## مرکز ثقل مثلث

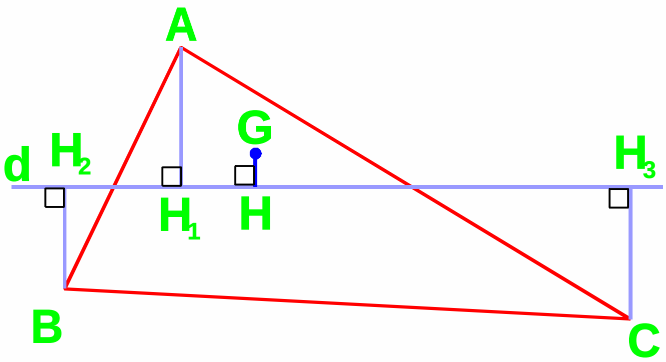
همان طور که قبلاً آوردیم ، اگر $G$ مرکز ثقل مثلث $\Delta ABC$ باشد داریم :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ و بالعکس .

حال به بیان قضیه مهم دیگری در مورد مرکز ثقل مثلث می پردازیم :

قضیه ۱. هرگاه تصاویر رئوس $A$ ، $B$ و $C$ از مثلث $\Delta ABC$ روی خط دلخواه $(d)$ به ترتیـب $H_1$ ، $H_2$ و $H_3$ باشـد و تصویر $G$ ، مرکز ثقل مثلث $\Delta ABC$ بر خط $(d)$ را $H$ بنامیم ، داریم :

$$3\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}$$




بنابراین اگر $d$ از نقطه $G$ بگذرد خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\overrightarrow{0}$$

قضیه ۲. اگر $O$ مرکزدایره محیطی و $H$ مرکزارتفاعی مثلث $\Delta ABC$ باشد، داریم :

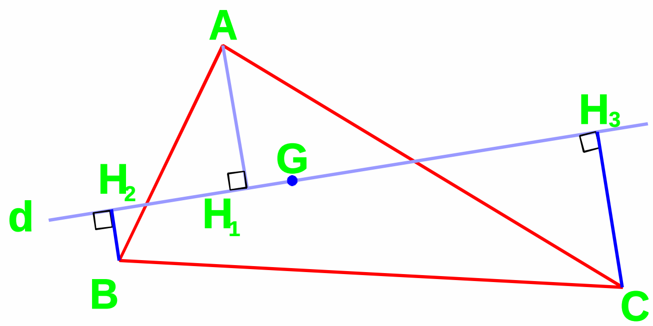
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

اثبات. با توجه به خواص خط اولر که از $O$ ، $H$ و $G$ می گذرد و نیز با توجه به این کـه $|OH|=3|OG|$ . بنـابراین

درستی حکم با در نظر گرفتن $O$ به عنوان مبدا مختصات از رابطه $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ نتیجه خواهد شد .

مثال ۱. خط $(d)$ از مرکز ثقل $\Delta ABC$ یعنی $G$ می گذرد؛ $H_1$ ، $H_2$ و $H_3$ به ترتیب تصاویر $A$ ، $B$ و $C$ روی $d$ می باشند به طوریکه $H_1$ و $H_2$ در یک طرف $G$ و $H_3$ در طرف دیگر $G$ قرار دارد . ثابت کنید :

$$GH_3=GH_1+GH_2$$




حل. می دانیم که با توجه به قضیه (۱) داریم :

$$\overrightarrow{AH_1}+\overrightarrow{BH_2}+\overrightarrow{CH_3}=\vec{0} \qquad (۱)$$

و از طرفی هم برای $G$ یعنی مرکز ثقل مثلث داریم :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \qquad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH_1})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH_2})+(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GH_3})=\vec{0}$$

یعنی :

$$\overrightarrow{GH_1}+\overrightarrow{GH_2}+\overrightarrow{GH_3}=\vec{0}$$

اما با توجه به فرض مسئله $H_1$ و $H_2$ در یک طرف $G$ و $H_3$ در طرف دیگر آن و در امتداد $H_1$ و $H_2$ می باشد .

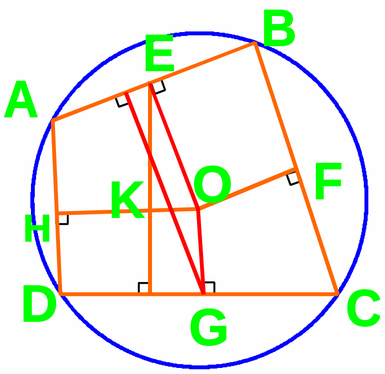
در نتیجه به سادگی داریم :

$$\overline{GH_3} = \overline{GH_1} + \overline{GH_2}$$

وحکم ثابت شد .

- مثال هایی از مسائل المپیادهای ریاضی در ایران و کشورهای مختلف.

سوال ۱. چهار ضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است . ثابت کنید چهار خط که هر کدام از وسط یک ضلع بر ضلع غیرمجاور آن عمود می شوند ، همرسند .




حل. از $O$ مرکز دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ بر اضلاع آن عمود می کنیم . واضح است که این عمودها همان عمود منصف های ضلاع هستند . وسط اضلاع را مطابق شکل $E$ ، $F$ ، $G$ و $H$ بنامید . از $E$ بر $CD$ و از $G$ بر $AB$ عمود می کنیم . فرض کنید این دو عمود یکدیگر را در $K$ قطع کنند . پس چهار ضلعی $KEOG$ متوازی الاضلاع است ؛ در نتیجه :

$$\vec{OK} = \vec{OE} + \vec{OG} \qquad (۱)$$

اگر محل برخورد عمودهای وارد از $F$ و $H$ بر $AD$ و $BC$ را $K'$ بنامیم ، به همان ترتیب خواهیم داشت :

$$\vec{OK'} = \vec{OF} + \vec{OH} \qquad (۲)$$

هم چنین داریم :

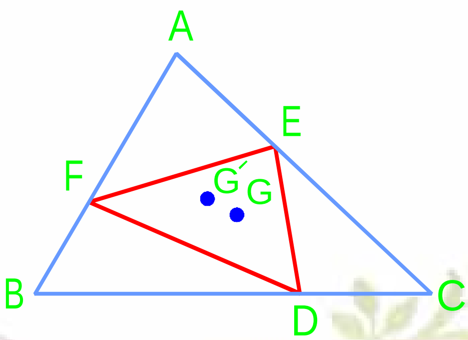
$$\vec{FE} = \vec{GH} \Rightarrow \vec{OE} - \vec{OF} = \vec{OH} - \vec{OG}$$

$$\Rightarrow \vec{OE} + \vec{OG} = \vec{OH} + \vec{OF} \qquad (۳)$$

از سه رابطه (۱) و (۲) و (۳) خواهیم داشت : $\vec{OK} = \vec{OK'}$ ؛ پس $K$ و $K'$ بر هم منطبقند ، یعنی چهار خط مذکور همرسند

**سوال ۲.** نقاط $D$ ، $E$ و $F$ به ترتیب روی اضلاع $BC$ ، $AC$ و $AB$ از مثلث $\Delta ABC$ قرار دارند . ثابت کنید دو مثلث $\Delta ABC$ و $\Delta DEF$ دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و تنها اگر :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AF}{BF}$$




**حل.** فرض کنید $G$ مرکز ثقل مثلث $\Delta ABC$ و $G'$ مرکز ثقل مثلث $\Delta DEF$ باشد . در نتیجه داریم :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \qquad (۱)$$

و

$$\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}=\vec{0} \qquad (۲)$$

از آنجا که گفتیم : $\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$ . پس با توجه به چهار ضلعی هـای $AGG'E$ ، $CGG'D$ و $BGG'F$ داریم :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG'}+\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DG'}+\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG'}+\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$$

که از جمع این روابط خواهیم داشت :

$$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})-(\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F})+(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF})+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$$

که با استفاده از روابط (۱) و (۲) به این صورت ساده می شود :

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{G'G}$$

اگر فرض کنیم $\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CD}=b.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BF}=c.\overrightarrow{BA}$ داریم :

$$a.\overrightarrow{AC}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{GG'} \qquad (۳)$$

حال ابتدا فرض می کنیم $G$ بر $G'$ منطبق است، آنگاه :

$$\begin{cases} a.\overrightarrow{AC}+b.\overrightarrow{CB}+c.\overrightarrow{BA}=\vec{0} \\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0} \end{cases}$$

در نتیجه :

$$a.\vec{AC}+b.\vec{CB}-c.(\vec{AC}+\vec{AB})=(a-c).\vec{AC}+(b-c).\vec{CB}=\vec{0}$$

واز آنجا که $\vec{AC}$ و $\vec{CB}$ همراستا نیستند، پس باید داشته باشیم :

$$a-c=0, b-c=0 \Rightarrow a=b=c$$

پس به راحتی به دست می آید :

$$\frac{BD}{CD}=\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}$$

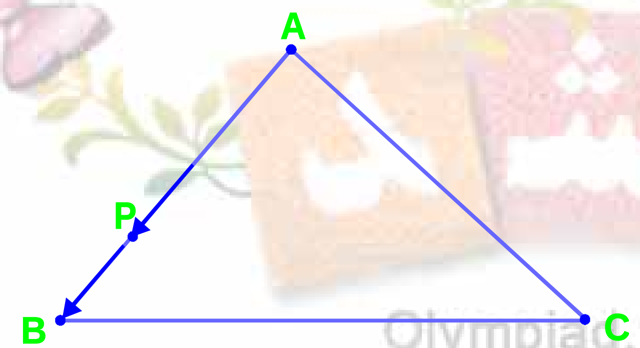
از طرفی اگر $\frac{BD}{CD}=\frac{CE}{AE}=\frac{AF}{BF}$ آنگاه $a=b=c$ وبایدثابت کنیم $G$ بر $G'$ منطبق است . با توجه با (۳) داریم:

$$a(\vec{AC}+\vec{CB}+\vec{BA})=3\vec{GG'}$$

و نیز داریم : $\vec{AC}+\vec{CB}+\vec{BA}=\vec{0}$ ؛ پس : $\vec{GG'}=\vec{0}$ و در نتیجه $G$ بر $G'$ منطبق است و حکم به طور کامل اثبات می شود .

سوال ۳. ثابت کنید برای هر نقطه $P$ واقع بر ضلع $AB$ از مثلث $\Delta ABC$ ( و غیر واقع بر $A$ یا $B$ ) ، این نـابرابری را داریم:

$$PC.AB < PA.BC + PB\cdot AC$$



حل. اگر فرض کنیم : $\vec{AP} = x.\vec{AB}$

پس : $\vec{PB} = (1-x)\,\vec{AB}$ که در آن $x \in (0,1)$ . درنتیجه داریم :

$$PC = \left|\vec{CA} + \vec{AP}\right| = \left|\vec{CA} + x(\vec{CB} - \vec{CA})\right|$$

$$= \left|(1-x)\vec{CA} + x.\vec{CB}\right| < CA.(1-x) + CB.x$$

در نتیجه :

$$PC.AB < CA(1-x)AB + CB.x.AB$$

$$= CA.PB + CB.PA$$

(نابرابری مثلثی)

و حکم ثابت گردید.