی می توان بقیه نقاطی را که پاره خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می کنند پیدا کرد . زیرا کافی است ، خط l' رااز S به موازات l و l_1 رسم کنیم. حال، اگر SM_n خط DC را در یک نقطه P_n ببرد، M_nD خط l' را در یک نقطه S' می برد و $S'P_n$ خط AB را در یک نقطه M_n' .

پس $AM_n = M_nM'_n$ ، لذا $AM'_n = (2/n)AB$ و هکذا؛ ← شکل ۴۳ ب ، که $n = 5$]



شکل۴۳(الف)



شکل۴۳(ب)

۱۴. قضیه چهار ضلعی کامل به چه شکلی در خواهد آمد هرگاه شکل ۴۴ را طوری تصویر کنیم کـه خـط ABE خـط خاص آن باشد ؟

حل. صفحه πی شکل ۴۴ را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که خط ABE خط خاص صفحه شود . پـس شکل ۴۴ به شکل ۴۵ بدل شـده اسـت . قطرهـای CA و DB و FE ی چهـار ضـلعی کامـل بـه خـط هـای $C'A' \| F'D'$ و $D'B' \| F'C'$ و $F'E' \| D'C'$ بدل می شوند . نقاط تقاطع این خط ها را با C_1 و D_1 و F_1 نشان می دهیم (شکل ۴۵) . روشن است که نقطه های C' و D' و F' وسط های اضلاع مثلث $C_1D_1E_1$ هستند .

حال نگاره های P و Q و R وسط های قطرهای چهار ضلعی کامل، را تعیین می کنیم . نقطه P، وسـط CA ، نقطـه ای است که $AP/CP = -1$. اگر نقطه بینهایت خط CA را به P_1 نشان دهیم ، آنگاه می توانیم بنویسیم

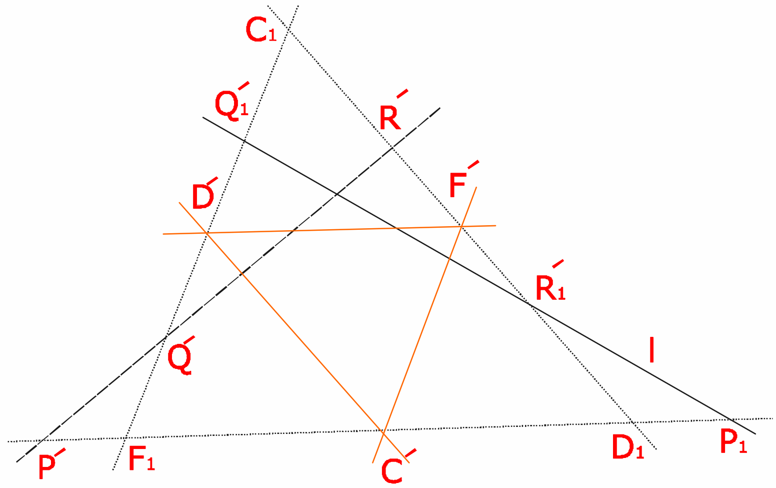
$$\frac{AP/CP}{AP_1/CP_1} = -1$$

به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم

$$\frac{A'P' / C'P'}{A'P_1' / C'P_1'} = -1$$

که P_1' نگاره نقطه بینهایت P_1 است، یعنی نقطه تلاقی $C'A'$ با خط خاص l از صفحه π . تساوی خود را بار دیگـر بــه صورت

$$\frac{C'P_1' / C'P'}{A'P_1' / A'P'} = -1$$



شکل۴۴

می نویسیم ؛ یا ، چون $A'P_1' / A'P' = 1$ ، (A' نقطه ای است در بینهایت)،

$$\frac{C'P_1'}{C'P'} = -1$$

از این رابطه نتیجه می شود که C' وسط پاره خط $P'P_1'$ است، یعنی P' قرینه P_1' (نقطه تلاقی خط D_1F_1 با l) است نسبت به C' ، وسط ضلع D_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$.

به گونه ای مشابه می توانیم ثابت کنیم که نقطه های Q و R ، وسط های قطرهای DB و FE از چهار ضلعی کامل، بر نقطه های Q' و R' قرینه های نقطه های Q_1' و R_1' ، نقطه های تلاقی خط خاص l با اضلاع C_1F_1 و C_1D_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ ، نسبت به D' و F' ، وسط های این اضلاع ، هستند . از اینجا قضیه مربوط به چهار ضلعی کامل (که می گوید نقطه های P

و Q و R هم خط اند) به شکل زیر در می آید : فرض می کنیم P'_1 و Q'_1 و R'_1 از نقطه های تلاقی یک خط l به ترتیب با اضلاع F_1D_1 و C_1D_1 و C_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ باشند . در این صورت نقطه های P' و Q' و R' قرینه های P'_1 و Q'_1 و R'_1 به ترتیب نسبت به وسط های اضلاع F_1D_1 و C_1D_1 و C_1F_1، هم خط اند . این قضیه می تواند برای استخراج قضیه مربوط به چهار ضلعی کامل به کار رود .

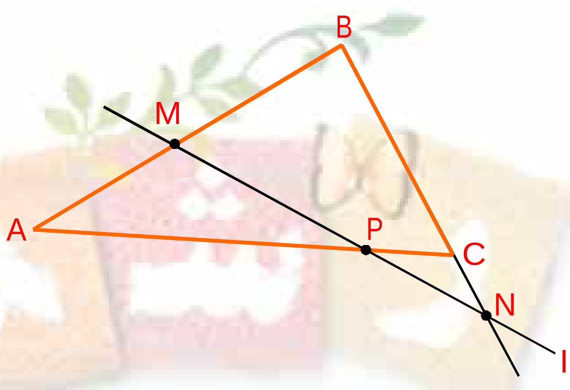
.۱۵

الف. قضیه منلائوس را ثابت کنید : سه نقطه M و N و P به ترتیب واقع بر اضلاع AB و BC و CA (یا بر امتداد آنها ← شکل ۴۵) از مثلث ABC ، هم خط اند اگر و فقط اگر

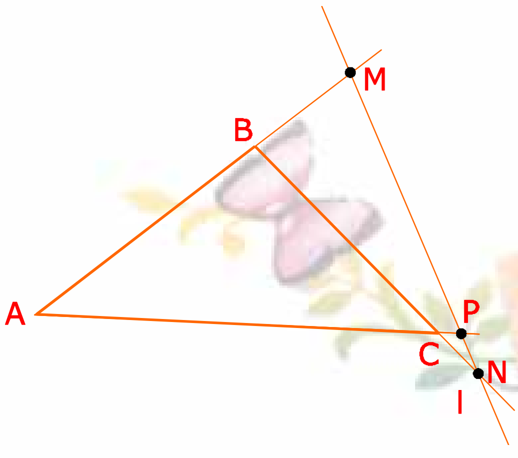
$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

ب. قضیه سوا را ثابت کنید : سه خط AN و BP و CM که نقاط M و N و P ، به ترتیب بر اضلاع AB و BC و CA (یا بر امتداد آنها ← شکل ۴۶) از مثلث ABC قرار دارند ، متقارب یا موازی اند ، اگر ، و تنها اگر

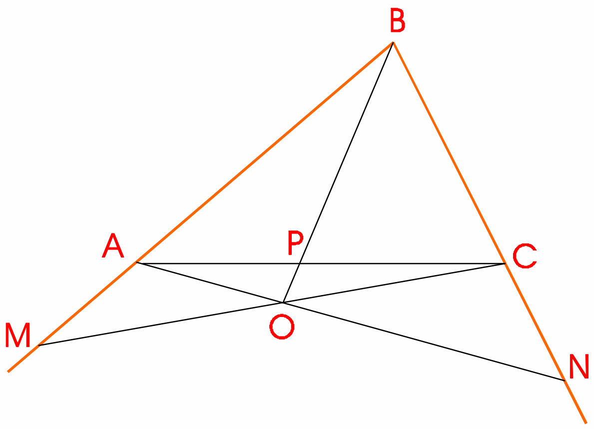
$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$



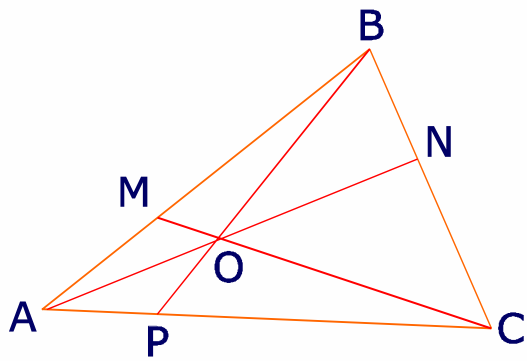
شکل۴۵(الف)



شکل۴۵(ب)



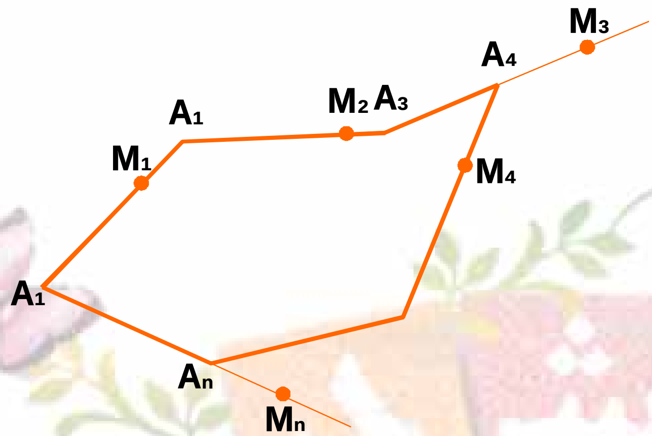
شکل۴۶(ب)



شکل۴۶(الف)

حل. نشان خواهیم داد که قضایای منلائوس و سوا نتایج مستقیم قضیه زیر هستند که ماقبل از حل مسئله ۱۵ آن را ثابت می کنیم . فرض می کنیم $A_1A_2...A_n$ چند ضلعی دلخواهی باشد و $M_n,...,M_2,M_1$ نقطه هایی بر اضلاع یا بر امتداد اضلاع آن باشند (شکل ۴۷) . نشان می دهیم که حاصلضرب

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n} \qquad (\#)$$



شکل ۴۷

بر اثر یک تصویر مرکزی عوض نمی شود . زیرا اگر $A'_1, A'_2, ..., A'_n$ و؛ $M'_1, M'_2, ..., M'_n$ نگاره های نقطه های $A_1, A_2, ...A_n$ ؛ $M_1, M_2, ..., M_n$ بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشند، لذا داریم .

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1} = \left(\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\right)\left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right) \Big/ \left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right)$$

$$\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2} = \left(\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\right)\left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right) \Big/ \left(\frac{OA'_3}{OA_3}\right)$$

L L L L L L L L L L L

$$\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n} = \left(\frac{A_nM_n}{A_1M_n}\right)\left(\frac{OA'_n}{OA_n}\right) \Big/ \left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right)$$

از ضرب این تساوی ها به دست می آوریم

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}\cdot\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}\cdot\mathbf{L}\cdot\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n} = \frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\mathbf{L}\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

یعنی همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم .

این قضیه را می توان تعمیم ویژگی (ج) از یک تصویر مرکزی انگاشت . (هر گاه چند ضلعی $A_1A_2...A_n$ به صورت دو ضلعی تباهیده ABA درآید ، آنگاه این قضیه به ویژگی (ج) بدل می شود) . اکنون نشان می دهیم که چگونه قضیه های منلائوس و سوا نتیجه می شوند.

الف. صفحه π ی مثلث ABC را بر یک صفحه π' چنان تصویر می کنیم که خط MN به خط خاص π بدل شود . اگر نقطه های M و N و P بر یک خط l واقع باشند ، این خط به خط بینهایت بدل می شود و M و N و P به نقاط M' و N' و P' بدل می شوند که نقطه هایی در بینهایت بر $A'B'$ و $B'C'$ و $C'A'$ هستند . بنابراین

$$\frac{A'M'}{B'M'} = 1, \frac{B'N'}{C'N'} = 1, \frac{C'P'}{A'P'} = 1, \frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} = 1$$

اما به موجب آنچه که در بالا ثابت کردیم مقدار حاصلضرب

$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)$

برابر یک است .

بـه عکـس ، گیـریم $(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)=1$ ، چـون تـصویر فـوق M و N را بـه نقطـه هـای بینهایت M' و N' بدل می کند ، پس $B'N'/C'N'=1$ ، $A'M'/B'M'=1$ به موجب قضیه ای که در بالا ثابت کردیم باید داشته باشیم

$(A'M'/B'M')(B'N'/C'N')(C'P'/A'P')=1$

و بنابراین $C'P'/A'P'=1$. معنی این تساوی آن است که P' نقطه بینهایت خط $A'C'$ است . اما در این صورت P باید بر خط خاص π قرار گیرد . یعنی هم خط بودن M و N و P ثابت می شود .

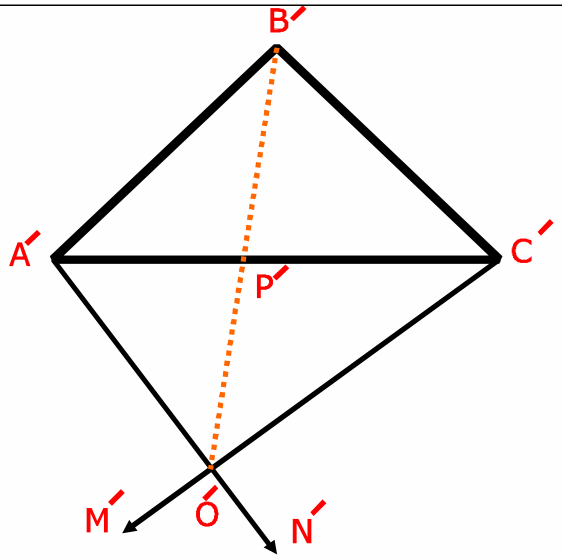
تبصره. با استفاده از استدلالی مشابه ، می توان قضیه کلی تر زیر را ثابت کرد : اگر $M_1, M_2, ..., M_n$ نقطـه هـای تقاطع یک n ضلعی $A_1 A_2 ... A_n$ با یک خط l باشند، آنگاه

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1$$

ولی ، به ازای $n>3$ ، عکس این قضیه درست نیست ، یعنی این تساوی همخطی نقطـه هـای $M_1, M_2, ..., M_n$ را ایجاب نمی کند.

ب. صفحه πی مثلث ABC را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که MN خط خـاص π شـود. اگـر خـط های AN و BP و CM موازی یا در یک نقطه O متقاطع باشند، آنگاه شکل ۴۶ در صفحه π به شکل ۴۸ بدل مـی شـود ، و $C'M'\|B'A'$ و $A'N'\|B'C'$. بنابراین P' وسط $A'C'$ است) زیرا نقطه تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع $A'B'C'O'$ اسـت.)

از این رو داریم $A'M'/B'M'=1$ و $B'N'/C'N'=1$ (زیرا M' و N' نقطه های بینهایت هستند) و $C'P'/A'P'=-1$.



شکل۴۸

از اینجا نتیجه می شود که

$$\frac{A'M'}{B'M'}.\frac{B'N'}{C'N'}.\frac{C'P'}{A'P'}=-1$$

و لذا به موجب قضیه ای که در بالا ثابت کردیم

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{AP}=-1$$

بعکس ، فرض می کنیم که تساوی اخیر برقرار باشد . چون نقطه های M و N بر اثر تصویر ما به نقطه های بینهایت بدل می شوند، داریم $A'M'/B'M'=1$ و $B'N'/C'N'=1$ از آنجا نتیجه می شود $C'P'/A'P'=-1$ ، یعنی نقطه P' وسط $A'C'$ است . اما در این حال خط های $A'N' \| B'C'$ و $C'M' \| B'A'$ و $B'P'$ در یک نقطه O' متلاقی اند (← شکل ۴۷) . بنابراین خط های AN و CM و BP یا متقارب اند یا موازی .

۱۶. نشان دهید که هرگاه E و F نقطه های برخورد ضلع های مقابل AB و CD ، AD و BC از یک چهارضلعی (دلخواه) باشند ، آنگاه

$$\frac{AE.CE}{BE.DE}=\frac{AF.CF}{BF.DF}$$

حل. باید نشان دهیم ($\leftarrow$ شکل ۴۹) که

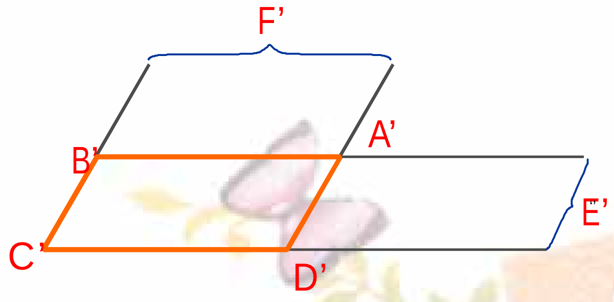
$$\frac{AE}{BE}.\frac{BF}{CF}.\frac{CE}{DE}.\frac{DF}{AF}=1$$

ملاحظه می کنیم که عبارت سمت چپ را می توان به عنوان حالت خاص عبارت $(\#)$ در بالا در نظر گرفت کـه چهـار ضلعی $ABCD$ نقش n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را بازی می کند و نقطه های E و F و E و F (به همان ترتیــب) نقــش نقطـه های $M_1, M_2, ..., M_n$ را در شکل ۴۷. از اینجا نتیجه می شود که عبارت

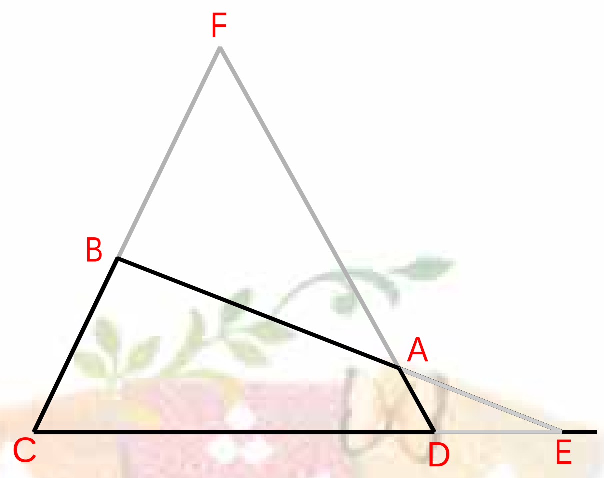
$$(AE/BE)(BF/CF)(CE/DE)(DF/AF)$$

بر اثر تصویر مرکزی پایا می ماند . ملاحظه می کنیم که تصویری از صفحه π ی شکل ۴۸الف، که EF خط خـاص آن باشد ، شکل ۴۹ الف را به شکل ۴۹ ب بدل می کند . چون E' و F' نقطه هایی در بینهایت اند، پس

$$\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{B'F'}{C'F'}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{D'F'}{A'F'}=1$$



شکل۴۹(ب)



شکل۴۹(الف)

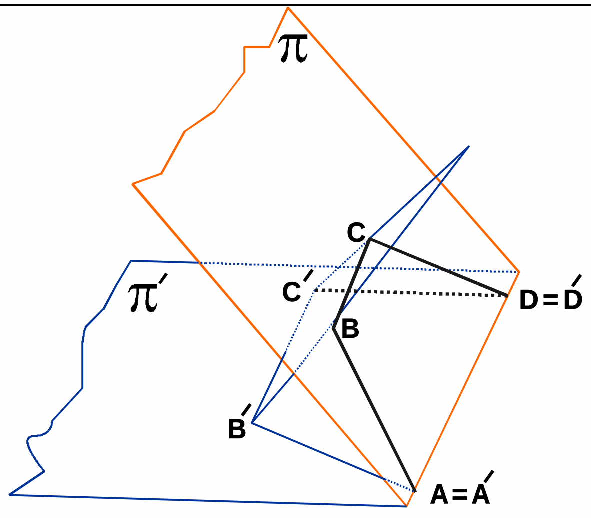
$$\frac{A'E'}{B'E'}\cdot\frac{B'F'}{C'F'}\cdot\frac{C'E'}{D'E'}\cdot\frac{D'F'}{A'F'}=1(=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF})$$

این تساوی قضیه ما را ثابت می کند.

قضیه ۱. گیریم A و B و C و D چهار نقطه در یک صفحه π چنان باشند که هیچ سه تایی از آنها هم خط نباشند M و N و P و Q چهار نقطه در صفحه π' چنانکه هیچ سه تایی از آنها هم خط نباشند. π و π' را می توان طوری قرار داد که یک تصویر مرکزی (یاموازی) از π به π' وجود داشته باشد که چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی $A'B'C'D'$ که مشابه با $MNPQ$ است، بدل کند.

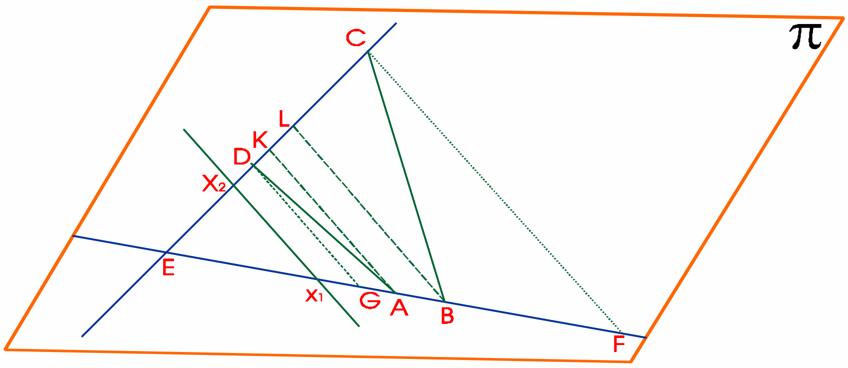
ما نخست این قضیه را در حالت خاصی که چهار ضلعی های $ABCD$ و $MNPQ$ ذوزنقه هستند، $AD\|BC$، $MQ\|NP$ ثابت می کنیم. در صفحه π' یک ذوزنقه $A'B'C'D'$ متشابه با $MNPQ$ چنان وارد می کنیم که $AD = A'D'$. سپس صفحه π را در فضا طوری حرکت می دهیم که پاره خط های AD و $A'D'$ بر هم منطبق شوند و نقاط B و C بیرون صفحه π' بمانند (شکل ۵۰). حال B را به B' و C را به C' وصل می کنیم. خطوط BB' و CC' هم صفحه اند، زیرا $BC\|AD$ و $AD\|B'C'$ ایجاب می کنند که BC و $B'C'$ موازی و در نتیجه هم صفحه باشند. اگر O نقطه برخورد خطوط BB' و CC' باشد، تصویر مرکزی به مرکز O چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی $A'B'C'D'$ بدل می کند؛ اگر $BB'\|CC'$، آنگاه تصویر موازی در امتدادی که به وسیله این خطوط مشخص می شود $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل می‌کند.

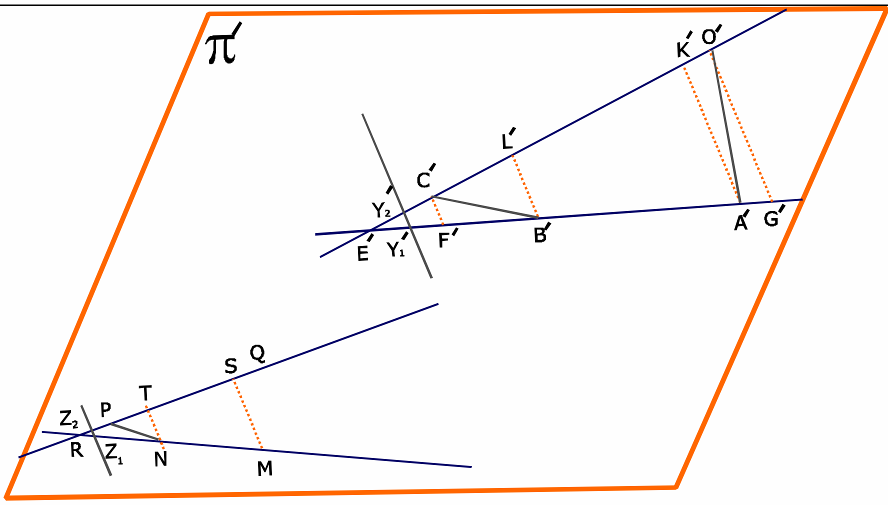
حال نشان می دهیم که حالت کلی را می توانیم به حالت خاصی که هم اکنون ملاحظه کردیم بدل کنیم.



شکل۵۰

پس فرض می کنیم $ABCD$ و $MNPQ$ دو چهار ضلعی در π و π' باشند (شکل ۵۱) . فرض می کنیم که یک تصویر مرکزی (یا موازی) از π به π' چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی $A'B'C'D'$ ، متشابه با $MNPQ$ ، بدل کند.





شکل۵۱

نشان خواهیم داد که $ABCD$ و $MNPQ$ خط خاص صفحه π را مشخص میکنند . برای این امر ، فرض می کنیم E و E' و R نقاط برخورد اضلاع AB و CD، $A'B'$ و $C'D'$ ، MN و PQ از چهار ضلعی های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ و $MNPQ$ باشند . به موجب ویژگی (الف) از تصویر مرکزی ، نگاره نقطه E نقطه E' است . اگر X_1' نقطه بینهایت $A'B'$ باشد، آنگاه به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی ، این نقطه نگاره یک نقطه X_1 از AB است به طوری که

$$\frac{AE/BE}{AX_1/BX_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'X_1'/B'X'}=\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{MR}{NR}$$

(زیرا $A'X_1'/B'X_1'=1$) . از این روابط می توانیم نسبت AX_1/BX_1 را (از لحاظ اندازه وعلامت !) تعیین ، و لذا X_1 را پیدا کنیم . هم چنین رابطه

$$\frac{CE/DE}{CX_2/DX_2}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{PR}{QR}$$

نقطه X_2 از DC را معین می کند که بر نقطه بینهایت X_2' از $D'C'$ نگاشته می شود . خط X_1X_2 خط خاص π ، و خط مورد نظر ماست . باید توجه کنیم که X_1 و X_2 را می توان از روی چهار ضلعی های مفروض $ABCD$ و $MNPQ$ پیدا کرد . یک برهان مشابه به ما امکان می دهد خط خاص $Y_1'Y_2'$ در π' را معین کنیم (← شکل ۵۱). نقطه های Y_1' و Y_2' از

روابط زیر مشخص می شوند.

$$\frac{AF}{BE}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y_1'/B'Y_1'} \text{ و } \frac{CE}{DE}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y_2'/D'Y_2'}$$

حال از نقاط A و B خطوطی موازی خط X_1X_2 رسم می کنیم و نقاط برخورد آنها را با CD به ترتیب K و L می‌نامیم . به موجب ویژگی (ب) از تصویر مرکزی ، خطوط موازی AK و BL به خطوط موازی بدل می شوند . تعبیر آن این است که تصویر مرکزی ما ذوزنقه $ABLK$ را به ذوزنقه $A'B'L'K'$ ($A'K'\|B'L'\|Y_1'Y_2'$) بدل می کند . حال می توانیم از چهار ضلعی های $ABCD$ و $MNPQ$ برای یافتن ذوزنقه $ABLK$ و ذوزنقه $MNTS$ که با $A'B'L'K'$ متشابه باشد استفاده کنیم . در اینجا باید نقاط Z_1 و Z_2 رابر خطوط MN و PQ چنان پیدا کنیم که

$$\frac{MR/NR}{MZ_1/NZ_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y_1'/B'Y_1'}=\frac{AE}{BE}$$

$$\frac{PR/QR}{PZ_2/QZ_2}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y_2'/D'Y_2'}=\frac{CE}{DE}$$

و بعد سه خط Z_1Z_2 و NT و MS را موازی با هم رسم کنیم.

حالت خاص قضیه ۱ که در بالا اثبات شد ، مجوز وجود یک تصویر مرکزی (یا موازی) است که ذوزنقه $ABLK$ را به ذوزنقه $A'B'L'K'$ متشابه با $MNTS$ بدل کند. برای اثبات این قضیه ، باید نشان دهیم که این تصویر $ABCD$ ، را به $A'B'C'D'$ یعنی ، نقطه های C و D را به نقطه های C' و D' ، بدل می کند .

ملاحظه می کنیم که خط خاص π نسبت به تصویر ما خط X_1X_2 است که در بالا پیدا کردیم . زیرا خط خاص با AK و BL موازی است (ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی) واز X_1 می گذرد (زیرا E ، نقطه برخورد AB و KL ، به E' ، نقطه برخورد $A'B'$ و $K'L'$ ، و نقطه X_1 که در رابطه

$$(AE/BE)(AX_1/BX_1)=A'E'/B'E'$$

صدق می کند به یک نقطه در بینهایت ، نگاشته می شود) . و به همین طریق نشان می دهیم که خط خاص π'

خط $Y'_1Y'_2$ است . چون E و X_2 و نقطه بینهایت KL به ترتیب بر E' و یک نقطه در بی نهایت و نقطه Y'_2 از $K'L'$ نگاشته شده اند ، به موجب ویژگی (ج) تصویر مرکزی نتیجه می گیریم که نگاره نقطه C نقطه $\overline{C}$ از خط $K'L'$ است به طوری که

$$\frac{EX_2 / CX_2}{1} = \frac{1}{E'Y'_2 / \overline{C}Y'_2}$$

بنابراین

$$\overline{C}Y'_2 = E'Y'_2 . \frac{EX_2}{CX_2}$$

می ماند نشان می دهیم که $\overline{C}$ بر C' منطبق است ، برای این منظور ذوزنقه $CDGF$ در شکل ۴۶ را (با $CF \| DG \| X_2X_1$) به وسیله تصویر مرکزی (یا موازی) و به دنبال آن یک تشابه ، به ذوزنقه $C'D'G'F'$ (با $C'F' \| D'G' \| Y'_2Y'_1$) بدل می کنیم . به موجب قضیه ای که در بالا ثابت کردیم این امر ممکن است . این نگاشت E را به E' ، نقطه X_2 از CD را به نقطه بینهایت X'_2 از $C'D'$ ، و نقطه بینهایت Y_2 از CD را به نقطه Y'_2 بدل می کند [زیرا بنابر تعریف نقاط X_2 و Y'_2 داریم $(CD/DE)(CX_2/DX_2) = C'E'/D'E'$ و $CE/DE = (C'E'/D'E')/(C'Y'_2/D'Y'_2)$]

بنابراین به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم :

$$\frac{EX_2 / CX_2}{1} = \frac{1}{E'Y'_2 / C'Y'_2}$$

لذا

$$C'Y'_2 = E'Y'_2 . \frac{EX_2}{CX_2}$$

از اینجا نتیجه می شود که C بر C' منطبق است . عیناً به همین طریق ثابت می کنیم که این تصویر مرکزی (یا موازی) که $ABLK$ را به $A'B'L'K'$ بدل می کند، D را به D' می نگارد . حال می بینیم که تصویر ما چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی $A'B'C'D'$ بدل کرده است ، همان گونه که ادعا کرده بودیم .

وقتی بعضی از نقطه های A و B و C و D یا A' و B' و C' و D' در بینهایت باشند برهان قضیه ۱ را به آسانی می‌توان اصلاح کرد.

۱۷. در چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ فرض می کنیم N نقطه برخورد قطرها، و P و Q نقطه های برخورد اضلاع روبه رو و B_1 و B_2 و B_3 و B_4 نقطه های برخورد اضلاع چهار ضلعی با خط های NP و NQ باشند . گیریم اضلاع چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ اضلاع چهار ضلعی $B_1B_2B_3B_4$ محاط در خود، را در نقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 و M_5 و M_6 و M_7 و M_8 ، نظیر، شکل ۵۲ ببرند . ثابت کنید که :

الف. خط های M_1M_5 و M_2M_6 و M_3M_7 و M_4M_8 از N می گذرند.

ب. خط های M_2M_3 و M_6M_7 از P می گذرند و خطوط M_1M_8 و M_4M_5 از Q .

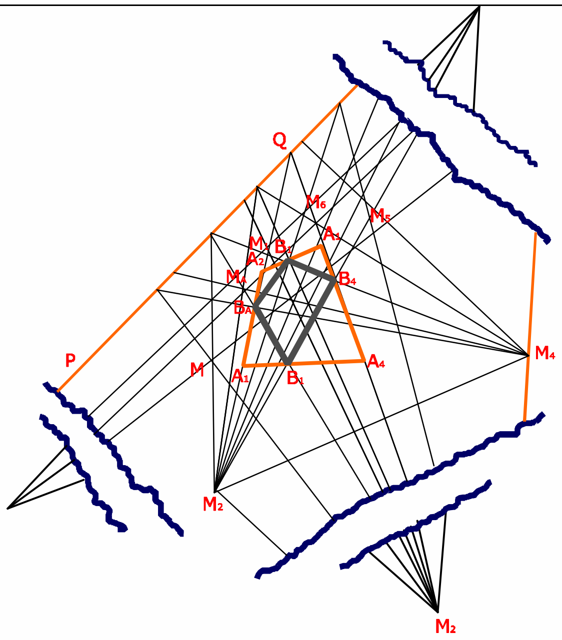
ج. خط های M_1M_2 و M_3M_8 و M_4M_7 و M_5M_6 از نقطه برخورد PQ با قطر A_2A_4 می گذرند و M_3M_4 و M_2M_5 و M_1M_6 و M_7M_8 از نقطه برخورد PQ و قطر A_1A_3 .

د. خط های هر یک از چهار تایی های :

$M_2M_4, M_6M_8, B_4M_5, B_2M_1$ ؛ $\qquad M_1M_3, M_5M_7, B_4M_4, B_2M_8$ ؛

$M_4M_6, M_2M_8, B_1M_7, B_3M_3$ ؛ $\qquad M_3M_5, M_1M_7, B_1M_6, B_3M_2$ ؛

در یک نقطه یکدیگر را می برند و این چهار نقطه حاصل بر خط PQ واقع اند .



شکل۵۲

حل. چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را بر یک مربع $A'_1A'_2A'_3A'_4$ تصویر می کنیم . بر اثر این تصویر نقطه های P و Q به نقطه های بینهایت امتدادهای اضلاع مربع بدل می شوند و خط های PN و QN به میان خط های آن. نقطه های B_1 ، B_2 ، B_3 ، B_4 به وسط های B'_1 ، B'_2 ، B'_3 ، و B'_4 از اضلاع مربع و نقطه های M_1 ، M_2 ، ... ، M_8 به نقطه های M'_1 ، M'_2 ،.... M'_8 (شکل۵۳) بدل می شوند . احکام قضیه مورد بحث ما از ملاحظات نسبتاً بدیهی زیر ناشی می شوند :

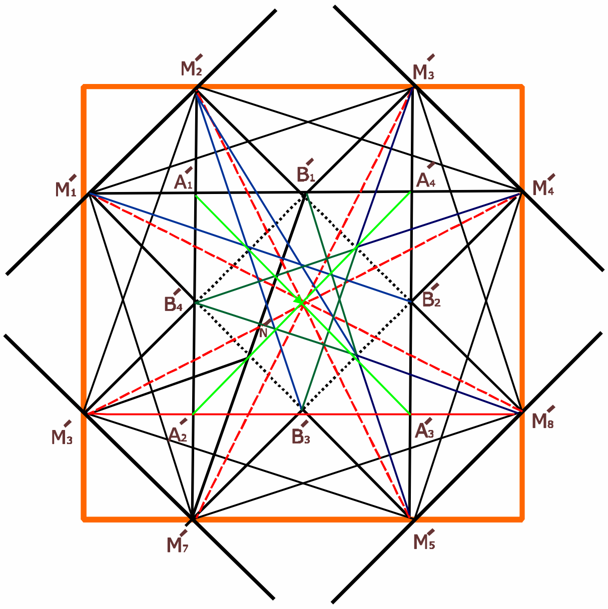
الف. نقطه های M'_1 و M'_5 ، M'_2 و M'_6 ، M'_3 و M'_7 ، M'_4 و M'_8 نسبت به N' ، مرکز مربع ، قرینه هستند. و در نتیجه خط های $M'_1M'_5$ و $M'_2M'_6$ و $M'_3M'_7$ و $M'_4M'_8$ در N' یکدیگر را می برند .

ب. خط های $M'_2M'_3$ و $M'_6M'_7$ با $A'_2A'_3$ موازی اند ؛ و خط های $M'_1M'_8$ و $M'_4M'_5$ با $A'_1A'_2$.

ج. $M'_1M'_2, M'_3M'_8, M'_4M'_7$ و $M'_5M'_6$ با قطر $A'_2A'_4$ مربع، و خط های $M'_3M'_4$ و $M'_2M'_5$ و $M'_1M'_6$ و $M'_7M'_8$ با قطر $A'_1A'_3$ ی مربع موازی اند .

د. $B'_2M'_8 \| B'_4M'_4 \| M'_5M'_7 \| M'_1M'_3$ ؛ $B'_2M'_1 \| B'_4M'_5 \| M'_6M'_8 \| M'_2M'_4$ ؛

$M'_4M'_6 \| M'_2M'_8 \| B'_1M'_7 \| B'_3M'_3$ ؛ $M'_3M'_5 \| M'_1M'_7 \| B'_1M'_6 \| B'_3M'_2$



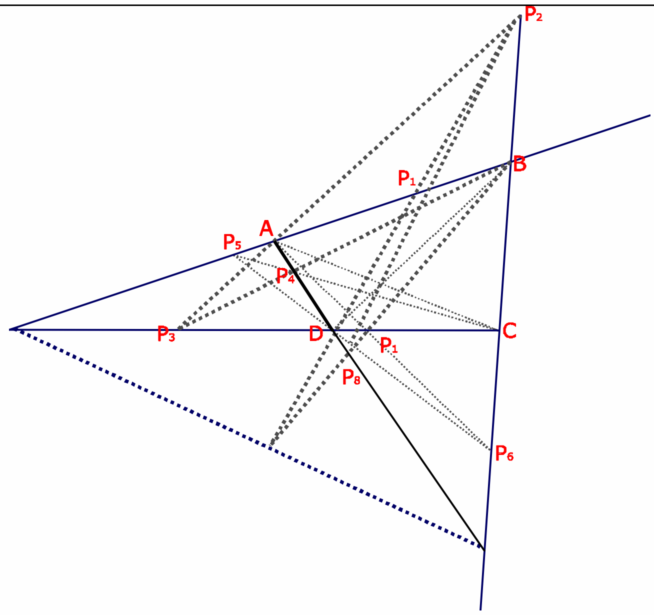
شکل۵۳

۱۸. فرض می کنیم P_1 نقطه ای بر ضلع AB از چهار ضلعی $ABCD$ باشد (شکل ۵۴). گیریم P_2 تصویر P_1 از مرکز D بر خط BC باشد، P_3 تصویر P_2 از مرکز A بر خط CD ، P_4 تصویر P_3 از مرکز B بر خط DA ، و P_5 تصویر P_4 از مرکز C بر خط AB ، و قس علیهذا. ثابت کنید که :

الف. نقطه P_{13} (که پس از سه بار دور زدن چهار ضلعی) بر ضلع AB به دست آمده بر نقطه مفروض P_1 منطبق است (و در نتیجه P_{14} بر نقطه P_2 و P_{15} بر P_3 ، و قس علیهذا) .

ب. خطوط P_1P_7 و P_2P_8 و P_3P_9 و غیره از نقطه برخورد قطرهای چهار ضلعی می گذرند .

ج. نقاط برخورد خطوط P_1P_2 و P_7P_8 ، P_2P_3 و P_8P_9 ، P_3P_4 و P_9P_{10} ، و غیره ، بر خط واصل بین نقاط برخورد اضلاع مقابل چهار ضلعی واقع اند .



شکل۵۴

حل. چهار ضلعی $ABCD$ رابر یک مربع $A'B'C'D'$ تصویر ، و فرض می کنیم نقطه های P_1 و P_2 و P_3 و ... به نقطه های P_1' و P_2' و P_3' و ... بدل شوند (شکل ۵۵) .

این نقطه ها بر اضلاع مربع نسبت هایی پدید می آورند که با

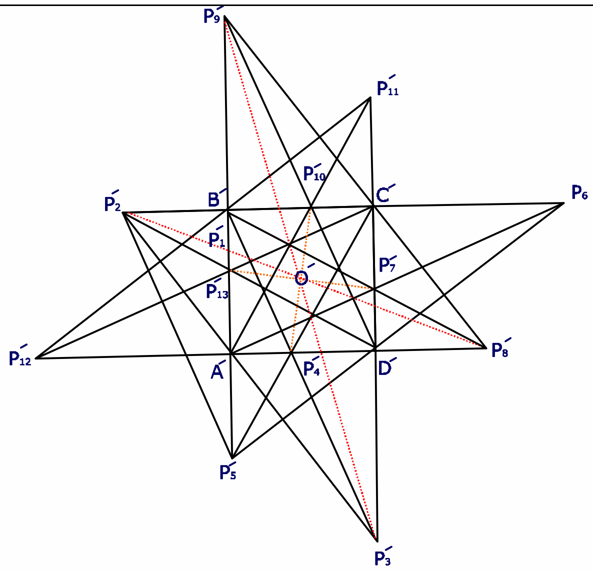
$$\lambda_1 = \frac{A'P_1'}{B'P_1'} \qquad \lambda_2 = \frac{B'P_2'}{C'P_2'} \qquad \lambda_3 = \frac{C'P_3'}{D'P_3'}$$

نشان می دهیم . خاطر نشان می کنیم که این اعداد می توانند مثبت یا منفی باشند . از تشابه مثلث های $A'D'P_1'$ و $B'P_2'P_1'$ (شکل ۵۵) نتیجه می شود

$$\frac{D'A'}{B'P_2'} = -\frac{A'P_1'}{B'P_1'}$$

ولذا

$$\frac{C'P_2'}{B'P_2'} = \frac{C'B' + B'P_2'}{B'P_2'} = \frac{C'B'}{B'P_2'} + 1 = \frac{D'A'}{B'P_2'} + 1 = -\frac{A'P_1'}{B'P_1'} + 1$$



شکل۵۵

از این رو

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\lambda_1 + 1$$

یا

$$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1} \qquad (*)$$

به آسانی می توان تحقیق کرد که هرگاه نقطه P_1' بر امتداد $A'B'$ در سمت چپ A' یا سمت راست B' قرار گیــرد ، دستور (*) صحیح باقی می ماند . با استفاده از دستور(*) پیدا می کنیم :

$$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}, \lambda_3 = \frac{1}{1-\lambda_2} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_4 = \frac{1}{1-\lambda_3} = \lambda_1$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{1-\lambda_4} = \lambda_2, \lambda_6 = \frac{1}{1-\lambda_5} = \lambda_3, \ldots$$

یعنی

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_{10} = \lambda_{13} = \lambda_{16}$$

$$\lambda_2=\lambda_5=\lambda_8=\lambda_{11}=\lambda_{14}=\lambda_{17}=\mathbf{L}=\frac{1}{1-\lambda_1}$$

$$\lambda_3=\lambda_6=\lambda_9=\lambda_{12}=\lambda_{15}=\lambda_{18}=\mathbf{L}=1-\frac{1}{\lambda_1}$$

حال احکام قضیه ما بلافاصله نتیجه می شود :

الف. $\lambda_1=\lambda_{13}$ **ایجاب می کند که نقطه P'_{13} بر نقطه P'_1 منطبق باشد . از ماهیت یک به یک بودن یک تصویر مرکزی نتیجه می شود که P_{13} بر P_1 منطبق است .**

ب. $\lambda_1=\lambda_7$ **و** $\lambda_2=\lambda_8$ **و** $\lambda_3=\lambda_9$ **و غیره ایجاب می کنند که P'_1 و P'_7 ، P'_2 و P'_8 ، P'_3 و P'_9 ، نسبت به مرکز O' مربع متقارن باشند ، یعنی خط های $P'_1P'_7$ و $P'_2P'_8$ و $P'_3P'_9$ و غیره در O' متقاطع باشند. در نتیجه ، به موجب ویژگی های تصویر مرکزی ، خطهای P_1P_7 ، P_2P_8 ، P_3P_9 و غیره ، از نقطه تلاقی قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ می گذرند .**

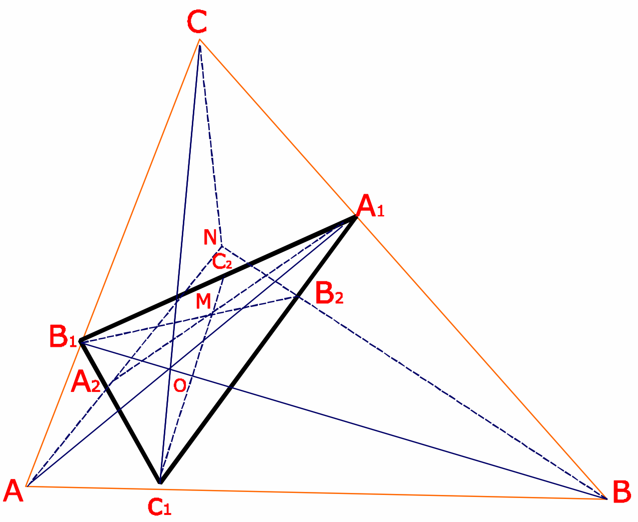
ج. **خط های $P'_1P'_2$ و $P'_7P'_8$ ، $P'_2P'_3$ ، $P'_8P'_9$ ، $P'_3P'_4$ و $P'_9P'_{10}$ ، غیره نسبت به O' ، مرکز مربع ، قرینه هستند (← (ب) در بالا) و بنابراین موازی اند . به موجب ویژگی های یک تصویر مرکزی ، نتیجه می شود که خط های P_1P_2 و P_7P_8 ، P_2P_3 و P_8P_9 ، P_3P_4 و P_9P_{10} ، دو به دو بر خط واصل بین نقطه های S و S_1 ، محل تلاقی اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCD$ ، بگذرند (بر اثر تصویر بالا خط SS_1 به خط بینهایت بدل شده است.)**

۱۹. **O نقطه ای است در صفحه ΔABC ، و A_1 و B_1 و C_1 نقاط برخورد خط های AO و BO و CO با اضلاع رو به رو به راس های A و B و C ی مثلث هستند (شکل ۵۶) . نقطه های A_2 و B_2 و C_2 را به ضلع های B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 و از $\Delta A_1B_1C_1$ در نظر می گیریم . ثابت کنید که:**

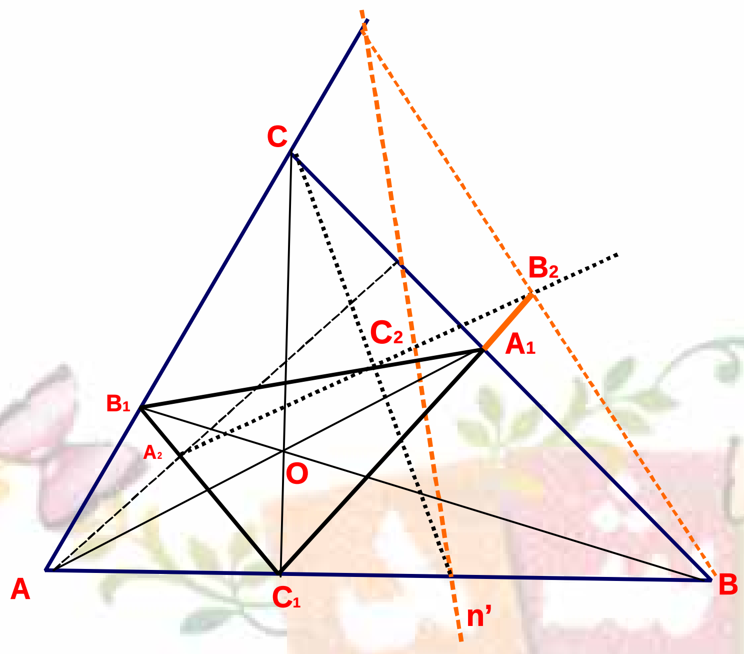
الف. **اگر سه خط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 و متقارب باشند ، خط های AA_2 و BB_2 و CC_2 نیز متقارب اند**

(شکل ۵۶ الف) .

ب. اگر نقطه های A_2 و B_2 و C_2 هم خط باشند ، نقطه های برخورد خط هـای AA_2 و BB_2 و CC_2 بـا اضـلاع مقابل ΔABC نیز هم خط اند (شکل ۵۶ ب).

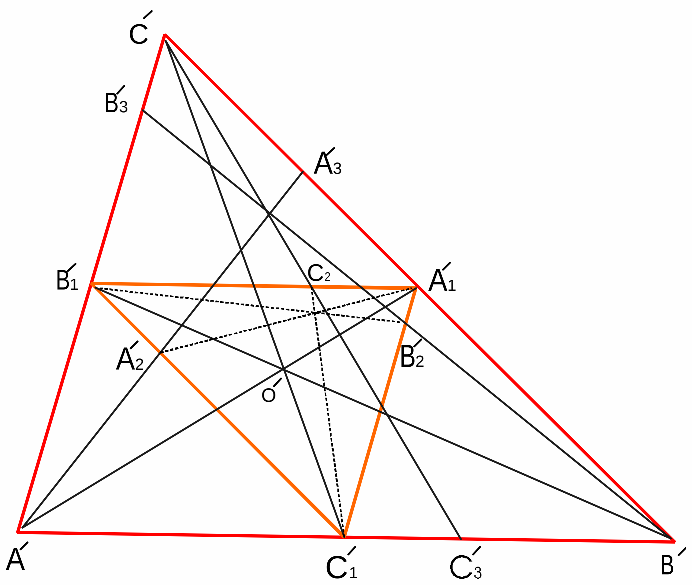


شکل ۵۶(الف)



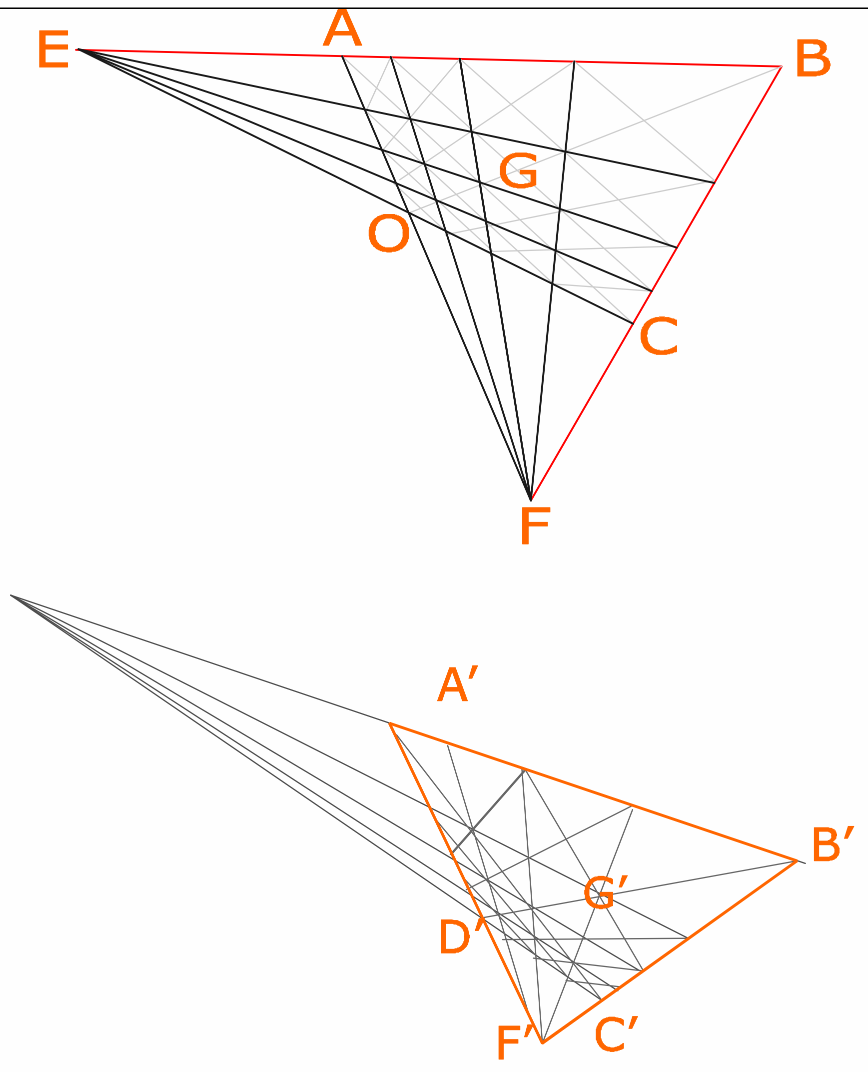
شکل ۵۶(ب)

حل. از یک تصویر مرکزی برای نگاشت چهار ضلعی $ABCO$ بر یک چهار ضلعی $A'B'C'O'$ استفاده می کنیم به طوری که O' نقطه تلاقی میانه های مثلث $A'B'C'$ باشد.. بر اثر این تصویر اضلاع $\Delta A'_1B'_1C'_1$ با اضلاع $\Delta A'B'C'$ (شکل ۵۷) موازی می شوند . اگر نقاط تقاطع خط های $A'A'_2$ و $B'B'_2$ و $C'C'_2$ را با اضلاع مقابل $\Delta A'B'C'$ به A'_3 و B'_3 و C'_3 نشان دهیم ، برهانی که ما در اینجا برای این قضیه می آوریم برای حالتی است که قسمتی از صفحه، که در تعریف تبدیل تصویری به آن اشاره شده بود، یک چهار ضلعی محدب باشد (مثل صفحه ای از یک دفتر یادداشت).



شکل۵۷

لذا فرض می کنیم یک تبدیل تصویری ، چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی $A'B'C'D'$ (شکل ۵۸) بدل کند . بنابر قضیه ۱، بر اثر یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه به خودش و سپس با یک تشابه ، می توان $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل کرد . بنابراین هرگاه بتوانیم نشان دهیم که این تبدیل تصویری که $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل می‌کند ، منحصر به فرد است ، قضیه ثابت خواهد شد.



شکل۵۸

تاکنون فقط نگاشت هایی از یک صفحه π بر صفحه دیگر π' را مورد مطالعه قرار داده ایم . حال تبدیلی را کـه π را بر خودش بدل کند در نظر می گیریم که به شرح زیر تعریف می شود : صفحه πرا در فـضا بـه طریـق دلخـواهی حرکـت می‌دهیم ، و سپس آن را بر وضع اولیه اش از مرکز O تصویر می کنیم . این تبدیل را تصویر مرکـزی صـفحه πبـر خـودش می‌نامیم . یک مورد این تبدیل تشابه است . تصویر مرکزی یک صفحه بر خودش یک تشابه است اگر ، وضع جدیـد صـفحه درست پیش از تصویر با وضعیت اصلیش موازی باشد .

ویژگی های تصویر مرکزی ایجاب می کند که تصویر مرکزی صفحه π بر خودش ، خط را به خط بدل کند به استثنای خط خاص ، که به خط بینهایت بدل می شود . هر خط از یک قسمت صفحه π که شامل خط خاص نباشد به یک خـط بـدل

می‌شود.

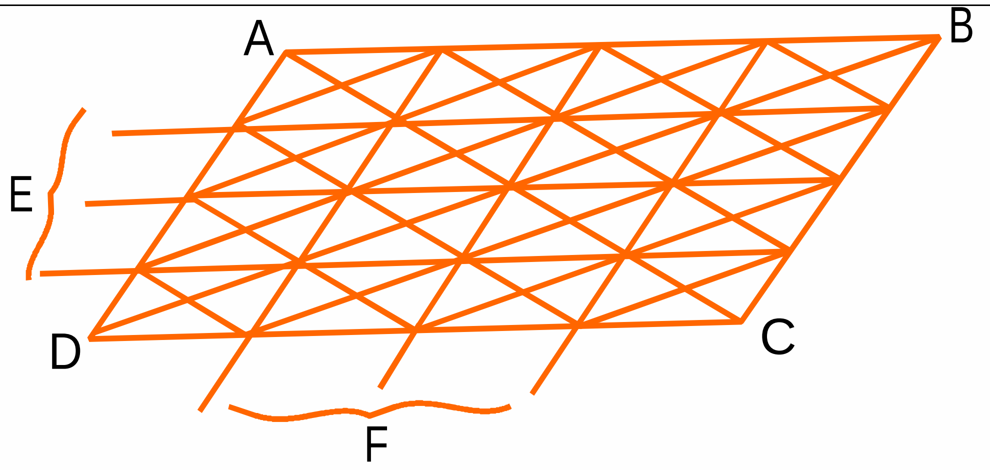
تبدیلی از صفحه که خط های مار بر قسمت معینی از صفحه را به خط بدل کند ، تبدیل تصویری نامند. هر تبدیل آفین یک تبدیل تصویری است ، ولی عکس ان درست نیست ؛ مثلا تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش یک تبدیل تصویری است ، ولی در حالت کلی ، آفین نیست .

قضیه بنیادی زیر ماهیت تبدیل تصویری صفحه را روشن می سازد .

قضیه ۲. هر تبدیل تصویری صفحه می تواند با یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه بر خودش و به دنبال آن یک تشابه تحقق یابد.

مافقط برهان مورد نیاز خود را طرح ریزی می کنیم . گیریم E و F ، E' و F' نقاط برخورد امتدادهای اضلاع AB و CD ، AD و BC ، $A'B'$ و $C'D'$ ، $A'D'$ و $B'C'$ از چهار ضلعی های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ باشند (برخی از نقاط برخورد ممکن است در بینهایت باشند) و فرض می کنیم G و G' نقاط برخورد قطرها باشند . چون AB به $A'B'$ و CD به $C'D'$ بدل می شود ، در نتیجه E به E' بدل خواهد شد . هم چنین F به F' و G به G'. بنابراین خطوط EG و FG به خطوط $E'G'$ و $F'G'$ بدل می شوند .

خطوط EG و FG چهار ضلعی $ABCD$ را به چهار ضلعی کوچکتر تقسیم می کنند ، هر یک از اینها بر اثر تبدیل تصویری ما به چهار ضلعی معلومی بدل می شود . از وصل کردن نقاط برخورد اقطار چهار ضلعی های کوچکتر به E و F و ادامه این روش ، یک شبکه از خطوط در $ABCD$ به دست می آوریم که نگاره های آنها را در $A'B'C'D'$ بر اثر تبدیل مذکور در دست داریم (← شکل ۵۸) . این شبکه را می توان به دلخواه چگال کرد . (به آسانی دیده می شود که هر تصویر مرکزی از صفحه شکل ما بر خودش ، که EF را به خط بینهایت بدل کند ، شبکه ما را به به یک تصویر از متوازی الاضلاع هایی که در شکل ۵۹ رسم شده بدل می کند.)



شکل۵۹