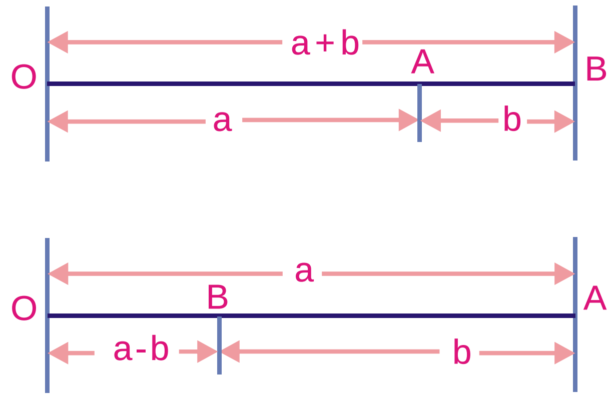
اثباتهای امکان ناپذیری و جبر

برای شکل دادن به ایده‌های کلی خود در این زمینه، نخست به بررسی چند ترسیم کلاسیک می‌پردازیم. کلید فهم عمیقتر این موضوع، برگرداندن مسئله‌های هندسی به زبان جبر است. هر مسئله ترسیم هندسی از این نوع است: مجموعه‌ای از پاره‌خطها، مثلاً a، b، c، ... مفروض است، و یک یا چند پاره‌خط دیگر x، y، ...، خواسته شده است. همیشه می‌توان مسئله‌ها را به این صورت بیان کرد، هر چند در نگاه اول ظاهر کاملاً متفاوتی داشته باشند. پاره‌خطهای خواسته شده ممکن است ضلعهای مثلثی باشند که قرار است رسم شود، یا شعاعهای دایره‌ها، و یا مختصات قائم نقاطی معین. برای سادگی فرض خواهیم کرد که فقط یک پاره‌خط x مورد نیاز است. در این صورت، ترسیم هندسی عبارت است از حل یک معادله جبری: نخست باید رابطه‌ای (معادله‌ای) بین کمیت خواسته شده x و کمیتهای مفروض a، b، c، ... پیدا کنیم؛ سپس باید کمیت مجهول x را با حل این معادله بیابیم، و بالاخره باید تعیین کنیم که آیا می‌توان این جواب را با فرایندهایی جبری به دست آورد که متناظر با ترسیمهایی با خط‌کش و پرگار باشند یا نه. بنیان تمام نظریه مورد بحث ما اصل اساسی هندسه تحلیلی یعنی مشخص‌سازی کمّی اشیای هندسی به وسیله عددهای حقیقی است که بر پایه مفهوم پیوستار اعداد حقیقی قرار دارد.

نخست توجه می‌کنیم که بعضی از ساده‌ترین عملهای جبری متناظرند با ترسیمهای هندسی مقدماتی. اگر دو پاره‌خط با طولهای a و b (که به وسیله یک پاره‌خط «واحد» مفروض اندازه‌گیری می‌شوند) داده شده باشند، آنگاه رسم $a + b$ ، $a - b$ ، ra (که r عدد گویای دلخواهی است)، a / b ، و ab کار خیلی ساده‌ای است.

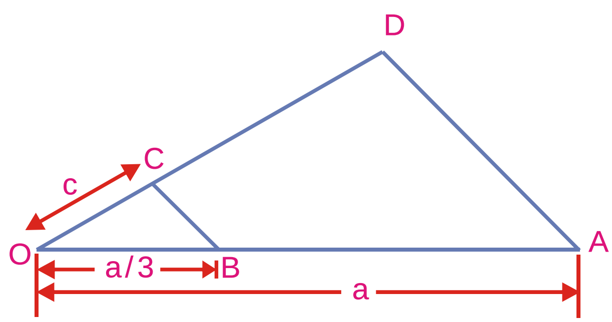
برای ترسیم $a + b$ (شکل ۱) خط راستی می‌کشیم و روی آن فاصله‌های $OA = a$ و $AB = b$ را با پرگار مشخص می‌کنیم.



شکل (۱). ترسیم $a + b$ و $b - a$

در این صورت $OB = a + b$. همین‌طور، برای رسم $a - b$ فاصله‌های $OA = a$ و $AB = b$ را مشخص می‌کنیم اما این بار AB را در جهت مخالف OA تعیین می‌کنیم. در این صورت $OB = a - b$. برای ترسیم $3a$ کافی است $a + a + a$ را رسم کنیم. همین‌طور می‌توانیم pa را که p عدد صحیحی است، رسم کنیم.

$a / 3$ را به طریق زیر رسم می‌کنیم (شکل ۲): $OA = a$ را روی یک خط مشخص می‌کنیم و خط دیگری که از O بگذرد می‌کشیم.

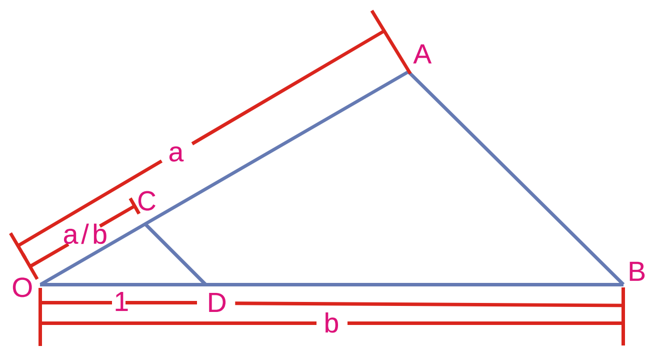


شکل (۲). ترسیم $a / 3$

روی این خط، پاره‌خط دلخواه $OC = c$ را مشخص می‌کنیم و $OD = 3c$ را رسم می‌کنیم. A و D را به هم وصل می‌کنیم و خطی گذرنده از C به موازات AD می‌کشیم که OA را در B قطع کند. مثلثهای OBC و OAD متشابهند؛

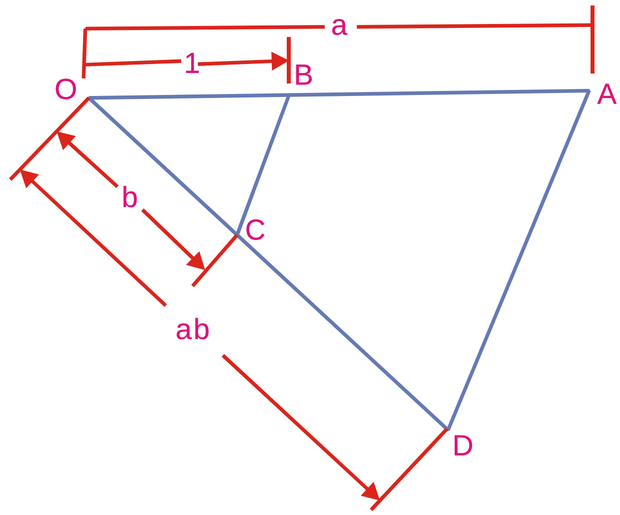
از این رو $OB / a = OB / OA = OC / OD = 1/3$، و $OB = a / 3$. به همین طریق می‌توانیم a / q را که a عدد صحیح دلخواهی است، رسم کنیم. به این ترتیب، با انجام دادن این عمل روی پاره‌خط pa، می‌توانیم ra را بسازیم که $r = p / q$ عدد گویای دلخواهی است.

برای ترسیم a/b (شکل ۳)، $OB = b$ و $OA = a$ را روی ضلعهای زاویه دلخواه O، و $OD = 1$ را روی OB مشخص می‌کنیم.



شکل (۳). ترسیم a / b

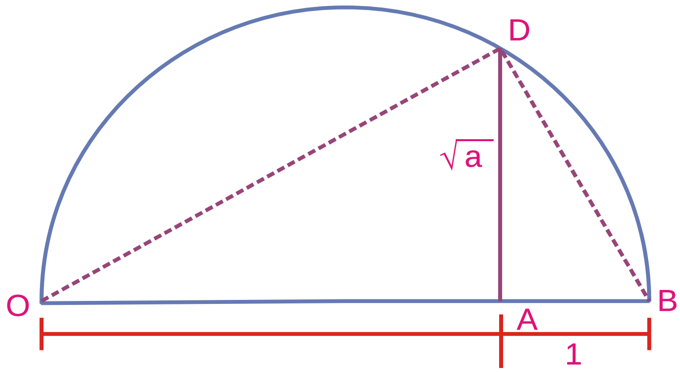
از D خطی به موازات AB رسم می‌کنیم که OA را در C قطع می‌کند. طول OC برابر a / b است. طرز ترسیم ab در شکل (۴) نشان داده شده است که در آن، AD خطی است گذرنده از A به موازات BC.



شکل (۴). ترسیم ab

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که عملهای جبری «گویا» - یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم کمیتهای معلوم - را می‌توان با ترسیم هندسی انجام داد. با اجرای متوالی این ترسیمهای ساده می‌توان از روی چند پاره‌خط مفروض که اندازه طولهای آنها اعداد حقیقی a، b، c، ... هستند هر کمیتی را که برحسب a، b، c ... به طریقی گویا - یعنی با کاربرد مکرر جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم - قابل بیان باشد، رسم کرد. دسته کمیتهایی که به این طریق از a، b، c، ... به دست می‌آیند به اصطلاح یک هیأت اعداد را تشکیل می‌دهند، یعنی مجموعه‌ای از عددها با این ویژگی که هر عمل گویایی که روی دو یا چند تا از عضوهای آن انجام شود، حاصلش عددی متعلق به مجموعه است. یادآور می‌شویم که عددهای گویا، عددهای حقیقی، و عددهای مختلط چنین هیأتهایی تشکیل می‌دهند. در حالت مورد بحث، گفته می‌شود که هیأت به وسیله عددهای مفروض a، b، c، ... تولید شده است.

ترسیم بسیار مهم جدیدی که ما را از این هیأت فراتر می‌برد، استخراج ریشه دوم است: اگر پاره‌خط a داده باشد، $\sqrt{a}$ را نیز می‌توان با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم کرد. روی خط راستی، $OA = a$ و $AB = 1$ را مشخص می‌کنیم (شکل ۵).



شکل (۵). ترسیم $\sqrt{a}$

دایره‌ای رسم می‌کنیم که پاره‌خط OB قطر آن باشد و از A خطی بر OB عمود می‌کنیم که دایره را در C قطع می‌کند. بنا به قضیه‌ای در هندسه مقدماتی که می‌گوید زاویه محاط در نیمدایره قائمه است، مثلث OBC زاویه قائمه‌ای در رأس C دارد. پس $\angle ABC = \angle OCA$، مثلثهای قائم‌الزاویه OAC و CAB متشابهند، و در مورد $x = AC$ داریم

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{1} \quad , \quad x^{2}=a \quad , \quad x=\sqrt{a}$$