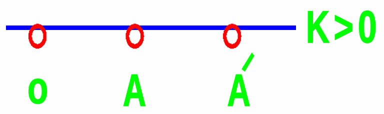
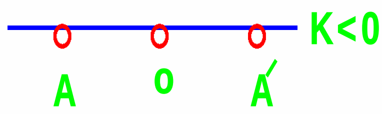
تجانس

تعریف تجانس برای نقطه. اگر نقطه A' بر خط OA واقع باشد و داشته باشیم OA'/OA آنگاه می گوییم که نقطه ی A' از نقطه A بر اثر یک تجانس (تشابه مرکزی) به مرکز تجانس O و نسبت تجانس K بدست آمده است .

نکته: عدد K می تواند مثبت یا منفی باشد . اگر A و A' هر دو در یک طرف O واقع باشند $K>0$ و تجانس مستقیم می باشد (شکل الف) و اگر A و A' در طرفین O واقع باشند $K<0$ و تجانس معکوس می باشد . (شکل ب)

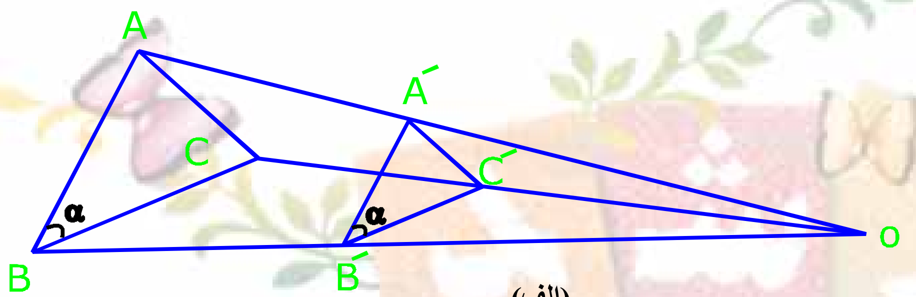


(الف)

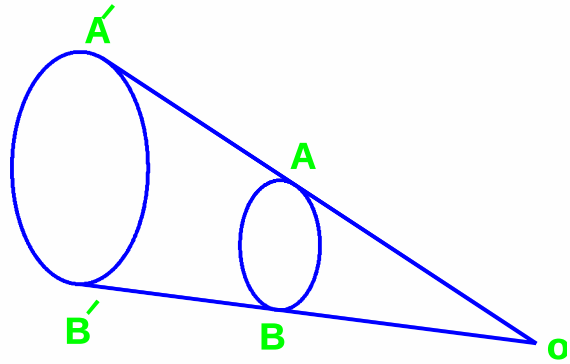


(ب)

تعریف تجانس برای شکل. تجانس تبدیلی است که هر شکل را به شکلی مشابه با آن نظیر می کند در چنین تبدیلی موسوم به تشابه مرکزی اندازه های زاویه ها ثابت می مانند اما فاصله ها عموماً تغییر می کنند و به نسبت معینی کوچک و بزرگ می شوند . این نسبت را نسبت تجانس می نامند و محل برخورد خطوطی که نقاط متناظر دو شکل را به هم وصل می کنند ، مرکز تجانس است .(شکل الف و ب)



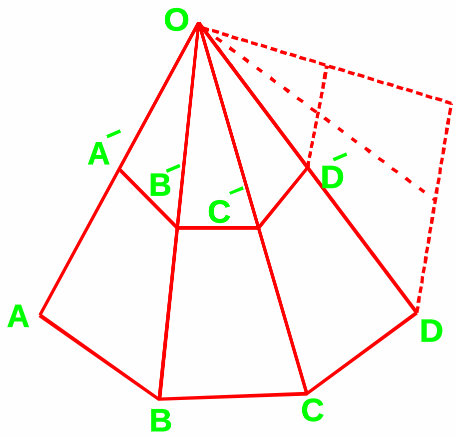
(الف)



(ب)

ملاحظه. هر پاره خط AB به پاره خط $A'B'$ تبدیل می گردد که طول آن برابر است با: $A'B' = K.AB$

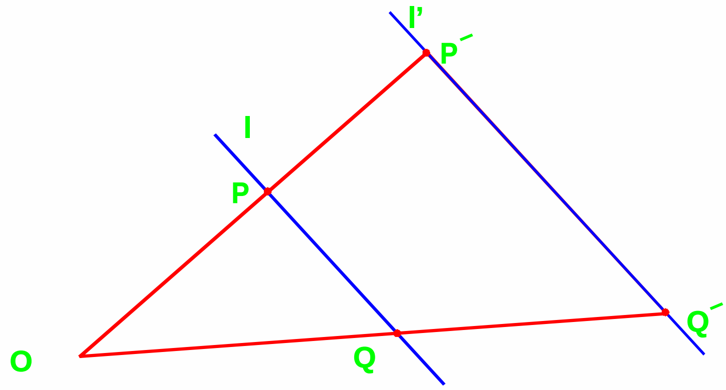
تعریف تجانس برای چند ضلعی. اگر اضلاع متناظر در دو چند ضلعی متشابه ، موازی باشند می گوییم دو چند ضلعی متجانس هستند. (مطابق شکل)



قضیه ۱. هر تجانس ، خط l را به خط l' که با خط l موازی است ، تبدیل می کند .

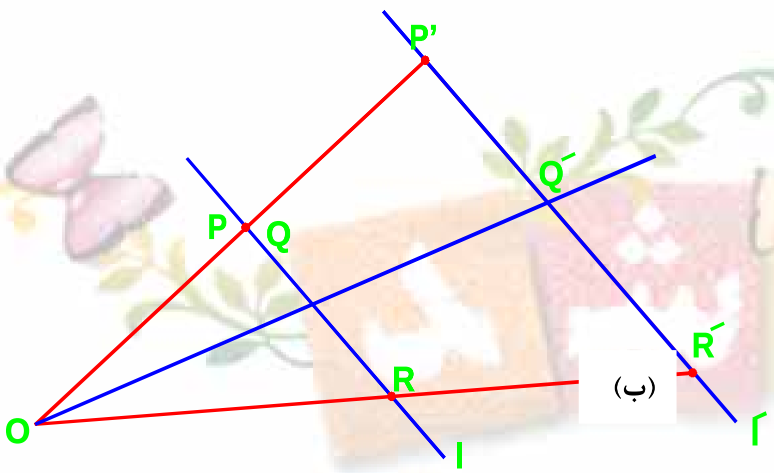
اثبات. چون هر خط توسط دو نقطه مشخص می شود ، اگر متجانس های دو نقطه P و Q به ترتیب نقاط P' و Q' باشند دو خط PQ و $P'Q'$ طبق عکس قضیه تالس موازی اند :

$$\frac{OP'}{OP}=\frac{OQ'}{OQ}=K \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ\|P'Q' \to L\|L'$$



(الف)

حال باید ثابت کنیم مجانس هر نقطه دیگر روی خط PQ (مانند R) روی خط $P'Q'$ قرار دارد . با توجه به دو مثلث متشابه $\overset{\Delta}{OPQ}$ و $\overset{\Delta}{OP'Q'}$ نتیجه می شود $PQ\|P'Q'$ و هم چنین از تشابه $\overset{\Delta}{OQR}$ و $\overset{\Delta}{OQ'R'}$ نتیجه می شود که $QR\|Q'R'$ حال چون P ، Q و R هم خط اند ، و دو خط $P'Q'$ و $Q'R$ دارای نقطه مشترک Q' هستند پس نقطه P' ، Q' و R' هم خط اند . یا به عبارت دیگر R' روی خط $P'Q'$ قرار دارد و اثبات کامل است .

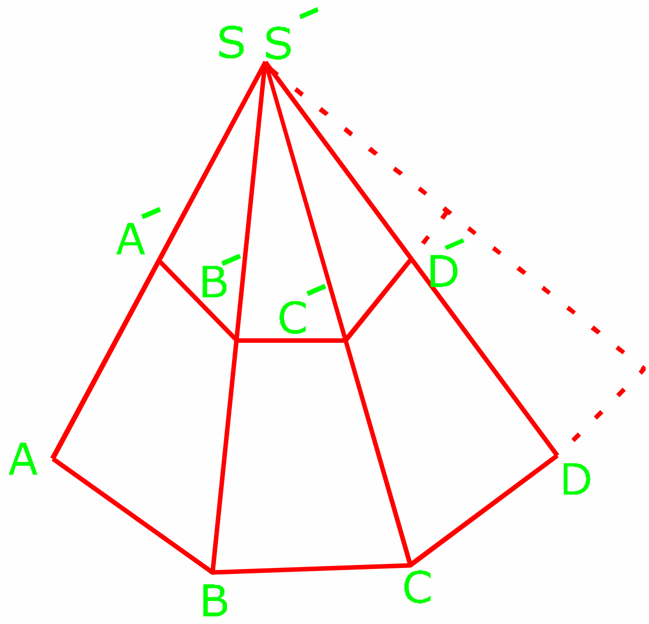


(ب)

(دراین مطلب تجانس به نسبت تجانس K حول مرکز تجانس S را با نماد (S,K) نشان می دهیم .)

قضیه۲. خطوطی که رأس های متناظر دو چند ضلعی را به هم وصل می کنند همرسند .(یعنی همه در یک نقطـه که مرکز تجانس است همدیگر را قطع می کنند)

اثبات. فرض کنید $ABCD\mathbf{L}$ و $A'B'C'D'\mathbf{L}$ دو چند ضلعی متجانس باشند و S محـل برخـورد خطـوط BB' و AA' باشد . برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که خط واصل بین دو راس متناظر C و C' نیز از S می گذرد.



(۱)

از برهان خلف استفاده می کنیم ، اگر CC' از S نگذرد در این صورت محل برخورد CC' با BB' را S' می نامیم :

$$S\overset{\Delta}{A}B \equiv S\overset{\Delta}{A'}B' \rightarrow \frac{SB'}{SB}=\frac{A'B'}{AB}=K \qquad (I)$$

$$S'\overset{\Delta}{B}C \equiv S'\overset{\Delta}{B'}C' \rightarrow \frac{S'B'}{S'B}=\frac{B'C'}{BC}=K \quad (II)$$

توجه شود که ما از تعریف تجانس نتیجه گرفتیم : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=K$ حال با توجه به رابطه های I و II داریم :

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{S'B'}{S'B}$$

و از طرفی می دانیم که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آنگاه : $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

بنابراین

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{S'B'}{S'B}\rightarrow\frac{SB'}{SB-SB'}=\frac{S'B'}{S'B-S'B'}\quad(III)$$

و همان طور که در شکل(۱) مشاهده می کنید ، داریم:

$$SB-SB'=S'B'-S'B=BB'$$

$$III\xrightarrow{\text{رابطه}}\frac{SB'}{BB'}=\frac{S'B'}{BB'}\rightarrow SB'=S'B'$$

پس S' بر S منطبق است و حکم ثابت شد.

مسئله ۱) مرحله دوم هفدهمین المپیاد ریاضی کشور ، مسئله ۵)

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مفروض است و نقاط P ، Q و R به ترتیب روی AB و BC و CA قرار دارند . نقـاط A' و B' و C' را به ترتیب روی PR و QP و RQ طوری در نظر می گیریم که AB با $A'B'$ و BC با $B'C'$ و CA بـا $C'A'$ مـوازی باشند . ثابت کنید که :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{\text{مساحت }\overset{\Delta}{PQR}}{\text{مساحت }\overset{\Delta}{A'B'C'}}$$

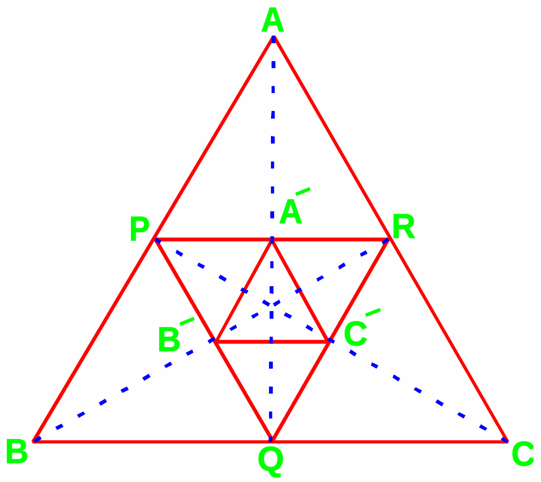
حل. طبق تعریف تجانس برای چند ضلعی ها چون تمام اضلاع دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ موازی انـد دو مثلـث متجانس اند . نسبت تجانس را λ فرض می کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\lambda$$

و طبق قضیه (۲) خطوط CC' و BB' و AA' همگی در یک نقطه مانند T همرسند . طبق تعریف تجانس بـرای نقطه داریم :

$$\frac{TA}{TA'}=\frac{TB}{TB'}=\frac{TC}{TC'}=\lambda$$

از نقطه T به نقاط P ، Q ، R خطوطی رسم می کنیم .



در دو مثلث $P\overset{\Delta}{A}T$ و $P\overset{\Delta}{A'}T$ ارتفاع های وارد بر AT و $A'T$ یکی هستند . بنابراین $\frac{S_{\overset{\Delta}{PAT}}}{S_{\overset{\Delta}{PA'T}}}=\frac{AT}{A'T}=\lambda$

به طریق مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{PAT}}}{S_{\overset{\Delta}{PA'T}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{PBT}}}{S_{\overset{\Delta}{PB'T}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{TBQ}}}{S_{\overset{\Delta}{TB'Q}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{TCQ}}}{S_{\overset{\Delta}{TC'Q}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{TCR}}}{S_{\overset{\Delta}{TC'R}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{TAR}}}{S_{\overset{\Delta}{TA'R}}}=\lambda \quad (I)$$

از طرفی می دانیم که :

$$K=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\mathbf{L}=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow\frac{a_1+a_2+\mathbf{L}+a_n}{b_1+b_2+\mathbf{L}+b_n}=k$$

پس از رابطه (I) نتیجه می شود :

$$\lambda=\frac{S_{\overset{\Delta}{PAT}}+S_{\overset{\Delta}{PBT}}+S_{\overset{\Delta}{TBQ}}+S_{\overset{\Delta}{TCQ}}+S_{\overset{\Delta}{TCR}}+S_{\overset{\Delta}{TAR}}}{S_{\overset{\Delta}{PA'T}}+S_{\overset{\Delta}{PB'T}}+S_{\overset{\Delta}{TB'Q}}+S_{\overset{\Delta}{TC'Q}}+S_{\overset{\Delta}{TC'R}}+S_{\overset{\Delta}{TA'R}}}$$

$$=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{PQR}}}\qquad (II)$$

از طرفی از تشابه مثلث های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می دانیم :

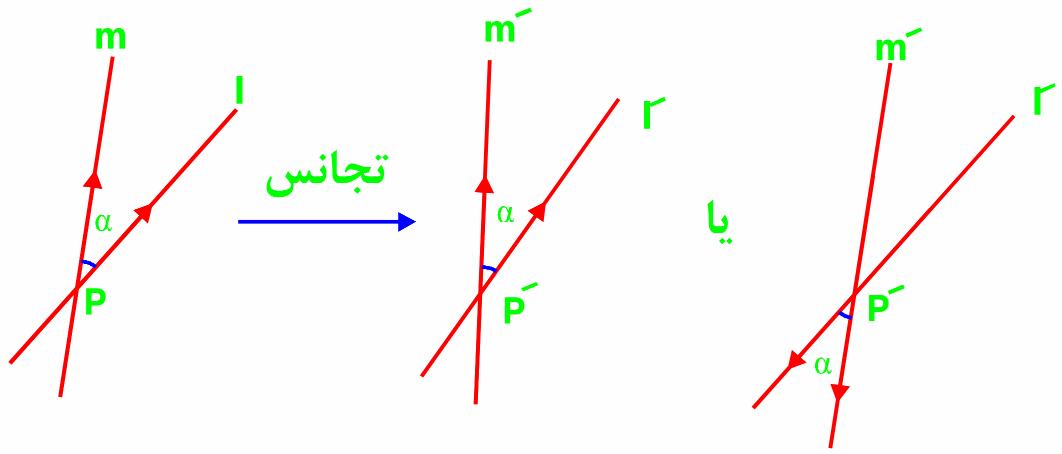
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\lambda^2\qquad (III)$$

از رابطه های (II) و (III) داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{PQR}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=\frac{\dfrac{S_{\overset{\Delta}{PQR}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}}{\dfrac{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda^2}}=\lambda$$

پس حکم ثابت شد .

نتیجه قضیه۱. زاویه های متناظر در دو شکل متجانس برابرند.

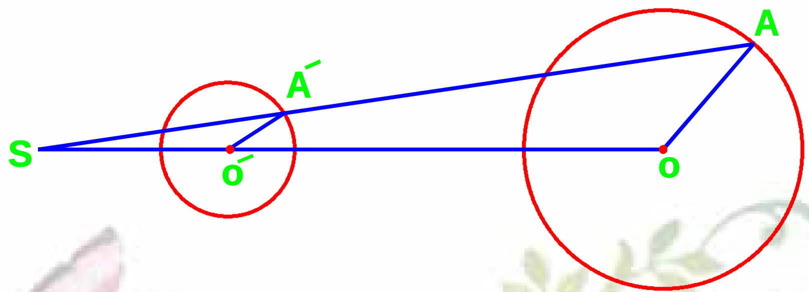


تجانس مستقِم　　　　　تجانس معکوس

(الف)　　　　　(ب)　　　　　(ج)

نکته. در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K ، اجزای نظیر در دو شکل با همین نسبت ، تجانس می یابند ، مانند : محل برخورد ارتفاع ها و مرکز ثقل در مثلث و غیره .

قضیه ۳. دو شکل متجانس مفروض اند ؛ اگر نقطه ای از شکل اول دایره ای را بپیماید ، نقطه ی متناظر در شکل دوم نیز دایره ای را خواهد پیمود .



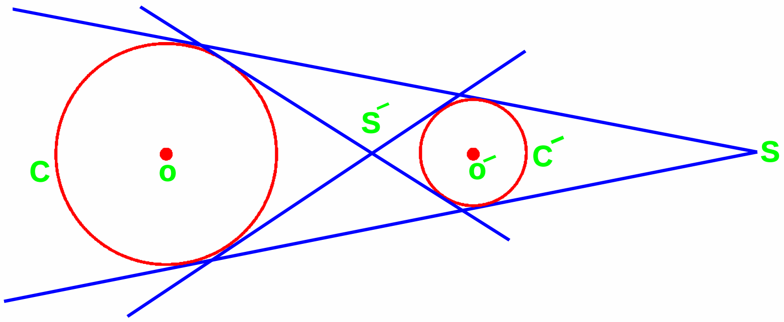
ملاحظه. خلاصه قضیه فوق مجانس هر دایره ، یک دایره است .

اثبات. تجانس (S,K) را در نظر بگیرید فرض کنید O مرکز و A نقطه ای از دایره اول باشد و O' و A' نقاط متجانس آن ها در دایره دوم باشند. با توجه به طریقه ی انتخاب این نقطه هاروشن است که مثلث های

SOA و $SO'A'$ متشابهند;چرا؟

پس $O'A'/OA = SA'/SA = K$ پس $O'A' = KOA$ و لذا طول $O'A'$ ثابت است ؛ یعنی وقتی کــه نقطــه ی A دایره ای را می پیماید نقطه ی متناظرش A' طوری حرکت می کند که فاصله اش تا نقطه ثابت O' مقــدار ثابــت $K.OA$ باقی می ماند . پس A' دایره ای به مرکز O' و شعاع $K.OA$ را می پیماید .

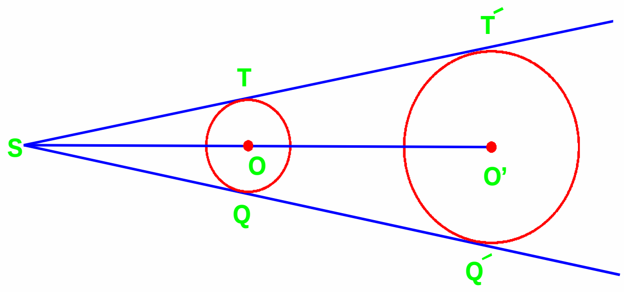
قضیه ۴. دو دایره غیر مساوی واقع در یک صفحه به طور مستقیم و معکوس مجانس یکدیگرند . مراکز تجــانس مستقیم و معکوس آنها به ترتیب محل برخورد مماس مشترک های خارجی و داخلی دو دایره می باشند .



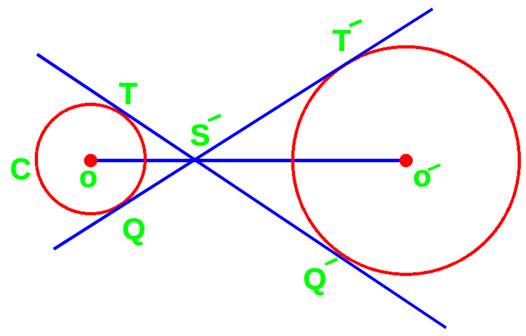
حالات مختلف دو دایره در تجانس

حالت اول. دو دایره متخارجند . در این حالت محل برخورد مماس مشترک های خارجی S ، مرکز تجانس مستقیم با نسبت تجانس $K = \frac{SO'}{SO} = \frac{ST'}{ST} = \frac{SQ'}{SQ}$ می باشد که T' و Q' به ترتیب مجانس T و Q هستند.(شکل الف)

محــل برخــورد مماس مــشترک هــای داخلــی S' ، مرکــز تجــانس معکــوس بــا نــسبت تجانس $-K = \frac{S'O'}{S'O} = \frac{S'T'}{S'Q} = \frac{S'Q'}{S'T}$ می باشد که T' و Q' به ترتیب مجانس های Q و T هستند.(شکل ب)



(الف)

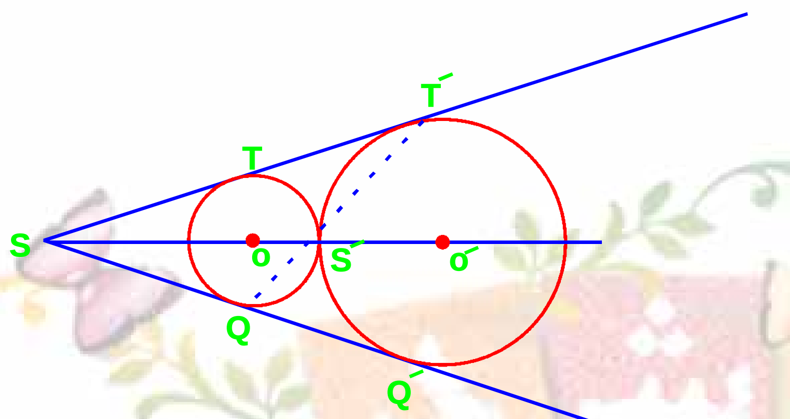


(ب)

ملاحظه. نسبت K در این قسمت برابر همان K می باشد که در قضیه ۳ گفته شد .

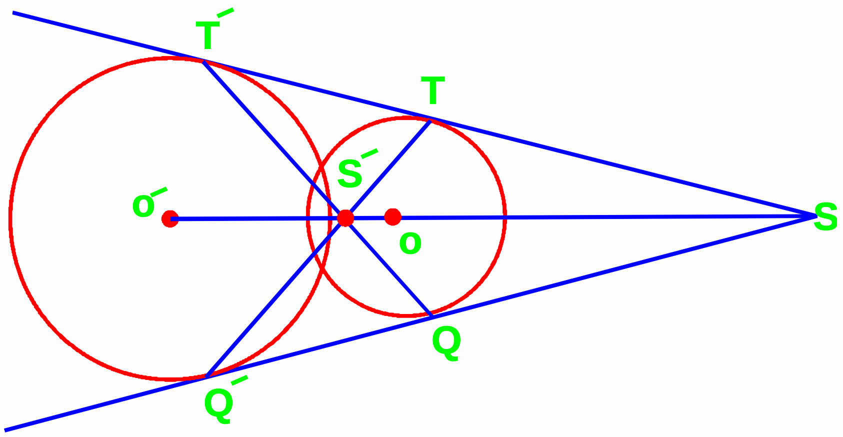
حالت دوم. دو دایره مماس خارجند. در این حالت محل برخورد مماس مشترک های خـارجی S ، مرکـز تجـانس مستقیم با نسبت تجانس $\frac{ST'}{ST}=\frac{SQ'}{SQ}=\frac{SO'}{SO}=K$ می باشد . (مطابق شکل) که T' و Q' به ترتیب مجانس های T و Q می باشند .

در ضمن محل تماس دو دایره یعنی S' مرکز تجانس معکوس با نـسبت تجـانس $\frac{S'T'}{S'Q}=\frac{S'Q'}{S'T}=\frac{S'O'}{S'O}=-K$ می‌باشد . (مطابق شکل زیر) که T' و Q' به ترتیب مجانس های Q و T می باشند .



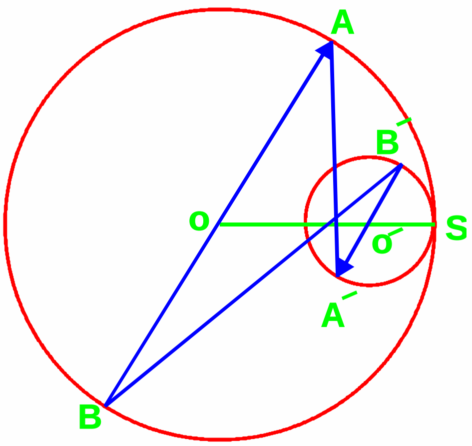
حالت سوم. دو دایره متقاطعند. در این حالت نیز محل برخورد مماس مشترک هـای خـارجی S مرکـز تجـانس مستقیم و با نسبت تجانس $K=\frac{SO'}{SO}=\frac{SQ'}{SQ}=\frac{ST'}{ST}$ می باشد که در این تجانس T' و Q' به ترتیب مجـانس هـای T و Q می باشند.

اگر در چهار ضلعی $Q'QTT'$ قطرها را رسم کنیم ، محل برخورد قطرها یعنی S'، مرکـز تجـانس معکـوس و بـا نسبت تجانس $-K=\frac{S'O'}{S'O}=\frac{S'Q'}{S'T}=\frac{S'T'}{S'Q}$ می باشد که در این تجـانس T' و Q' بـه ترتیـب مجـانس هـای Q و T می‌باشند. (مطابق شکل زیر)



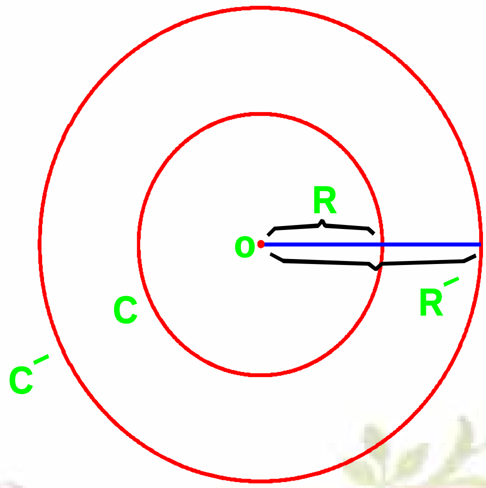
حالت چهارم. دو دایره مماس داخلند. در این حالت محل تماس دو دایره یعنی نقطه S مرکز تجانس مستقیم و با نسبت تجانس $K=\frac{SO'}{SO}$ می باشد.

اگر دو قطر موازی AB و $A'B'$ از دو دایره برگزینیم و قطرهای چهـار ضـلعی $ABA'B'$ را رسـم کنـیم و محـل برخورد قطرها را S' بنامیم . آنگاه S' مرکز تجانس معکوس و با نسبت تجانس $-K=\frac{S'O'}{S'O}=\frac{S'B'}{S'B}=\frac{S'A'}{S'A}$ می باشد ، که در این تجانس A' و B' به ترتیب مجانس های A و B می باشند. (مطابق شکل زیر)



حالت پنجم. یک دایره درون دایره دیگر

الف. دو دایره متحد المرکز هستند . در این حالت O مرکز دایره ، مرکز تجانس مستقیم می باشد و نسبت تجانس برابر $K = \frac{R'}{R}$ می باشد . در ضمن در تجانس معکوس مرکز تجانس محل برخورد دو خط موازی است که می توان گفت تجانس معکوس ندارد . تحقیق کنید با پذیرش اصل دزارگ چه اتفاقی می افتد .

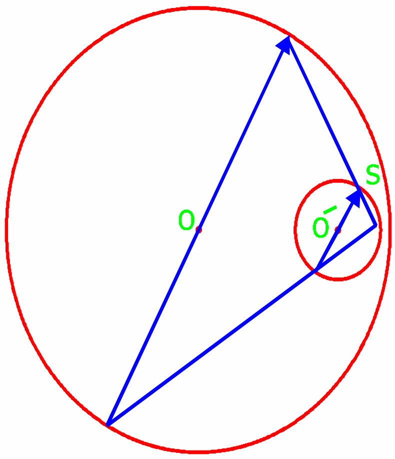


اصل دزارگ. هر خط راست نامحدود فقط یک نقطه بی نهایت دارد و تمام خط های موازی که یک امتداد را مشخص می کنند در آن نقطه بی نهایت دور مشترکند.

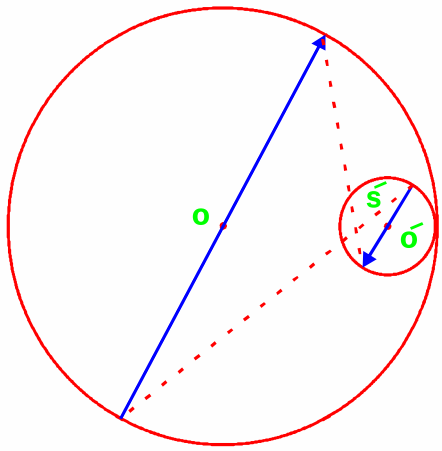
ب. دو دایره مرکز مشترک ندارد. دو قطر موازی از دو دایره را رسم می کنیم و سر پیکان ها $(\rightarrow)$ را به هم

وانتهای آن هارابه هم وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا این دو خط یکدیگر را در S ، مرکز تجانس مستقیم دو دایـره قطع کنند و نسبت تجانس $K=\frac{SO'}{SO}$ می باشد .(شکل الف)

دوقطر پادموازی از دو دایره را رسم می کنیم و سرپیکان هارابه هم وانتهای آن ها را به هم وصـل مـی کنـیم و امتداد می دهیم تا یکدیگر رادر S' مرکز تجانس معکـوس دو دایـره قطـع کننـد. در ضـمن نـسبت تجـانس در ایـن حالت $-K=\frac{S'O'}{S'O}$ می باشد . (شکل ب)



(الف)



(ب)

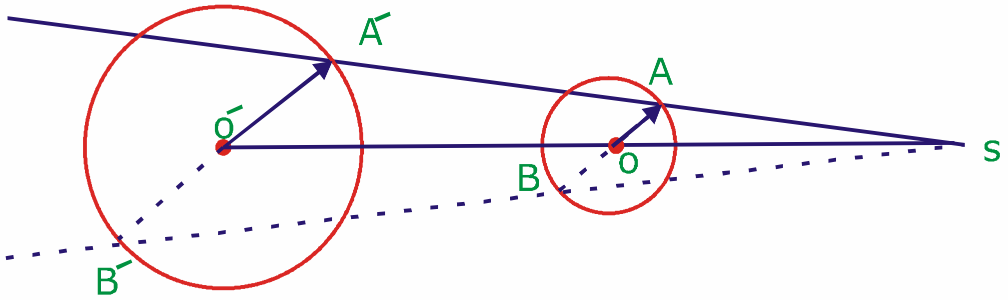
تذکر. بدیهی است که اگر شکل F' به مرکز تجانس O و نسبت تجـانس K ، مجـانس شـکل F باشـد ،آنگـاه F نیز به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $\frac{1}{K}$ مجانس F' می باشد پس در تمام حالت های گفته شده برای دایره مـی توان به جای K مقدار $\frac{1}{K}$ و به جای $-K$ مقدار $\frac{-1}{K}$ را قرار داد .

ویژگی های تجانس در دایره

ویژگی ۱. اگر دو دایره مجانس مستقیم یکدیگر باشند ، مرکز تجانس محل تلاقی خط المرکزین با خطی است کـه

انتهای دو شعاع موازی و هم جهت از دو دایره را به هم وصل می کند .

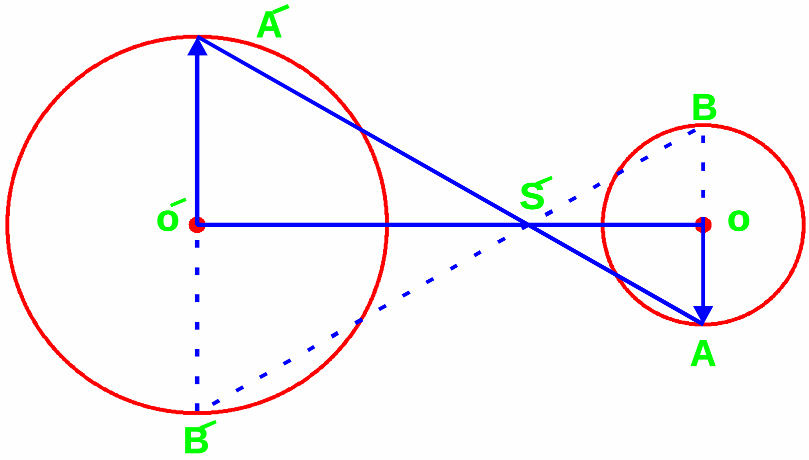
در ضمن نسبت تجانس برابر $\frac{R}{R'}$ یا $\frac{R'}{R}$ می باشد.(مطابق شکل زیر)



اثبات ویژگی ۱. شعاع های موازی OA و $O'A'$ را امتداد می دهیم تا به ترتیب در نقاط B و B' دوایر C و C' را قطع کنند . چهار ضلعی $AA'B'B$ ذوزنقه است (چرا؟) پس طبق مسئله۱ مرکز تجانس بر روی خطوط AA' و OO' قرار دارد که O و O' به ترتیب وسط های AB و $A'B'$ می باشند . از تشابه مثلث های $S\overset{\Delta}{O'}A'$ و $S'\overset{\Delta}{O}A$ نتیجه می شود که نسبت تجانس برابر $\frac{R}{R'}=\frac{OA}{OA'}$ یا $\frac{R'}{R}=\frac{OA'}{OA}$ می باشد .

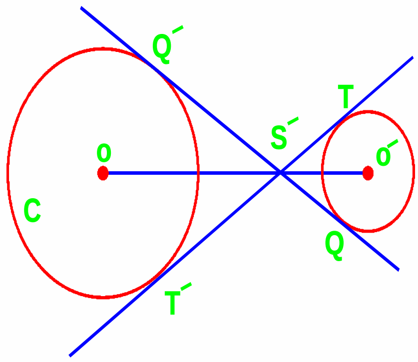
ویژگی ۲. اگر دو دایره مجانس معکوس هم باشند . مرکز تجانس محل تلاقی خط المرکزین با خطی است که انتهای دو شعاع موازی و با جهت های مخالف را به هم وصل می کند . و نسبت تجانس برابر $\frac{-R'}{R}$ یا $\frac{-R}{R'}$ می باشد .

(مطابق شکل زیر)

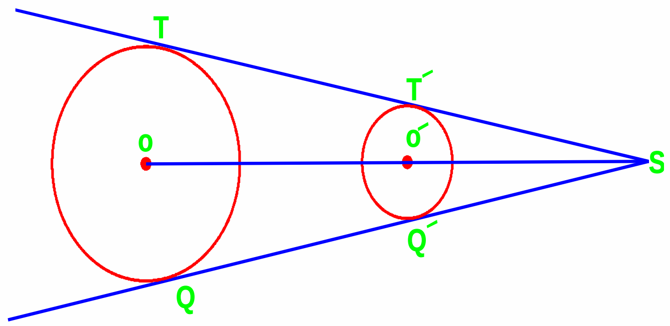


اثبات به عهده خواننده (راهنمایی: اثبات مانند ویژگی ۱ می باشد .)

ویژگی ۳. مماس مشترک های خارجی دو دایره از مرکز تجانس مستقیم آنها می گذرند و مماس مشترک های داخلی دو دایره از مرکز تجانس معکوس آن دو دایره می گذارند .(شکل های الف و ب)



(ب)



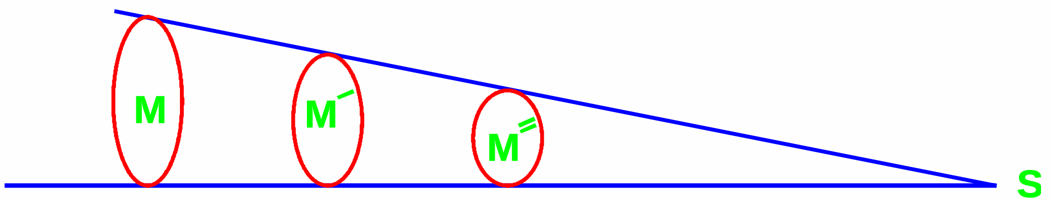
(الف)

ویژگی ۴. مجانس هر دایره به شعاع R ، دایره ای است که شعاع آن برابر است با شعاع همان دایره در قدر مطلق نسبت تجانس :

$$R' = |K|.R$$

ویژگی ۵. مجانس هر زاویه ، زاویه ای است مساوی و هم جهت با آن .

ویژگی ۶. اگر شکل M' مجانس M نسبت به مرکز S و با نسبت تجانس K و M'' مجانس M' نسبت به مرکز S و با نسبت تجانس K' باشند . M'' نیز مجانس M نسبت به مرکز S و با نسبت تجانس K' می باشد .(مطابق شکل زیر)

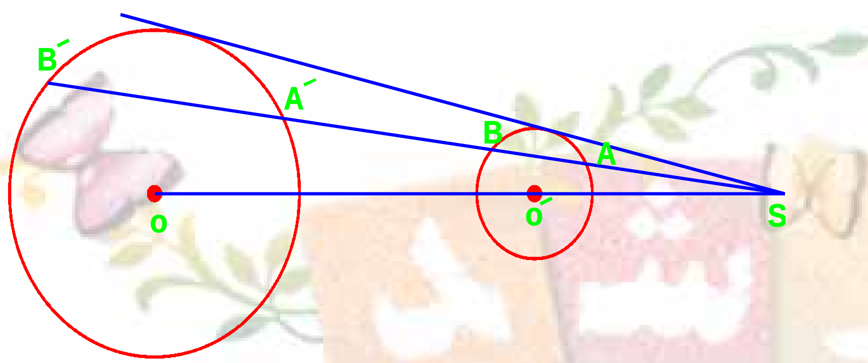


ویژگی ۷. اگر نقاط M' و M'' مجانس های نقطه M در دو تجانس به مرکز S و با نسبت های تجانس K و K' باشند ، دو نقطه M' و M'' نیز مجانس یکدیگر با همان مرکز تجانس S و نسبت تجانس $\frac{K}{K'}$ یا $\frac{K'}{K}$ نخواهند بود .

تذکر. ویژگی های ۵، ۶، ۷ در هر شکلی صادق هستند .

قضیه ۵ الف. هر خط گذرنده از مرکز تجانس مستقیم دو دایره ی متجانس ، در صورتی که با دو دایره برخورد کند ، نقاط برخورد این خط با دوایر ، مجانس یکدیگرند.

ملاحظه. در صورتی که خط با هر دایره در بیش از دو نقطه برخورد کند نقاط برخورد اول مجانس هم و نقاط برخورد دوم مجانس یکدیگر هستند.



اثبات. نشان می دهیم که نقاط اول برخورد مجانس یکدیگرند .(مطابق شکل) اگر A با A' و B با B' مجانس هم

باشند مسئله حل شده است . می خواهیم مجانس نقطه A به مرکز تجانس S و نسبت تجانس $\frac{R'}{R}$ را بیابیم . مـی دانـیم این نقطه روی خط SA قرار دارد (طبق تعریف تجانس برای نقطه) از طرفی می دانیم روی دایـره C' نیـز قـرار دارد . بنابراین یا این نقطه A' است یا B' (چون اشتراک این دو مکان هندسی ، نقاط A' و B' می باشد) اگر A' مجـانس A باشد که مسئله حل شده است در غیر این صورت از برهان خلف استفاده می کنیم ، فرض می کنیم کـه A' مجـانس A نباشد ، پس طبق آنچه که گفته شد B' باید مجانس A باشد . چون در هر تجانس هر نقطه تنها به یک نقطه نظیـر مـی شود نتیجه می گیریم A' نیز مجانس B است . یعنی :

$$\frac{SB'}{SA}=\frac{SA'}{SB}=\frac{R'}{R}=K$$

ازآنجا داریم :

$$\frac{SB'}{SA'}=\frac{SA}{SB} \qquad (I)$$

چون B نقطه دوم فرض شد ، داریم: $SA<SB$. از طرفی B' نیز نقطه دوم فرض شده بود ، پس : $SA'<SB'$

$$SA<SB \rightarrow \frac{SA}{SB}<1 \qquad (II)$$

$$SA'<SB' \rightarrow \frac{SB'}{SA'}>1 \qquad (III)$$

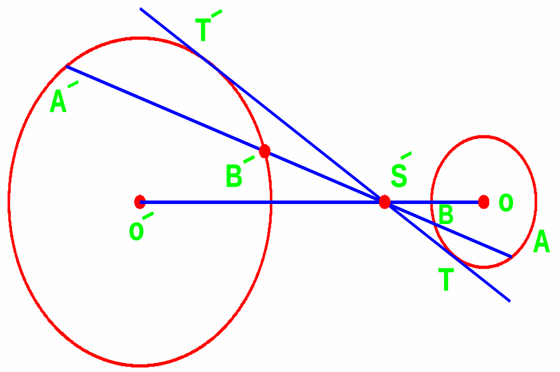
با توجه به رابطه های (II) و (III) داریم $\frac{SB'}{SA'}>1>\frac{SA}{SB}$ که با تساوی رابطه (I) تناقض دارد .

لذا فرض اولیه مبنی بر اینکه مجانس A است ، غلط است پس A' مجانس A می باشد و اثبات کامل است . برای نقاط دوم نیز اثبات متشابه است .

قضیه ۵ ب. هر خط گذارنده از مرکز تجانس معکوس دو دایره ، در صورتی که با دو دایـره برخـورد کنـد ، نقـاط برخورد این خط با دوایر ، مجانس یکدیگرند .

ملاحظه. در صورتی که خط با هر یک از دایره ها در بیش از دو نقطه برخورد کند ، نقاط برخورد اول هر دایـره بـا خط مذکور با نقاط برخورد دوم دایره دیگر مجانس یکدیگرند .

به عنوان مثال در شکل زیر، T و T' مجانس هم هستند . هم چنین A با A' و B بـا B' مجانـس یکـدیگر مـی باشند .

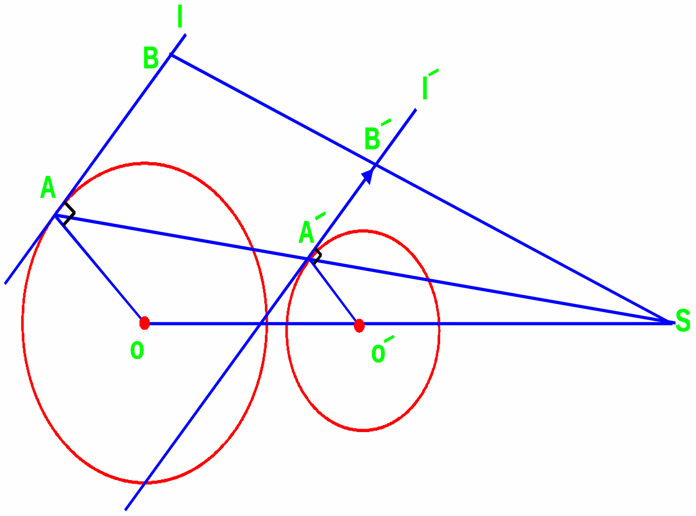


اثبات. مانند قضیه۵ الف اثبات می شود ، اثبات به عهده خواننده می باشد .

قضیه ۶. مماس های رسم شده در دو نقطه مجانس از دو دایره مجانس ، با هم موازیند .

اثبات. خط مماس بر دایره C در نقطه A را l می نامیم . خط l' مجانس خط l می باشد و از A' می گذرد . (مطابق شکل زیر)

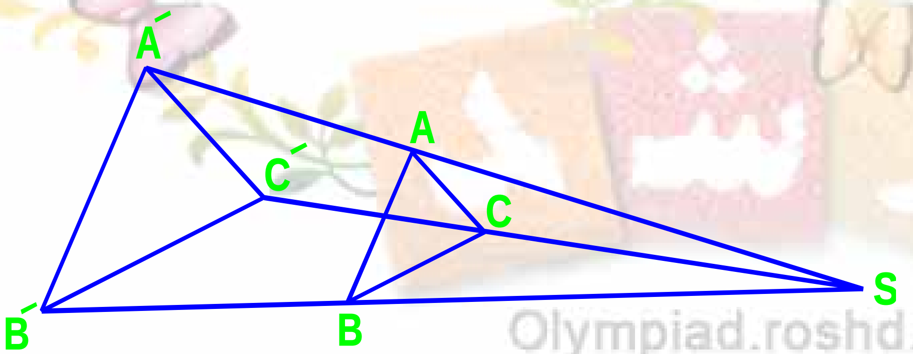
روی l نقطه دیگری (به جز A) مانند B در نظر می گیریم ، مجـانس آن B' روی l' قـرار دارد . طبـق تعریـف تجانس برای شکل ، زاویه ها در تجانس ثابت می مانند . پس زاویه $\angle O'A'B'$ با زاویه $\angle OAB$ برابر خواهد بود ، بنابراین $\angle O'A'B' = \angle OAB = 90$ یعنی شعاع $O'A'$ بر خط l' در نقطه ی تماس آن با دایره C' عمود می باشد . و این بـه آن مفهوم است که l' مماس در نقطه A' بر دایره C' می باشد . همان طور که گفته شد l و l' مجانس همنـد و لـذا مـوازی خواهند بود .



عکس قضیه ۶. اگر دو مماس از دو دایره مجانس با هم موازی باشند ، نقطه تماس آن ها با دایره ها ، مجانس یکدیگرند .

اثبات. چون دو خط l و l' با هم موازی اند ، OA بر l و $O'A'$ بر l' عمود است . بنابراین $OA \| O'A'$ ، یعنی OA و $O'A'$ دو شعاع موازی از دو دایره اند . A و A' و S (مرکز تجانس) بر روی یک خط قرار دارند (طبق ویژگی ۱) . حال چون خط AA' از S می گذرد ، و دو دایره را در A و A' قطع می کند ، A و A' مجانس یکدیگرند . (طبق قضیه ۵ الف و ب)

قضیه ۷. هر گاه در دو مثلث متشابه ، دو رأس از یکی با رئوس متناظرشان در مثلث دیگر با مرکز تجانس S و نسبت تجانس K یا $\frac{1}{K}$ مجانس باشند ، رأس سوم این دو مثلث نیز با مرکز S و نسبت تجانس K یا $\frac{1}{K}$ می باشند .



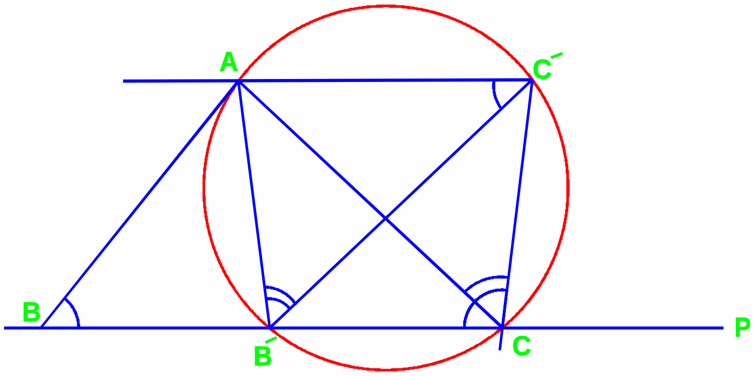
اثبات. فرض کنید که A با A' و B با B' به مرکز S و با نسبت تجانس K مجانس هم باشند. $\left(\frac{A'B'}{AB}=K\right)$

چون پاره خط $A'B'$ مجانس AB می باشد با آن موازی است و از تشابه دو مثلث می دانیم که $\angle A'B'C'=\angle ABC$ است. از طرفی چون AB با $A'B'$ موازی است پس $B'C'\|BC$ می باشد. S محل برخورد AA' و BB' می باشد و طبق قضیه ۲ برای سه ضلعی (مثلث)، CC' نیز از S می گذرد و طبق قضیه تالس در مثلث $\Delta SB'C'$ داریم $\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}$ و چون $\frac{SB'}{SB}=K$ داریم $\frac{SC'}{SC}=K$ که همان نسبت تجانس است. طبق تعریف تجانس برای نقطه چون C، C' و S بر روی یک خط قرار دارند و $\frac{SC'}{SC}=K$ می باشد، C' مجانس C می باشد.

قضیه ۸. اگر یک رأس از مثلثی، ثابت باشد، رأس دوم آن خط راست مفروض را بپیماید و مثلث همواره با مثلثی مفروض، متشابه باشد، آنگاه رأس سوم مثلث، خط راستی را می پیماید.

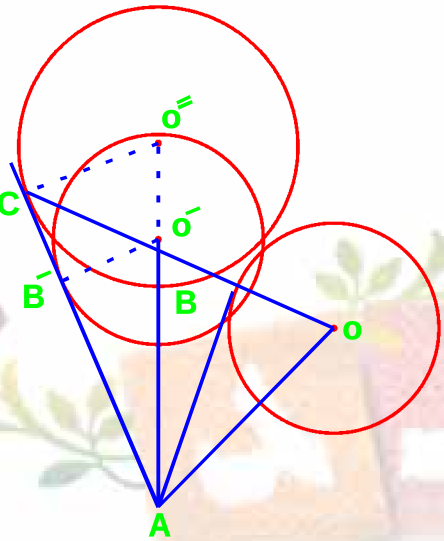
اثبات. فرض کنید A رأس ثابت باشد، $\overset{\Delta}{ABC}$ حالتی از مثلث متغیر باشد. (مطابق شکل زیر) که قاعده BC از مثلث روی خط مفروض P قرار گیرد (P خطی است که رأس دو مثلث، B روی آن حرکت می کند) و $\overset{\Delta}{AB'C'}$ حالت دلخواه دیگری از مثلث متغیر را نشان می دهد. از تشابه مثلث های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AB'C'}$ نتیجه می شود که زاویه های $\angle AC'B'$ و $\angle ACB'$ برابرند و در نتیجه چهار ضلعی $AB'CC'$ محاطی می باشد. از محاطی بودن $AB'CC'$ نتیجه می گیریم که زاویه های $\angle ACC'$ و $\angle AB'C'$ نیز با هم برابرند. می دانیم که زاویه ی $\angle AB'C'$ برابر زاویه ی $\angle ABC$ است (طبق فرض مسئله) بنابراین $\angle AB'C'=\angle ABC=\angle ACC'$. از طرفی $\angle BCC'=\angle BCA+\angle ACC'$ و طبق آنچه گفته شد $\angle ACC'$ مقدار ثابتی است (یعنی $\angle ABC$) پس زاویه BCC' نیز مقدار ثابتی است. پس مکان هندسی رأس سوم مثلث یعنی C' خطی است که از نقطه ثابت C عبور می کند و با خط P زاویه ی ثابت $\angle BCC'$ را می سازد.

پس CC' خط ثابتی است و قضیه ثابت شده است.



قضیه ۹. اگر یک رأس مثلث متغیری ثابت باشد ، رأس دوم دایره ای مفروض را بپیماید و مثلث همواره با مثلثی مفروض متشابه باشد ، رأس سوم این مثلث نیز یک دایره را می پیماید .

اثبات. فرض کنید مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ یک حالت از حالتهای متغیر مثلث مذکور باشد که در این حالت A رأس ثابت و B روی دایره مفروض به مرکز O ، قرار دارد . روی خط AC ، پاره خط AB' را برابر پاره خط AB جدا می کنیم و روی پاره خط AB' مثلث $\overset{\Delta}{AO'B'}$ را همنهشت با مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ رسم می کنیم به طوری که دو مثلث را بتوان با دوران حول A بر روی یکدیگر منطبق کرد .



از تساوی دو مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ و $\overset{\Delta}{AO'B'}$ داریم: $\angle O'AB' = \angle OAB$ با اضافه کردن مقدار زاویه $\angle BAO'$ به دو طرف تساوی قبل داریم :

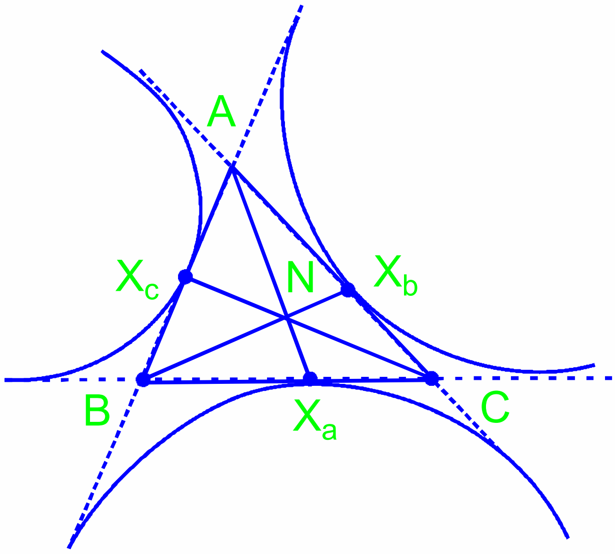
$$\angle O'AB' + \angle BAO' = \angle OAB + \angle BAO'$$

یا $\angle BAB' = \angle OAO'$. از طرفی می دانیم که زاویه $\angle BAB'$ همان زاویه $\angle BAC$ می باشد . پس داریم $\angle OAO' = \angle BAB' = \angle BAC$ چون $\angle BAC$ ثابت است ، پس زاویه OAO' نیز ثابت است و یا به عبارتی خط AO' با خط ثابت AO زاویه ثابتی می سازد ، بنابراین راستای AO' ثابت است و به علاوه ، AO' با طول AO برابر است (طبق تساوی دو مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ و $\overset{\Delta}{AO'B'}$) پس نقطه O' ثابت است . از طرفی باز هم طبق تساوی مثلث های مذکور داریم: $O'B' = OB$ پس B' دایره ای به مرکز O' و شعاع $O'B'$ را می پیماید .

می دانیم که $AB' = AB$ و چون $\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AB'} = K$ پس C مجانس B' حول مرکز A و با نسبت تجانس $K = \frac{AC}{AB'}$ می باشد و چون B' یک دایره را می پیماید C نیز یک دایره را می پیماید (طبق قضیه ۳) . در ضمن O'' مرکز دایره گذرنده از C ، مجانس نقطه O' مرکز دایره گذرنده از B' می باشد و شعاع این دایره برابر $O''C = KO'B'$ می باشد (طبق ویژگی ۴) و قضیه اثبات شده است .

نقطه ناگل. از آنجا که نقطه ی ناگل یک مثلث بسیار مهم و کاربردی در سوالات المپیادها می باشد این نقطه را به عنوان یک زیر بخش از تجانس بررسی می نماییم.

قضیه ۱۰. تعریف نقطه ی ناگل : خطوطی که از رأس های یک مثلث به نقطه های تماس ضلع مقابل با دایره محاطی خارجی متناظر رسم می شوند ، همرس اند. نقطه ی همرسی این خطوط را با N نمایش داده و نقطه ناگل مثلث می گویند (مطابق شکل زیر)



اثبات. از هندسه مقدماتی می دانیم که :

$$CX_a=\frac{c+a-b}{2}, BX_a=\frac{b+a-c}{2} \text{ و } CX_b=\frac{c+b-a}{2}, AX_b=\frac{a+b-c}{2} \text{ و } AX_c=\frac{a+c-b}{2} \text{ و}$$

$BX_c=\dfrac{b+c-a}{2}$ (رجوع کنید به هندسه مسطحه ی کورت صفحه ۸۳ قضیه ۱۶۰)

طبق عکس قضیه سوا داریم :

$$\left(\frac{BX_a}{CX_a}\right)\times\left(\frac{CX_b}{AX_b}\right)\times\left(\frac{AX_c}{BX_c}\right)=\left(\frac{b+a-c}{c+a-b}\right)\times\left(\frac{c+b-a}{a+b-c}\right)\times\left(\frac{a+c-b}{b+c-a}\right)=1$$

پس AX_a و BX_b و CX_c همرس اند .

قضیه ۱۱. مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث : نقطه ناگل مثلث میانک آن مثلث است .

اثبات. فرض کنید که u پای نیمساز مرسوم از A بر ضلع BC باشد . X و X_a به ترتیب محل تماس دایره هـای محاطی داخلی و مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، با ضلع BC باشند . I و I_a مرکز دایره های محاطی داخلی و خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$ می باشند و L محل برخورد امتداد خط IX با خط AX_a باشد . (شـکل الـف) دو مثلـث $\overset{\Delta}{IUX}$ و $\overset{\Delta}{I_aX_aU}$ متـشابهند . زیـرا $\angle I_aX_aU=90=\angle IXU$ و $\angle I_aUX_a=\angle IUX$. هم چنین دو مثلث $\overset{\Delta}{AIL}$ ، $\overset{\Delta}{AI_aX_a}$ نیز متشابهند . زیـرا IL

موازی $I_a X_a$ می باشد . از تشابه دو مثلث اول داریم :

$$\frac{XI}{X_a I_a}=\frac{IU}{UI_a} \qquad (I)$$

و از تشابه دو مثلث دوم داریم :

$$\frac{IL}{X_a I_a}=\frac{IA}{AI_a} \qquad (II)$$

طرف دوم تساوی های (I) و (II) برابرند یعنی $\frac{IA}{AI_a}=\frac{IU}{UI_a}$ زیرا همان طور که در (شکل ب) می بینید داریم

: $IB \perp BI_a$ چون I و I_a نیمسازه های داخلی و خارجی اند .

در مثلث $\overset{\Delta}{ABI}$ داریم :

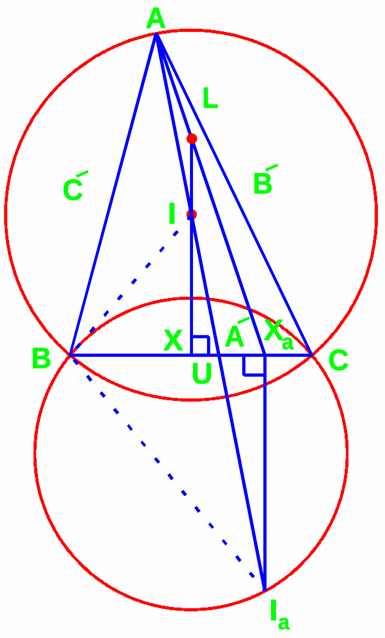
$$\frac{AI}{Sin\alpha}=\frac{BI}{\text{SinA}} \qquad (۱)$$

و در مثلث $\overset{\Delta}{ABI_a}$ داریم :

$$\frac{AI_a}{Sin(90+\alpha)}=\frac{BI_a}{SinA} \qquad (۲)$$

و در مثلث $\overset{\Delta}{BUI}$ داریم :

$$\frac{IU}{Sin\alpha}=\frac{BI}{Sin\beta} \qquad (۳)$$



(الف)

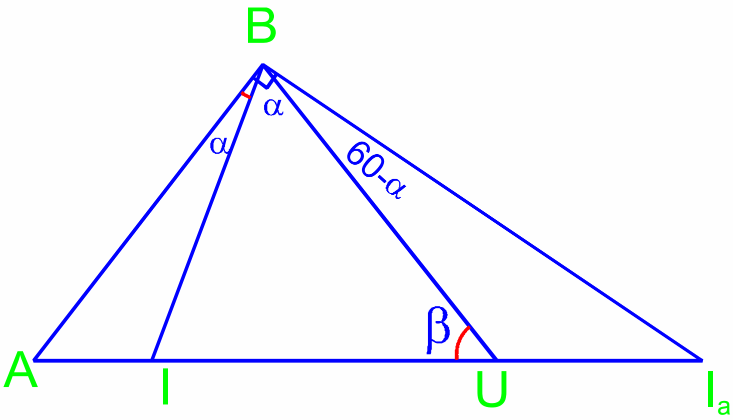
و در مثلث $\overset{\Delta}{BUI_a}$ داریم :

$$\frac{I_aU}{Sin(90-\alpha)}=\frac{BI_a}{Sin(180-\beta)}$$

چون داریم $Sin(90+\alpha)=Sin(90-\alpha)=Cos\alpha$ و $Sin(180-\beta)=Sin\beta$ با تقسیم روابط(۱) بـر(۲) و(۳) بر (۴) داریم

$$\frac{(1)}{(2)}=\frac{AI}{AI_a}=\frac{BI}{BI_a}\cdot\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} \qquad (۵)$$

$$\frac{(3)}{(4)}=\frac{IU}{UI_a}=\frac{BI}{BI_a}\cdot\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} \qquad (۶)$$



(ب)

چون طرف دوم روابط (۵) و (۶) برابرند ، داریم :

$$\frac{AI}{AI_a}=\frac{IU}{UI_a}$$

پس در رابطه ی (I) و (II) طرف دوم با هم برابرند بنابراین طرف اول نیز با هم برابر خواهند بود ، پس :

$$\frac{XI}{X_aI_a}=\frac{IL}{X_aI_a}\Rightarrow XI=IL$$

از طرفی از روابط طولی مماس ها در هندسه می دانیم : $BX=CX_a=P-b$ ($P=\frac{a+b+c}{2}$ رجوع شود به هندسه ی مسطحه ی کورت صفحه ی ۸۳ قضیه ۱۶۰) بنابراین وسط ضلع BC یعنی A' ، وسط پاره خط XX_a نیز خواهد بود ، یعنی $A'X=A'X_a$. بنابراین طبق عکس قضیه ی تالس در مثلث $\overset{\Delta}{XLX_a}$ چون پاره خط IA' اضلاع XL و XX_a را نصف کرده است ، پس با پاره خط LX_a موازی است و داریم : $IA'\|LX_a$ و در نتیجه $IA'\|AX_a$ (چرا؟)

پس می توان گفت که پاره خط IA' با تجانس به مرکز G و نسبت ۲ به AX_a می رود ، زیرا پاره خط های IA' و AX_a موازی اند و از دو نقطه ی مجانس A و A' می گذرند . به طریق مشابه IB' و IC' نیز مجانس های خطوط BX_b و CX_c با مرکز G و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ یا 2 می باشند که X_b و X_c به ترتیب پای مماس های دایره محاطی خارجی

مثلث ABC وارد بر اضلاع AC و AB می باشند . بنابراین چون AX_a و BX_a و CX_a در نقطه ناگل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، همرسند ، مجانس های آنها یعنی IA' و IB' و IC' نیز در نقطه ی ناگل مثلث $A'B'C'$ همرسند . چون خط های IA' و IB' و IC' فقط در یک نقطه برخورد دارند ، که همان نقطه ناگل مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می باشد و از طرفی همگی از I نیز عبور می کنند (چرا؟) پس I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ بر N' منطبق است . و حکم ثابت شده است .

نتیجه. اگر N نقطه‌ی ناگل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، و مرکز دایره محاطی داخلی آن مثلث باشد . آنگاه N و I با G یعنی مرکز ثقل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ هم خط اند و داریم $2IG = GN$.

اثبات. طبق آنچه که در اثبات قضیه ی قبل گفته شد ، I همان N' یعنی نقطه ی ناگل مثلث میانک $\overset{\Delta}{ABC}$ ، یعنی $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می باشد . چون مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ با نسبت تجانس ۲- و با مرکز تجانس G به مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مجانس می شود (چرا ؟) بنابراین N مجانس N' خواهد بود با همان نسبت تجانس ۲- و مرکز تجانس G . پس خط NN' از مرکز تجانس یعنی G می گذرد و داریم $GN = 2GN'$. از آنجا که N' بر I منطبق است داریم $GN = 2GI$.

مسئله ی ۲. دایره محاطی داخلی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در نقطه K بر ضلع BC مماس است . ثابت کنید ، وسط AK و وسط BC و مرکز دایره محاطی داخلی بر یک استقامت اند .

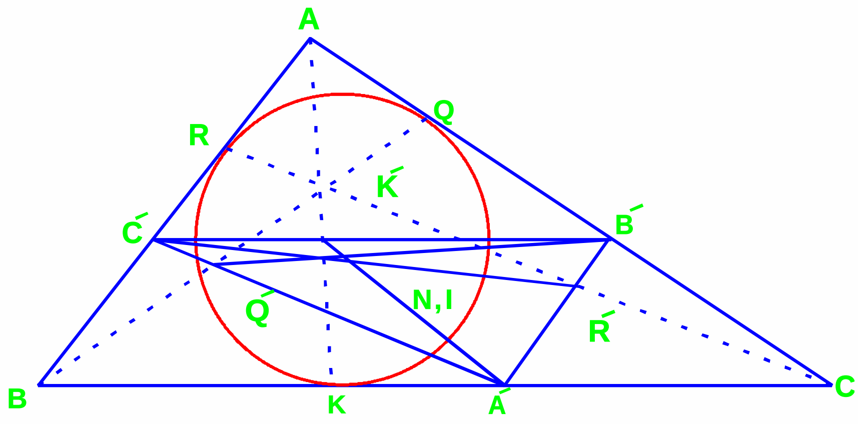
حل. فرض کنید AA' و BB' و CC' به ترتیب میانه های اضلاع BC ، AC و AB باشد و K' و Q' و R' اواسط پاره خط های AK ، BQ ، CR باشند که K ، Q ، R به ترتیب محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با اضلاع AB, CA, BC می باشند . (شکل الف) در مثلث $\overset{\Delta}{AKC}$ ، $K'B'$ اضلاع AK و AC را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کرده است . پس طبق عکس قضیه تالس $K'B'$ با $CK(BC)$ موازی است به طور مشابه K', C' نیز میانه های مثلث AKB

بوده پس طبق قضیه عکس قضیه تالس $C'K'$ موازی $BK(BC)$ می باشد چون خطوط $K'B'$ و $K'C'$ با BC موازی اند . پس با هم موازی اند پس K' روی خط $B'C'$ قرار دارد . به طریق مشابه Q' و R' به ترتیب روی $A'C'$ و $A'B'$ قرار دارند .

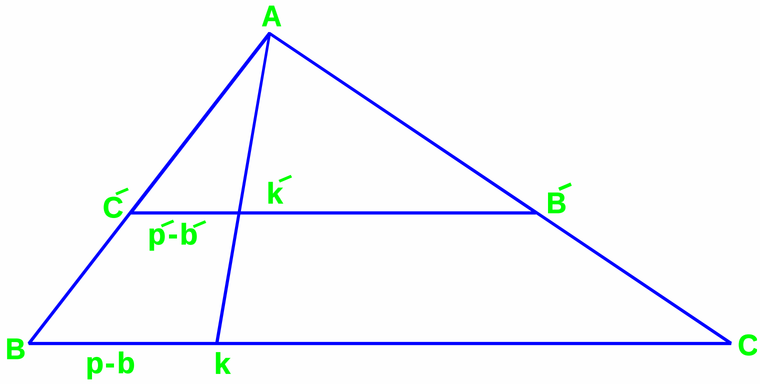
از طرفی از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABK}$ و $\overset{\Delta}{AB'K'}$ (چرا ؟) داریم :

$$\frac{C'K'}{BK}=\frac{AC'}{AB}=\frac{1}{2}$$

پس $C'K'=\frac{BK}{2}$. از فرمول نصف محیط و اضلاع برای اندازه پای مماس داخلی و خارجی داریم $\frac{BK}{2}=\frac{P-b}{2}$ یا $\frac{BK}{2}=\frac{P}{2}-\frac{b}{2}$ (شکل ب) از طرفی می دانیم که اگر P' نصف محیط مثلث $A'B'C'$ و b' ضلع روبه رو به رأس B' باشد ، $b=2b'$ و $P=2P'$ پس $C'K'=\frac{BK}{2}=P'-b'$ پس K' و Q' و R' به ترتیب محل تماس دایره محاطی داخلی مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ با اضلاع $B'C'$ و $A'C'$ و $A'B'$ می باشند ، پس طبق قضیه ۱۰ پاره خط های $A'K'$ و $B'Q'$ و $C'R'$ همرسند و نقطه ی همرسی آنها N' یعنی نقطه ناگل مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می باشد . طبق قضیه ۱۱ مرکز دایره محاطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ یعنی I بر N' ، نقطه ی ناگل مثلث میانه ای آن یعنی $A'B'C'$ منطبق است . پس چون K' ، A' و N' روی یک خط قرار دارند ، K' و A' و I نیز روی یک خط قرار دارند .

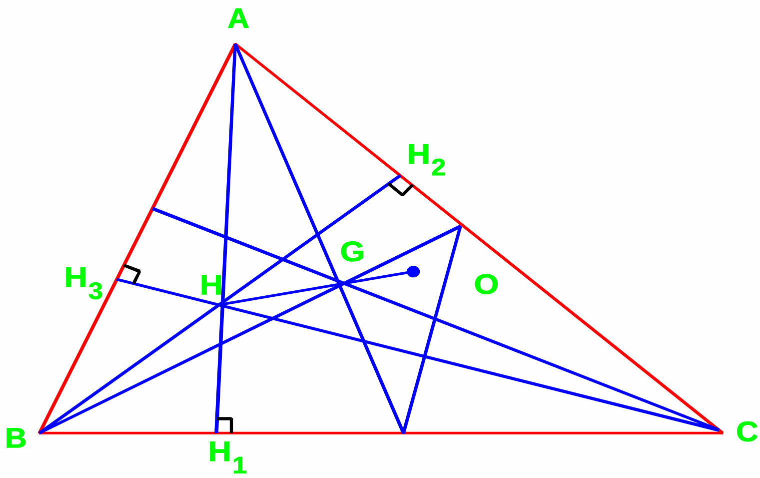


(الف)



(ب)

مسئله ۳(خط اولر). در هر مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{ABC}$ ، O مرکز دایره محیطی ، G محل تلاقی میانه ها و H محل تلاقی ارتفاع ها ، بر یک استقامت اند . داریم : $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ و بنابراین $\overline{OH} = 3\overline{OG}$. خط راست OGH را خط اولر مثلث ABC می نامیم . (مطابق شکل زیر)



حل. فرض کنید N, M و P وسط های اضلاع AC, BC و AB باشند . چون اضلاع دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $M\overset{\Delta}{N}P$ نظیر به نظیر موازی اند ، این دو مثلث مجانس هستند . پس AM و BN و CP در نقطه ای مانند G همرس اند و آن مرکز تجانس است به نسبت ۲- یا $-\frac{1}{2}$ (توجه کنید که این خود اثباتی دیگر برای همرسی میانه هاست) حال توجه کنید که مجانس ارتفاع AA' از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، خطی است که از M بر PN عمود می شود ، پس بر BC نیز عمود است ، یعنی عمود منصف BC است . پس تحت این تجانس ارتفاع های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به عمود منصف ها تبدیل می شوند و لذا H ،محل تلاقی ارتفاع هابه O محل تلاقی عمود منصف ها (یعنی مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$) می رود . به عبارت دیگر نقاط H و G و O بر یک استقامتند و G بین O و H قرار دارد و با توجه به نسبت تجانس داریم: $HG = 2GO$ یا $OH = 3OG$

مسئله‌ی۴. اگر W مرکز دایره محیطی مثلث میانه ای مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، یعنی $M\overset{\Delta}{N}P$ باشد ، ثابت کنید G, O, W و H بر روی یک خط قرار دارند و W وسط OH قرار دارد.(مطابق شکل مسئله ۵)

حل. در تجانس به مرکز G و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ ، نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به نقطه W ، مرکز

دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ می رود ، پس W نیز روی OH ، یعنی خط اولر قرار دارد و داریم $\overline{WG}=-\frac{1}{2}\overline{OG}$ ،

بنابراین :

$$OW=\overline{OG}+\overline{GW}=\overline{OG}+\frac{1}{2}\overline{OG}=\frac{3}{2}\overline{OG}=\frac{1}{2}\overline{OH}$$

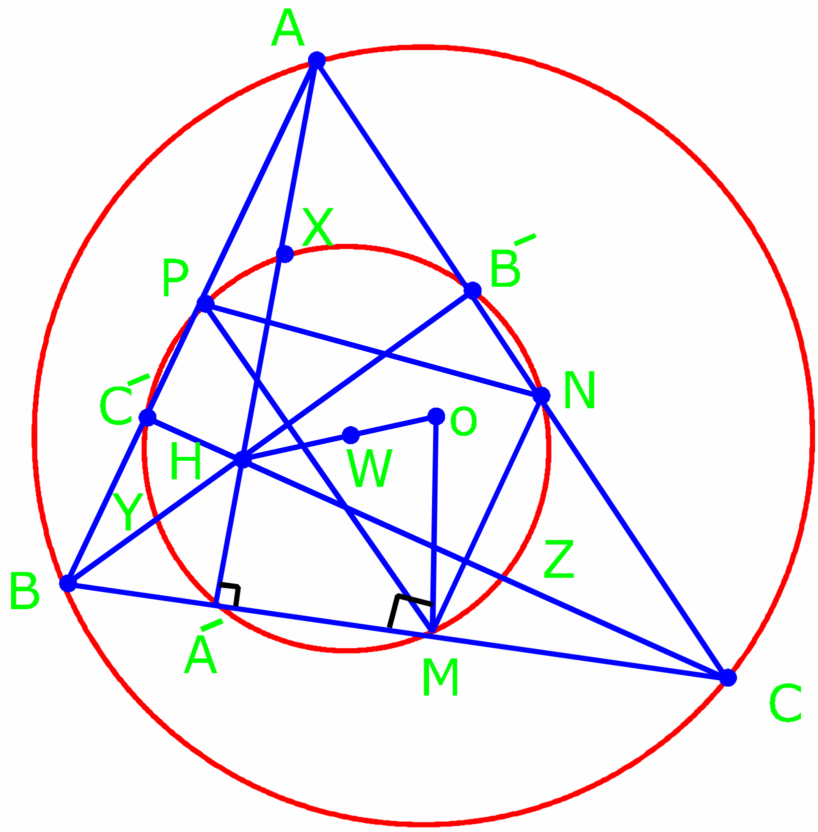
توجه شود که قسمت آخر ، طبق مسئله قبل از رابطه $3\overline{OG}=\overline{OH}$ جایگزین شد . چون $\overline{OW}=\frac{1}{2}\overline{OH}$ پس W وسط OH قرار دارد . در ضمن همان طور که گفته شد W روی OH قرار دارد که از G نیز می گذرد پس مسئله حل شده است .

مسئله۵ (دایره نه نقطه). ثابت کنید در هر مثلث پای میانه ها و پای ارتفاع ها و وسط های AH و BH و CH (H مرکز ارتفاعی) ، روی دایره ای به مرکز W (وسط OH) و به شعاع $\frac{1}{2}R$ قرار دارند ، که به دایره نه نقطه معروف است (مطابق شکل زیر)

حل. اگر R شعاع دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و R' شعاع دایره محیطی مثلث میانه ای $\overset{\Delta}{MNP}$ باشد ، داریم $\frac{R'}{R}=\frac{1}{2}$. بنابراین علاوه بر نقطه G که بین O و W قرار دارد نقطه ی دیگری هم بیرون پاره خط OW قرار دارد که با نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ نقطه O را به W می برد و طبق مسئله قبل آن نقطه همان H است ، زیرا W وسط OH بود.

حال تحت این تجانس مستقیم نقطه ی A به محل تلاقی AH با دایره محیطی $\overset{\Delta}{MNP}$ یعنی نقطه X می رود ، بنابراین $\overline{XH}=\frac{1}{2}\overline{AH}$ پس X وسط AH است . همین طور Y وسط BH و Z وسط CH می باشد که Y و Z نیز به ترتیب محل برخورد BH و CH با دایره محیطی $\overset{\Delta}{MNP}$ می باشند . همین طور توجه کنید که در ذوزنقه قائم الزاویه $OHA'M$، نقطه W روی عمود منصف پاره خط $A'M$ قرار دارد . (چرا ؟) پس از M و A' به یک فاصله است .

$WA' = WM = R'$ یعنی A' روی دایره ای به شعاع R' و مرکز W قرار دارد که همان دایره مذکور می باشد به طریق مشابه B' و C' نیز روی دایره نه نقطه قرار می گیرند . پس ثابت کردیم پای میانه ها و ارتفاع ها و وسط های AH و BH و CH روی دایره ای مذکور قرار دارند .



مسئله۶. ثابت کنید قرینه ی مرکز ارتفاعی نسبت به هر ضلع روی دایره محیطی قرار دارد .

حل. با مرکز تجانس مرکز ارتفاعی H و نسبت $\frac{1}{2}$ ، طبق مسئله قبل دایره ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به دایره ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ می رود . پس با تجانس یاد شده نقطه ی H' محل تلاقی امتداد AA' با دایره محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ به نقطه ی A' محل تلاقی HH' با دایره ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ می رود ، پس $\overline{HA'} = \frac{1}{2}\overline{HH'}$ و $A'H = A'H'$. به عبارتی قرینه ی مرکز ارتفاعی نسبت به هر ضلع روی دایره محیطی قرار دارد .

مسئله ۷. اگر N نقطه‌ی ناگل و O مرکز دایره محیطی و I مرکز دایره محاطی و H مرکز ارتفاعی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشند ، ثابت کنید $HN = 2IO$

حل. طبق مسئله خط اولر داریم : $HG = 2GO$ و طبق نتیجه ی قضیه۲ داریم $GN = 2IG$. با جمع طرفین دو رابطه ی مذکور به دست می آید .

$$HN = HG + GN = 2(IG + GO)$$

پس $HN = 2IO$ و مسئله حل شده است .

مسئله ۸. در یک صفحه دو دایره داریم که در نقاط X و Y متقاطعند و ثابت کنید که چهار نقطه ثابت با ویژگی های زیر وجود دارند : (مطابق شکل زیر)

برای هر دایره که با دو دایره داده شده در نقاط A و B مماس باشد و با خط XY در نقاط C و D برخورد کند ، هر کدام از خط های BD و BC و AD و AC از یکی از ۴ نقطه مذکور عبور کنند.

حل. طبق حالت چهارم از تجانس برای دایره ، داریم : دایره ی C_3 به ترتیب با مراکز تجانس A و B با دایره های C_1 و C_2 مجانس است.

از طرفی هر خط که از مرکز تجانس بگذرد و دو شکل مجانس را در دو نقطه ی Z و Z' قطع کند آن دو نقطه مجانس یکدیگر می باشند ، پس اگر Q محل برخورد خط BC با دایره C_1 باشد ، Q و C مجانس یکدیگرند با مرکز B ، و نسبت تجانسی که دایره C_1 و C_3 را مجانس می کند . و به طریق مشابه اگر محل برخورد خط AC با دایره ی C_2 را P بنامیم ، P و C مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس A و نسبت تجانسی که دایره های C_1 و C_3 را مجانس می کند .

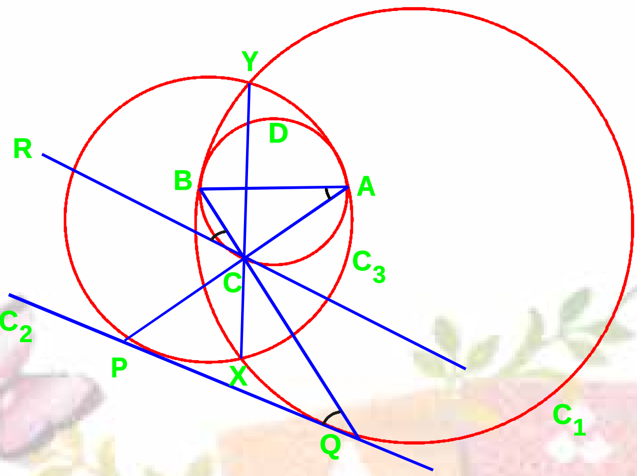
از طرفی هر گاه دو مماس از دو دایره مجانس موازی باشند ، محل تماس آنها مجانس یکدیگر است و به عکس .

پس مماس مرسوم از C بر دایره C_3 با مماس های مرسوم از Q و P به ترتیب بر دایره های C_1 و C_2 موازی است . ادعا می کنیم که مماس های مرسوم از P و Q یک خط هستند ، یعنی مماس مشترک دو دایره می باشند و اگر چنین باشد

مسئله حل است . زیرا در آن صورت خطوط BD و BC و AD و AC از محل مماس مشترک های دو دایره که نقاط ثابتی هستند عبور می کند که تعداد این نقاط ۴می باشد.

اثبات ادعا. از رابطه قوت نقطه ی C داریم : $CA\cdot CP = CX.CY = CB.CQ$. یا به عبارتی $\frac{CA}{CQ}=\frac{CB}{CP}$ ، در ضمن داریم : $\angle ACB = \angle PCQ$ (چون متقابل به رأس هستند) پس دو مثلث $C\overset{\Delta}{A}B$ و $C\overset{\Delta}{P}Q$ متشابه اند و از زاویه های متناظر داریم : $\angle CAB = \angle CQP$. از طرفی اگر در دایره C_3 امتداد مماس مرسوم از C را R بنامیم داریم : $\angle RCB = \angle CAB$ (چون روبه رو به کمان $\hat{CB}$ هستند) . از دو رابطه ی اخیر داریم : $\angle CQP = \angle RCB$. پس چون خط مورب BCQ بر پاره خط PQ و مماس مرسوم بر دایره C_3 در نقطه C زاویه ی مساوی ایجاد کرده ، $PQ \| CR$ می باشد .

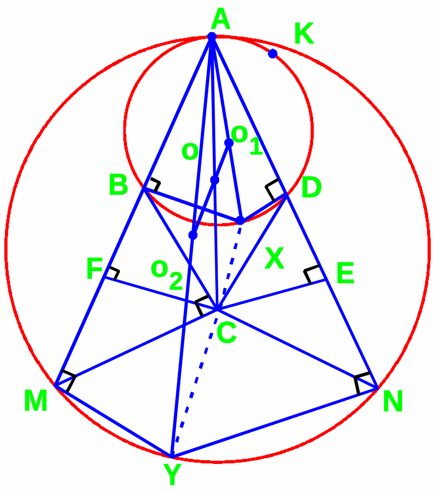
حال چون خط PQ و مماس های مرسوم از Q و P به ترتیب بر دایره های C_1 و C_3 همگی با هم موازی اند و موازی مماس CR نیز هستند ، پس PQ مماس مشترک دو دایره ای C_1 و $C2$ می باشد . (چرا؟)



مسئله۹. چهار ضلعی محدب $ABCD$ مفروض است . نقاط M و N را به ترتیب بر روی امتداد AB و AD طوری می یابیم که داشته باشیم :

$CN = CD, CM = CB, \angle DCN = \angle BCM = 90^0$

حال محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AMN}$ را K می نامیم . ثابت کنید که AK بر KC عمود است.



(الف)

حل. فرض کنید O وسط AC ، O_1 و O_2 به ترتیب مراکز دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AMN}$ باشد که آنها را C_1 و C_2 می نامیم . (شکل الف)

حال به مرکز A و نسبت تجانس ۲ ، نقاط O، O_1 و O_2 را مجانس می کنیم ، X مجانس O_1 روی دایره C_1 قرار دارد (چون AO_1 شعاع و AX قطراست) به طریق مشابه Y مجانس O_2 روی دایره C_2 قرار می گیرد و C مجانس O می شود . اگر ثابت کنیم X، Y و C روی یک خط هستند مجانس های آنها نیز یعنی، O_1 و O_2 و O روی یک خط قرار خواهند گرفت و مسئله خواهد شد.

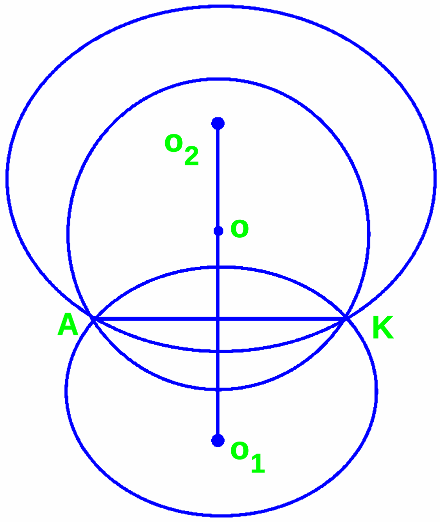
چون مثلث های $\overset{\Delta}{CDN}$ و $\overset{\Delta}{BCM}$ متساوی الساقین هستند ، بنابراین عمود منصف های آنها به ترتیب در E و F از رأس سوم مثلث ها یعنی C می گذرد.

از برهان خلف استفاده می کنیم ، فرض کنید C روی XY نباشد . در این صورت CE خط XY را در C_1 و CF خط XY را در C_2 قطع می کند .

از طرفی زاویه های $A\hat{E}C, A\hat{D}X$ و $A\hat{N}Y$ همگی ۹۰ درجه می باشند ، زیرا $A\hat{D}X$ و $A\hat{N}Y$ روبروی قطرهای AX و AY می باشند و CE نیز عمود منصف مثلث $\overset{\Delta}{CDN}$ است . از عمود بودن خطوط XD و CE و YN بر خط AN نتیجه می شود که این خطوط با هم موازی اند . اما می دانیم که خطوط موازی پاره خط های مورب را به طور متناسب قطع می کنند ، و چون $\frac{DE}{EN}=1$ می باشد پس $\frac{XC_1}{C_1Y}=1$ ، که C_1 محل برخورد خط CE با XY است ، بنابراین C_1 وسط XY می باشد .

به طریق مشابه از موازی بودن خطوط BX و FC و MY و تساوی $MF=BF$ یعنی $\frac{MF}{BF}=1$ خواهیم داشت $\frac{XC_2}{C_2Y}=1$ که C_2 محل برخورد CF با XY است و بنابراین C_2 وسط XY می باشد و طبق آنچه گفته شد C_1 بر C_2 منطبق است و این به آن معناست که نقاط C, E, F بر یک خط قرار دارند و با کمی دقت متوجه می شوید که معادل با آن می باشد که زاویه ی $B\hat{C}D$ قائمه باشد و اگر چنین باشد زاویه A برابر صفر خواهد بود چون مجموع دو زاویه ی $B\hat{D}C$ و $C\hat{B}D$;۲۷۰درجه می باشد و مجموع زاویه های یک چهار ضلعی ۳۶۰ درجه می باشد .

بنابراین به تناقض رسیدیم و از آنجه که این تناقض از آنجا ناشی شد که C روی XY قرار ندارد پس باید C روی XY قرار داشته باشد . وازآنجا نتیجه می شود که O_1 و O_2 و O نیز روی یک خط قرار دارند . چون O_1 و O_2 روی عمود منصف وتر مشترکشان یعنی AK قرار دارند و O نیز روی این خط می باشد ، بنابراین K نیز روی دایره ای با شعاع OA $(OC=OA)$ و مرکز O قرار دارد و داریم $OA=OK=OC$ یعنی K روی دایره ای به قطر AC قراردارد، بنابراین $\angle AKC=90$ خواهد بود.



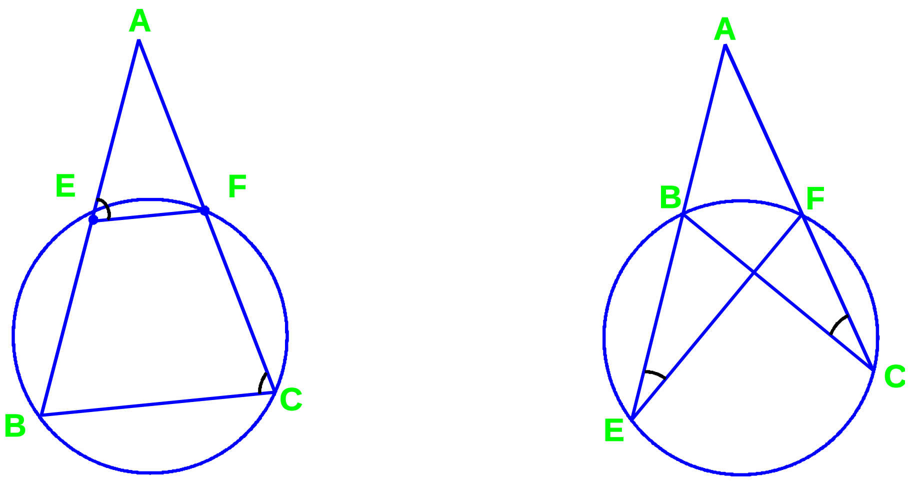
(ب)

مسئله‌ی ۱۰. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مفروض است .محل برخورد تمام دایره های گذرنده از نقـاط B و C را بـا پـاره خـط های AB و AC یا امتدادشان به ترتیب E و F می نامیم . مکان هندسی وسط پاره خط های EF کدام می باشد .

حـل. در تمـام حالـت هـای برخـورد پـاره خـط هـای AB و AC یاامتدادهایـشان بـا دایـره ، زاویـه هـای $\angle ACB$ و $\angle AFE$ با هم برابر خواهند بود ، زیرا یا روبه رو به یک کمان می باشند یا یکی از آنها مکمـل زاویـه ی روبـه روی دیگری است . (شکل الف و ب) از آنچه گفته نتیجه می شود که زاویه های مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$ همواره ثابت می باشـند .

حال فرض کنیدکه E' و F' نیز محل برخورد خطوط AB و AC یاامتدادهایشان با دایره ای دیگری کـه از B و C مـی گذرد ، باشند . طبـق آنچـه کـه گفتـه شـد زاویـه ی $\angle AE'F'$ نیـز برابـر بـا $\angle ACB$ مـی باشـد و در کـل داریـم: $\angle AE'F' = \angle AEF = \angle ACB$ بنابراین خطوط EF و $E'F'$ با هم موازی اند و طبق تعریف تجانس برای چند ضـلعی دو مثلث متشابه که اضلاع آن ها موازی می باشند متجا نس یکدیگرند ، پس $\overset{\Delta}{AEF}$ مجانس $\overset{\Delta}{AE'F'}$ می باشد . و چون مرکز تجانس (در حالت $K \neq 1$) تنها نقطه ای است که ثابت می ماند ، بنابراین A مرکز تجانس اسـت و بـا تجـانس بـا نسبت مفروض K نقاط E و F به E' و F' برده می شوند . بنابراین وسط EF یعنی M باوسط $E'F'$ یعنی M' مجـانس

می باشد و طبق تعریف تجانس نقاط مجانس و مرکز تجانس بر روی یک خط قرار دارند یعنی M و M' و A روی یک خط قرار دارند ، و این بدان معناست که مکان هندسی وسط های پاره خط های گفته شده بر روی خط راستی قرار دارد که از A می گذرد .



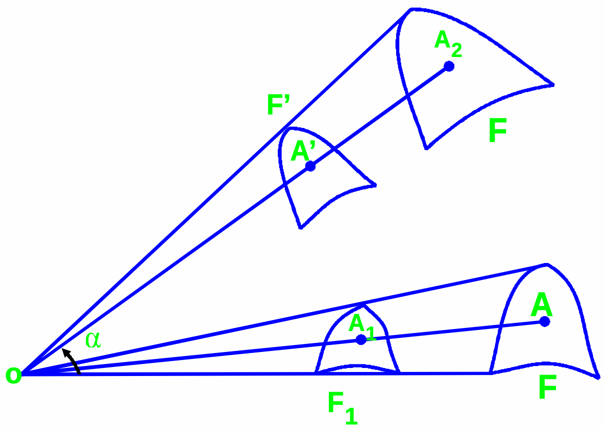
(ب) (الف)

تجانس مارپیچی

تعریف اولیه. به ترکیب یک دوران و یک تجانس ، تجانس مارپیچی (تجانس دورانی) گفته می شود .

تعریف دقیق. تبدیلی است که ابتدا شکل F را به مرکز O و نسبت تجانس مثبت K به شکل F_1 مجانس می کند و سپس شکل F_1 را به اندازه ی زاویه ی α حول نقطه ی O دوران می دهد و به شکل F' تبدیل می کند .

نکته. در تعریف فوق می توان ابتداشکل F را با دوران به مرکز O و زاویه ی α به شکل F_2 تبدیل کرد و سپس F_2 را با تجانس به مرکز O و به نسبت تجانس K به F' بدل کرد .



یک نماد. از آنجا که هر تجانس مارپیچی با یک زاویه ی دوران α و نسبت تجانس K و مرکز تجانس O مشخص می شود هر تجانس مارپیچی را با نماد $R(O,K,\alpha)$ نمایش می دهیم .

خواص تجانس مارپیچی

۱. مگر در حالت خاص $K=1$ ، این تبدیل هندسی فاصله ی نقاط را حفظ نمی کند. در حالت $K=1$، تجانس مارپیچی معادل دوران تنها خواهد بود .

۲. مگر در حالت خاص ۱۸۰ یا $\alpha=0$ زاویه ها ثابت نمی مانند . در این حالت تجانس مارپیچی معادل تجانس تنها خواهد بود.

۳. هر تجانس مارپیچی به زاویه 0^0 و نسبت تجانس ۱ را یک تبدیل همانی گوییم .

۴. تنها نقطه ثابت در تجانس مارپیچی نقطه O یعنی مرکز تجانس مارپیچی است ، مگر در حالت تبدیل همانی .

۵. هر تجانس مارپیچی با زاویه دوران 0 و 180^0 را تجانس مرکزی گوییم.

۶. در تجانس مارپیچی هیچ خطی ثابت نمی ماند مگر در حالت تجانس مرکزی

۷. هرگاه شکل F با یک تجانس مارپیچی به مرکز O ، نسبت K وزاویه دوران α به شکل F' بدل شود .

آنگاه شکل F' نیز با یک تجانس مارپیچی به مرکز O ، نسبت $\frac{1}{K}$ و زاویه دوران $-\alpha$ درجه به شکل F بدل می شود .

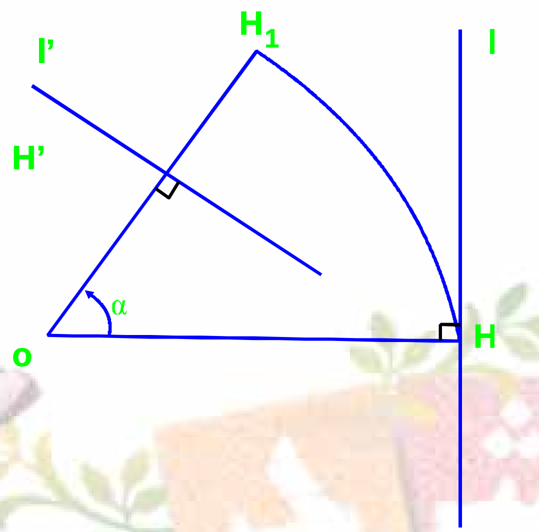
نحوه یافتن تجانس مارپیچی یک خط

برای یافتن تبدیل یافته خط l حول مرکز O و تبدیل تجانس مارپیچی $R(O,K,\alpha)$ کافیست از نقطه ی O بر خط L عمودی رسم کرده پای عمود مرسوم را H بنامیم . سپس H را حول O، α درجه دوران داده و با نسبت مفروض K مجانس کنیم تا H' حاصل شود . از نقطه H' خطی عمود بر OH' رسم می کنیم ، این خط همان خط مطلوب l' است .

$$OH = OH_1$$

$$\frac{OH'}{OH} = K$$

$$\angle H'OH = \alpha$$



قضیه۱۱. تجانس مارپیچی هر خط l را به خط جدید l' بدل می کند .

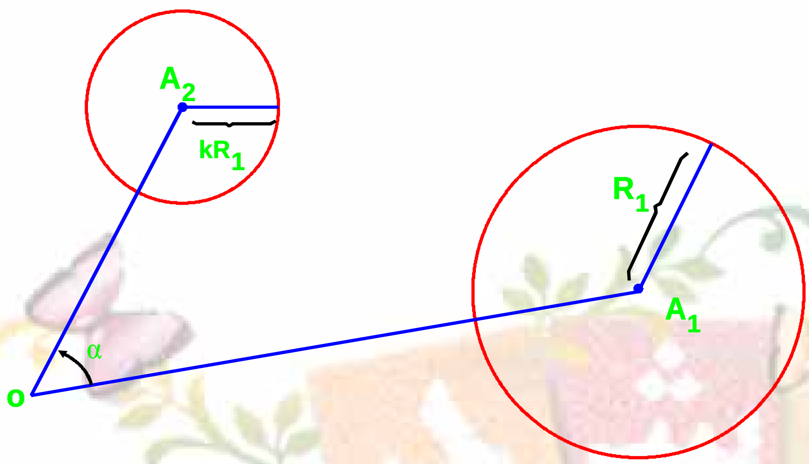
برهان. از آنجا که دوران یافته یک خط ، یک خط می باشد(رجوع به فصل دوران) و در ضمن مجانس یک خط نیز یک خط می باشد (رجوع به فصل تجانس) ، پس تجانس مارپیچی یک خط نیز یک خط جدید می باشد .

نحوه یافتن تجانس مارپیچی یک دایره :

برای یافتن مبدل دایره C_1 حول مرکز O و با تبدیل تجــانس مــارپیچی $R(O,K,\alpha)$ ، کافیــست مرکــز دایــره C_1 یعنی A_1 را حول O با زاویه ی α درجه دوران داده و با نسبت K مجانس کنیم تا نقطه ی A_2 حاصل شود . ســپس دایره C_2 را با مرکز A_2 و شعاع KR_1 (R_1 شعاع دایره C_1 می باشد) رسم کنیم . دایره C_2 شکل تبدیل یافته مطلوب است .

قضیه ی۱۲. تجانس مارپیچی هر دایره C_1 را به یک دایره جدید C_2 بدل می کند

برهان. از آنجا که هر یک از تبدیلات دوران و تجانس به تنهایی یک دایره را به یک دایره جدید بدل می کننــد. (رجوع به بخش های دوران و تجانس) در نتیجه ترکیب آن ها (تجانس مارپیچی) نیز یک دایره را به یک دایره بدل می کند .

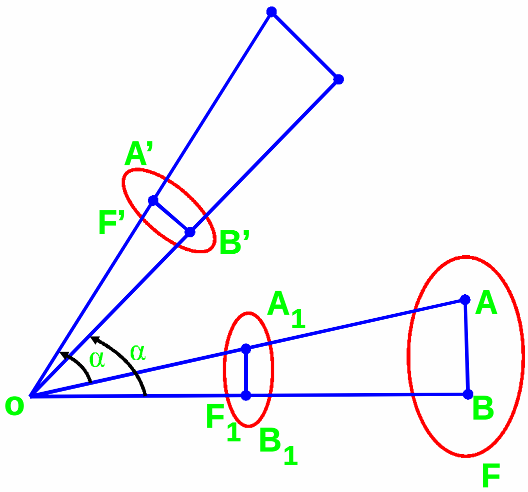


قضیه۱۳. هرگاه شکل F' از تجانس مارپیچی $R(O,K,\alpha)$ از شکل F حاصل شود ، همچنــین AB و $A'B'$ بــه

ترتیب دو پاره خط متناظر دلخواه از شکل های F' و F باشند . آنگاه زاویه ی بین خطوط AB و $A'B'$ برابر α درجه و $A'B' = k.AB$ خواهد بود .

برهان. فرض کنید شکل F_1 مجانس شکل F با نسبت تجانس K باشد و F' دوران یافته ی شکل F_1 با زاویه α درجه باشد ، بنابراین طبق فصل تجانس داریم : $AB = k.A_1B_1$ و $AB \| A_1B_1$ که A_1 و B_1 به ترتیب مجانس های نقاط A و B حول مرکز O و نسبت تجانس K می باشند .

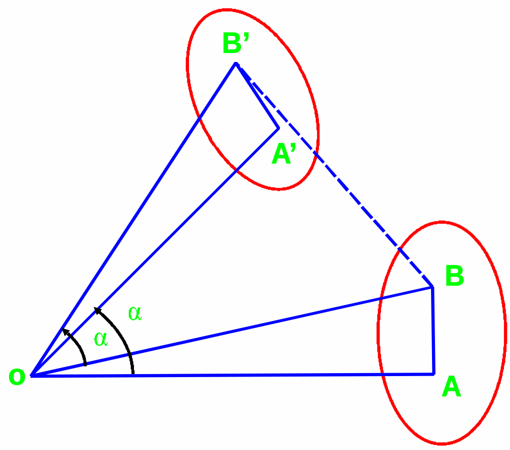
از طرفی چون F' دوران یافته F_1 حول O و زاویه α است طبق قضیه در فصل دوران داریم : $A'B' = A_1B_1$ و زاویه ی بین خطوط $A'B'$ و A_1B_1 برابر α درجه است . از آنچه گفته شد داریم : $AB = K.A'B'$ و زاویه ی بین خطوط AB و $A'B'$ برابر α درجه است (چرا؟) پس حکم ثابت شده است .



قضیه ۱۴. اگر به هر نقطه ی شکل F نقطه ای از شکل F' متناظر باشد چنان که پاره خط های متناظر در این دو شکل دارای نسبت ثابت K باشد و با هم زاویه ثابت α بسازند ، آنگاه F و F' توسط یک تجانس مارپیچی به هم قابل تبدیل هستند.

برهان. فرض کنید نقاط B و B' دو نقطه ی متناظر دلخواه از شکل های F و F' باشند . مثلث $\overset{\Delta}{OBB'}$ را طوری

می سازیم که داشته باشیم $OB'/OB=K$ و $\angle BOB'=\alpha$. (توجه : اگر زاویه $\alpha>180$ باشد آنگاه مثلث $\overset{\Delta}{OBB'}$ را با زاویه $\angle BOB'=360-\alpha$ رسم می کنیم) طبق تعریف تجانس مارپیچی $R(O,K,\alpha)$ ، نقطه ی B را به نقطه ی B' بدل می کند . اکنون ثابت می کنیم این تجانس مارپیچی هر نقطه ی A از شکل F را به متناظرش یعنی A' از شکل F' بدل می کند .



بنابر فرض مسئله چون BA و $B'A'$ پاره خط های متناظر می باشند ، پس $B'A'/BA=K$ از طرفی طبق آن چه گفته شد داریم : $OB'/OB=K$. بنابراین نتیجه می شود $B'A'/BA=OB'/OB=K$. در ضمن زاویه بین خطوط OB' و OB برابر α (طبق آنچه گفته شد.) و زاویه ی بین خطوط BA و $B'A'$ نیز α درجه است (طبق فرض مسئله) بنابراین $\angle OBA=\angle OB'A'$ پس دو مثلث $\overset{\Delta}{OBA}$ و $\overset{\Delta}{OB'A'}$ متشابهند . از اجزاء نظیر دو مثلث داریم :

$$OA'/OA=OB'/OB=A'B'/AB=K$$

طبق تشابه مذکور زوایای $\angle BOA$ و $\angle B'OA'$ برابر می شوند ، با اضافه کردن مقدار $\angle A'OB$ به طرفین داریم

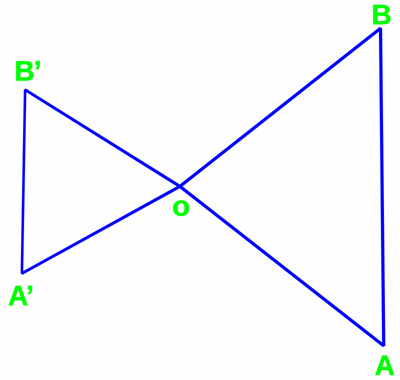
$$\alpha=\angle B'OB=\angle B'OA'+\angle A'OB=\angle BOA+\angle A'OB=\angle A'OA$$

پس زاویه ی بین دو خط OA و OA' برابر α درجه و $OA'/OA=K$ می باشد . پس A' با تجانس

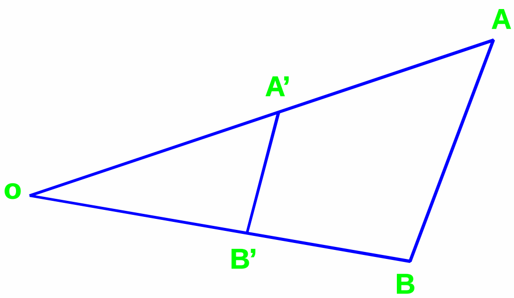
مارپیچی $R(O,K,\alpha)$ از نقطه ی A بدست آمده و حکم ثابت شده است .

طرز یافتن مرکز تجانس مارپیچی ای که پاره خط AB را به پاره خط $A'B'$ تبدیل می نماید.

حالت اول. هر گاه زاویه ی بین دو پاره خط AB و $A'B'$ که با تجانس مارپیچی مفروض به مرکز مفروض O به هم تبدیل شده اند برابر ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد و پاره خط های AB و $A'B'$ نامساوی باشند ؛ تجانس مارپیچی در این حالت به یک تجانس معمولی تبدیل می شود . پس برای یافتن O مرکز تجانس مارپیچی (مرکز تجانس در این حالت) کافیست محل برخورد خطوط AA' و BB' را بیابیم . (رجوع شود به فصل تجانس)



(الف)



(ب)

برهان اول. قبلاً در فصل تجانس نشان دادیم که مرکز تجانس دو خط AB و $A'B'$ چگونه بدست می آید .

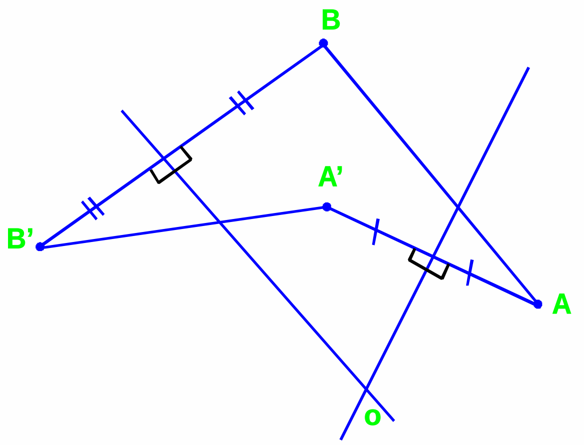
برهان دوم. دو مثلث $\overset{\Delta}{OBA}$ و $\overset{\Delta}{OB'A'}$ متشابهند(چرا؟) از روابط اجزای نظیر داریم :

$$OA'/OA = OB'/OB = A'B'/AB = K$$

بنابراین $OB' = K.OB, OA' = K.OA$ و $\angle A'OA = \angle B'OB =$ ۱۸۰ یا ۳۶۰ (در شکل الف ۳۶۰ درجه و در شکل ب ۱۸۰ درجه) بنابراین O مرکز تجانس مارپیچی مفروض می باشد.

حالت دوم. هرگاه زاویه ی بین دو خط AB و $A'B'$ که با تجانس مارپیچی مفروض با مرکز نامشخص O به هم

تبدیل شده اند ، مخالف با ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد و پاره خط های AB و $A'B'$ مساوی باشند $\left(AB=A'B'\right)$ ، تجانس مارپیچی مذکور تنها معادل با یک دوران می باشد . پس برای یافتن O ، مرکز تجانس مارپیچی (دوران در این حالت) ، کافیست که محل برخورد عمود منصف های پاره خط های BB' و AA' را بدست آورد.



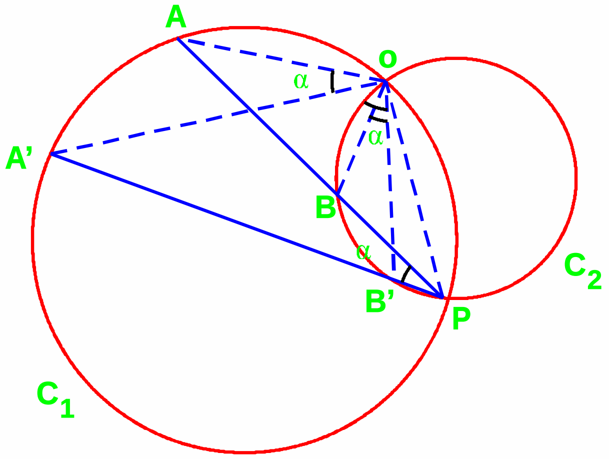
برهان. طبق تعریف دوران برای نقطه اگر O مرکز دوران باشد ، داریم : $OA=OA'$ (چون A' دوران یافته A حول O است) و همچنین $OB=OB'$ پس ، از آنچه گفته شد نتیجه می شود ، مکان هندسی نقطه ی O عمود منصف های خطوط AA' و BB' می باشد. از آنجا که زاویه ی دوران مخالف ۱۸۰ و ۳۶۰ می باشد پس عمود منصف های مذکور متقاطعند(چرا؟) پس O محل برخورد عمودمنصف پاره خط های AA' و BB' می باشد . زیرا متعلق به هر دو می باشد.

حالت سوم. هرگاه زاویه ی بین دو خط AB و $A'B'$ که با تجانس مارپیچی مفروض با مرکز نامشخص O به هم تبدیل شده اند مخالف با ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد ، و برابر α درجه باشدبرای یافتن O مرکز تجانس مارپیچی ، کافیست محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های PAA' و PBB' را به دست آورد که نقطه ی P محل برخورد خطوط AB و $A'B'$ می باشد .

برهان. فرض کنید C_1 و C_2 به ترتیب دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{PAA'}$ و $\overset{\Delta}{PBB'}$ باشند چون O محل

برخورد دو دایره C_1 و C_2 می باشد پس روی هر دو دایره قرار دارد ، از اینکه O روی و رو به رو به کمان $\widehat{AA'}$ است ، داریم : $\angle APA' = \angle AOA' = \alpha$ و از اینکه O روی دایره C_2 و رو به رو کمان $\widehat{BB'}$ است داریم : $\angle BPB' = \angle BOB' = \alpha$ و از آن دو خواهیم داشت :

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha \qquad (۱)$$



در ضمن در دوایر C_1 و C_2 به ترتیب داریم :

$\angle OA'A = \angle OPA$ و $\angle OB'B = \angle OPB$

وچون $\angle OPB = \angle OPA$ ، داریم :

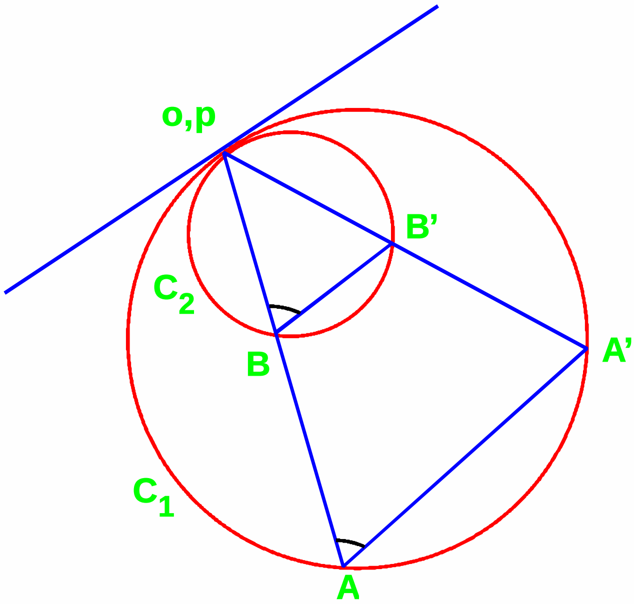
$$\angle OB'B = \angle OA'A \qquad (۲)$$

از روابط ۱و۲ نتیجه می شود که مثلث های $\overset{\Delta}{OB'B}$ و $\overset{\Delta}{OA'A}$ متشابه اند. از اجزاء نظیر آنها خواهیم داشت : $OA/OB = OA'/OB'$ یعنی $K = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}$. پس طبق تعریف تجانس مارپیچی ، O مرکز تجانس مارپیچی مفروض است ، زیرا داریم :

$\angle A'OA = \angle B'OB = \alpha$ و $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K$

نکته. هرگاه در حالت سوم AA' و BB' موازی باشند ، آنگاه O ، محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های

$P\overset{\Delta}{A}A'$ و $P\overset{\Delta}{B}B'$ بر نقطه ی P منطبق می شود . پس O همان نقطه ی برخورد AB و $A'B'$ می باشد .



قضیه۱۵. مرکز تجانس مارپیچی ای که پاره خط مفروض AB را به $A'B'$ بدل می کند با مرکز تجانس مارپیچی ای

که AA' را به BB' بدل می کند منطبق است .

برهان. فرض کنید O و O' به ترتیب مرکز تجانس های مارپیچی $R(O,K,\alpha)$ که AB را به $A'B'$

و $R(O',L,\beta')$ که AA' را به BB' بدل می کند باشند . از اولی نتیجه می شود که $\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha$

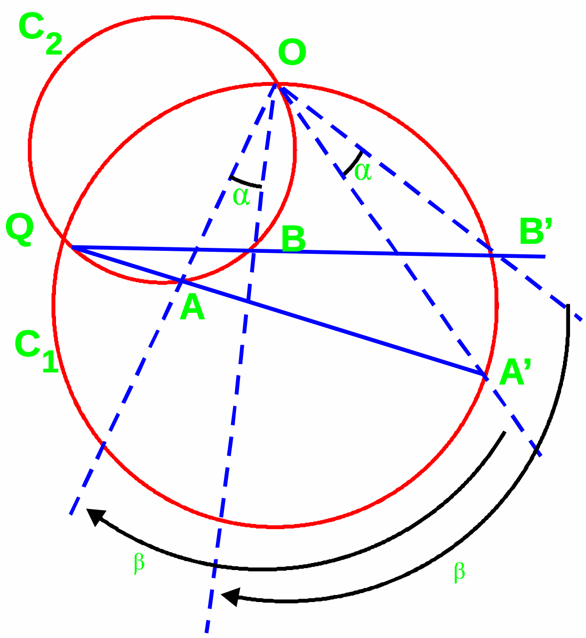
و $OA'/OA = OB'/OB = K$. با اضافه کردن مقدار $\angle A'OB$ به زاویه های $B\hat{O}B'$ و $A'\hat{O}A$ داریم :

$\angle AOB = \angle A'OB = \alpha + \angle A'OB = \beta$

و از رابطه ی $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ داریم :

$$\frac{OA'}{OB'}=\frac{OA}{OB}=L$$

(باتوجه به شکل زیر) پس طبق آنچه گفته شد O بر O' منطبق است .



ترکیب دو تجانس مارپیچی

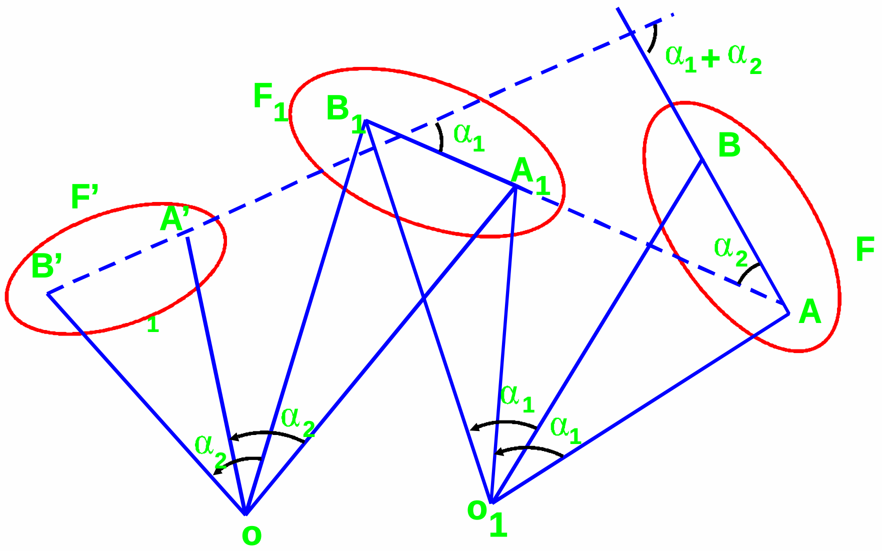
قضیه۱۶. ترکیب دو تجانس مارپیچی با نسبت تجانس K_1 و K_2 زاویه ی دوران α_1 و α_2 تجانس مارپیچی جدیدی است که با نسبت تجانس $K_1.K_2$ و زاویه ی دوران $\alpha_1+\alpha_2$ ؛ در این حالت استثناء یعنی وقتی که $K_1.K_2=1$ و $\alpha_1+\alpha_2=360$ ترکیب دو تجانس مارپیچی یک انتقال است.

برهان. فرض کنید شکل F_1 از شکل F بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O_1 و نسبت تجانس K_1 و زاویه ی دوران α_1 بدست آمده باشد و شکل F' هم از شکل F_1 براثر تجانس مارپیچی به مرکز O_2 و نسبت تجانس K_2 و زاویه ی دوران α_2 بدست آمده باشد . AB ، A_1B_1 و $A'B'$ را پاره خط های متناظر در این سه شکل می گیریم . در این صورت $A_1B_1/AB=K_1$ و زاویه ی بین دو پاره خط AB و A_1B_1 برابر α_1 درجه است (طبق قضیه۱۳) هم

چنین $A'B'/A_1B_1 = K_2$ و زاویه ی بین دو پاره خط A_1B_1 و $A'B'$ برابر α_2 درجه است (طبق قضیه۱۳) . بنابراین :

$$A'B'/AB = (A'B'/A_1B_1)\times(A_1B_1/AB) = K_2 \times K1$$

و زاویه ی بین دو خط AB و $A'B'$ برابر $\alpha_1+\alpha_2$ می باشد.(مطابق شکل زیر)



چون پاره خط های متناظر در شکل های F و F' دارای نسبت ثابت $K_1.K_2$ هستند و با هم زاویه ی ثابت $\alpha_1+\alpha_2$ می سازند ، پس شکل های F و F' از همدیگر بر اثر تجانس مارپیچی با زاویه ی دوران $\alpha_1+\alpha_2$ و نسبت تجانس $K_1.K_2$ به دست می آید .

در ضمن در حالتی که $\alpha_1+\alpha_2 = 360^0$ و $K_1.K_2 = 1$ باشد ، چون $K_1.K_2 = 1$ پس با ترکیب دو دوران با زاویه های αو $360-\alpha$ رو به روهستیم که طبق آنچه در فصل دوران گفته شد معادل یک انتقال است.

طرز یافتن مرکز تجانس مارپیچی حاصل از ترکیب دو تجانس مارپیچی

برای یافتن مرکز تجانس مارپیچی حاصل از ترکیب دو تجانس مارپیچی با $R(O_1,K_1,\alpha_1)$ و $R(O_2,K_2,\alpha_2)$

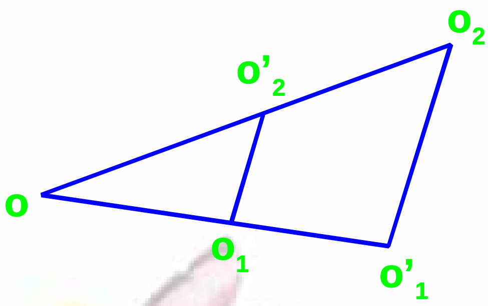
ابتدا نقاط O_1' و O_2' را طوری می یابیم که $\angle O_1O_2O_1' = \alpha_2$ و $O_2O_1' = K.O_2O_1$ باشد و $\angle O_2O_1O_2' = -\alpha_1$ باشد

و $O_1O'_2 = K \cdot O_1O_2$ باشد .یعنی O'_1 از تجانس مارپیچی O'_2 حول O_2 با $R(O_2, K_2, \alpha_2)$ بدست می آیـد و از O_2 تجانس مارپیچی O'_2 حول O_1 با $R(O_1, K_1, \alpha_1)$ بدست می آید.

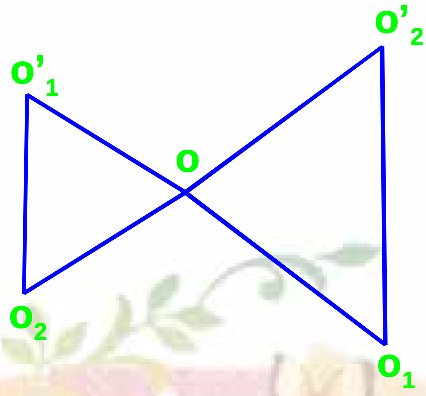
از طرفی O_1 حول خودش تحت تجانس مارپیچی $R(O_1, K_1, \alpha_1)$ ثابت می ماند و $R(O_2, K_2, \alpha_2)$ آنرا بـه O'_1 می برد و O'_2 با تجانس مارپیچی $R(O_1, K_1, \alpha_1)$ به O_2 می رود و O_2 با $R(O_2, K_2, \alpha_2)$ ثابت می مانـد . پـس مـی توان نتیجه گرفت O_1 و O'_2 به ترتیب با تجـانس مـارپیچی حاصـل از ترکیـب دو تجـانس مـارپیچی $R(O_1, K_1, \alpha_1)$ و $R(O_2, K_2, \alpha_2)$ یعنی $R(O, K_1.K_2, \alpha_1 + \alpha_2)$ از نقاط O'_1 و O_2 حاصل می شوند .

پس پاره خط O'_1O_2 با تجانس مارپیچی مذکور حول مرکز نامشخص O به پاره خط $O_1O'_2$ تبدیل می شود . طبق آن چه که در مورد طرز یافتن مرکز تجانس مارپیچی ای که پاره خط AB را به پاره خط $A'B'$ بدل مـی کنـد ، در سـه حالت O را پیدا می کنیم :

حالت اول. هر گاه زاویه ی بین دو خط O'_1O_2 و $O_1O'_2$ برابر با ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد و $O'_1O_2 \neq O_1O'_2$. بـرای یافتن O کافی است محل برخورد خطوط $O_1O'_1$ و $O_2O'_2$ را بیابیم.



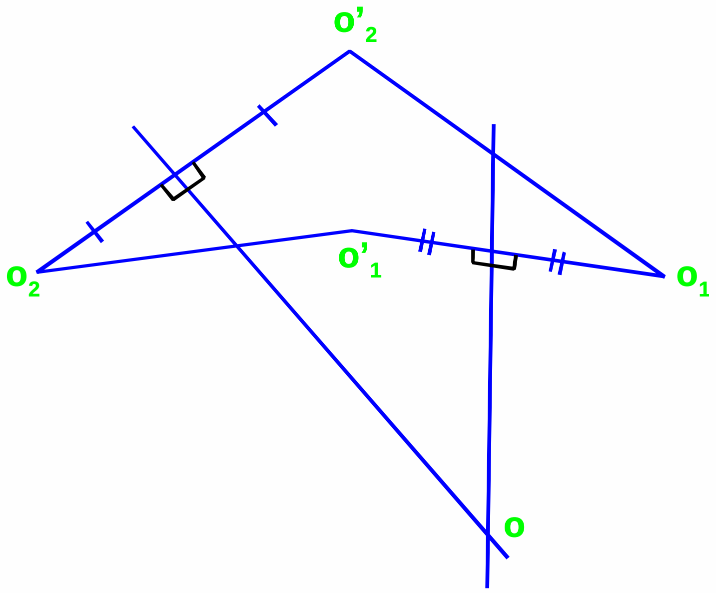
(الف)



(ب)

حالت دوم. هر گاه زاویه ی بین دو خط و O'_1O_2 و $O_1O'_2$ مخالف ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد و $O'_1O_2 = O_1O'_2$ باشد

، برای یافتن O کافی است که محل برخورد عمودمنصف های $O_1O'_1$ و $O_2O'_2$ را مشخص کنیم .



ملاحظه. حالت سوم را بعد از چند قضیه بررسی می کنیم .

قضیه ۱۷. الف. هرگاه زاویه ی بین دو خط O'_1O_2 و $O_1O'_2$ مخالف ۱۸۰ یا ۳۶۰ باشد و $O'_1O_2 = O_1O'_2$ باشد و هم چنین هر دو تجانس مارپیچی با مرکز های O_1 و O_2 با زاویه ی دوران مساوی و برابر α انجام شود، آنگاه می توان نتیجه گرفت نقطه O در ترکیب دو دوران ، علاوه بر قرار داشتن روی عمود منصف های $O_1O'_1$ و $O_2O'_2$ بر روی عمود منصف O_1O_2 نیز قرار دارد .

قضیه ۱۷.ب. هرگاه O مرکز تجانس مارپیچی حاصل از ترکیب دو تجانس مارپیچی با مراکز O_1 و O_2 به ترتیب با زاویه ها و نسبت های (K,α) و $\left(\frac{1}{K},\alpha\right)$ باشد ، آنگاه O روی عمود منصف پاره خط O_1O_2 قرار دارد .

نکته. دو قضیه فوق معادلند ؛ زیرا قبلاً این مطلب که O روی عمود منصف $O_1O'_1$ و $O_2O'_2$ قرار دارد را بررسی و اثبات کردیم .

اثبات. طبق آنچه که در ترکیب دو دوران گفته شد ترکیب دو دوران $R(O_1,K,\alpha)$ و $R\left(O_2,\frac{1}{K},\alpha\right)$ برابر

با $R(O,1,2\alpha)$: (یعنی تجانس مارپیچی با مرکز O ، نسبت تجانس ۱ و زاویه ی دوران 2α) می باشد .

طبق آنچه که در تعریف O'_1 و O'_2 گفته شد O'_1 و O'_2 با تجانس مارپیچی $R(O,1,2\alpha)$ (یا در این حالت دوران $R(O,2\alpha)$) به ترتیب به نقاط O'_1 و O_2 می روند .

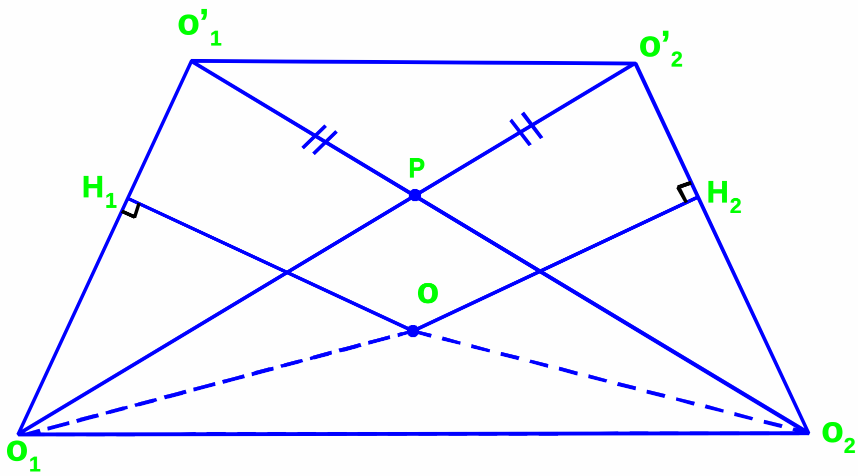
بنابراین پاره خط های O'_1O_2 و $O_1O'_2$ مساویند، زیرا دوران طول پاره خط ها را حفظ می کند . فرض کنید P محل برخورد اقطار چهار ضلعی $O_1O_2O'_2O'_1$ باشد . از آنجا که $\overset{\Delta}{PO_1O_2}$ متساوی الساقین است (چرا ؟) نتیجه می شود : $PO'_1 = PO'_2$

(چون $O'_1O_2 - PO_1 = PO'_2$ و $O_2O'_1 - PO_2 = PO'_1$) بنابراین $\overset{\Delta}{PO'_1O'_2}$ نیز متساوی الساقین است. از طرفی $\angle O_1PO_2$ و $\angle O'_1PO'_2$ متقابل به رأس اند. پس $\angle O_1PO_2 = \angle O'_1PO'_2$ و از آن نیز داریم : $\angle PO'_1O'_2 = \angle PO'_2O'_1 = \alpha$.

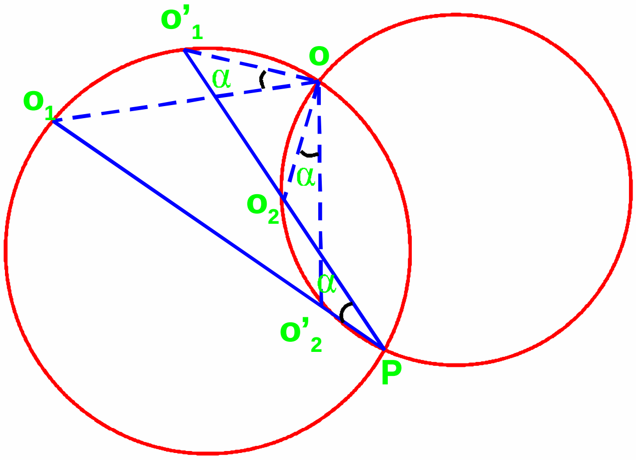
حال چون مورب $O_1O'_2$ بر خطوط O_1O_2 و $O'_1O'_2$ زاویه های مساوی α ایجاد کرده است ، پس $O'_1O'_2 \| O_1O_2$ می باشد . دو مثلث $\overset{\Delta}{PO_1O'_1}$ و $\overset{\Delta}{PO_2O'_2}$ نیز با هم متشابه اند (چرا ؟) بنابراین $\angle PO_2O'_2 = \angle PO_1O'_1$. با جمع رابطه ی قبل با رابطه ی $\angle O_1O_2 = \angle PO_2O_1 = \alpha$ داریم : $\angle O'_2O_2O_1 = \angle O'_1O_1O_2$. بنابر آنچه گفته شد چهار ضلعی $O_1O_2O'_2O'_1$ ذوزنقه متساوی الساقین می باشد. (یعنی $O_1O'_1 = O_2O'_2$)

حال عمود منصف های $O_1O'_1$ و $O_2O'_2$ را رسم می کنیم ، محل برخورد آ نها O همان مرکز ترکیب دو تجانسی مارپیچی است . پای عمود منصف های مذکور را به ترتیب H_1 و H_2 می نامیم . چون O'_2 با دوران حول O و زاویه 2α به O_2 می رود، $\angle O_2OO'_2 = 2\alpha$ می باشد و چون $OO'_2 = OO_2$ ، مثلث $\overset{\Delta}{OO'_2O_2}$ متساوی الساقین بوده پس عمود منصف ، نیمساز نیز می باشد $\angle H_2OO_2 = \alpha$. به طریق مشابه $\angle H_1OO_1 = \alpha$ می شود .

چون $\angle OH_1O_1 = \angle OH_2O_2 = 90$، پس $\angle OO_1H_1 = \angle OO_2H_2$ می شود از طرفی O_1H_1 و O_2H_2 به ترتیب دو برابر $O_1O'_1$ و O'_2O_2 می باشند پس برابر هستند ، می باشند و چون $O_1O'_1 = O_2O'_2$ داریم $O_1H_1 = O_2H_2$. پس دو مثلث ΔO_1H_1O و ΔO_1H_2O با دو زاویه و ضلع بین مساوی همنهشت می باشند . از اجزاء نظیر داریم : $OO_2 = OO_1$ پس مکان هندسی O روی عمود منصف O_1O_2 می باشد .



حالت سوم. اگر زاویه ی بین دو خط $O_1O'_2$ و O'_1O_2 مخالف ۱۸۰ یا ۳۶۰ درجه باشد . برای یافتن O کافیست محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{PO_1O'_1}$ و $\overset{\Delta}{PO_2O'_2}$ را به دست آورد که نقطه ی P محل برخورد $O_1O'_2$ و O'_1O_2 می باشد .



نکته. حالت دوم را می توان جزئی ازحالت سوم حساب کرد (چرا ؟)

نکته. هرگاه O_1 و O_2 یکی باشند O نیز برآن دو منطبق است (چرا ؟)

مسئله۱۱. چهار ضلعی $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب می باشد به طوری که AB و CD با هم موازی نیستند .

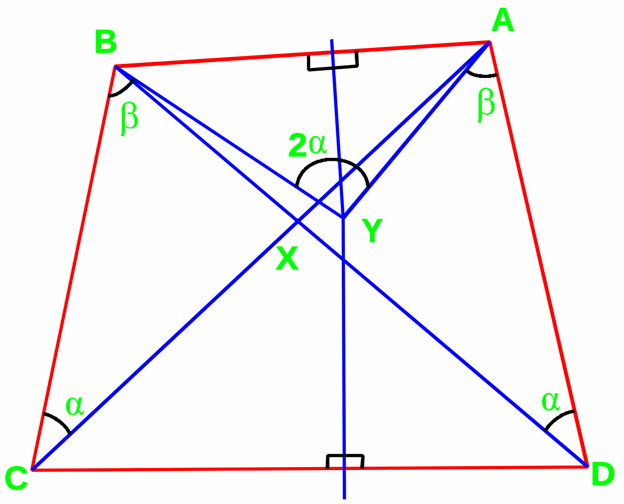
نقطه ی X را درون چهار ضلعی $ABCD$ طوری قرار می دهیم که داشته باشیم : $\angle ADX = BCX < 90^0$ و $\angle DAX = \angle CBX < 90^0$. اگر Y محل برخورد عمود منصف های AB و CD باشد ؛ ثابت کنید $\angle AYB = 2\angle ADX$.

حل. فرض کنید $\angle ADX = \angle BCX = \alpha$ و $\angle DAX = \angle CBX = \beta$ دو مثلث $X\overset{\Delta}{AD}$ و $X\overset{\Delta}{BC}$ متشابه اند (چون دو زاویه ی برابر دارند) بنا به اجزای نظیر داریم :

$$\frac{CX}{DX} = \frac{CB}{DA}$$

$$\frac{CX}{CB} = \frac{DX}{DA} = K$$

پس خواهیم داشت :



با کمی دقت متوجه می شود که با تجانس مارپیچی $R(C,K,\alpha)$ نقطه ی B به X برده می شـود . و بـا تجـانس مارپیچی $R\left(D,\frac{1}{K},\alpha\right)$ نقطه ی X به A برده می شود پس با تجانس مارپیچی حاصل از ترکیـب دو تجـانس مـارپیچی مذکور یعنی $R(O,1,2\alpha)$، B به A برده می شود ؛ پس داریم : $\angle BOA = 2\alpha$ و O روی عمود منصف AB قـرار دارد (زیرا $OA = OB$)

توجه کنید که در این حالت تجانس مارپیچی به یک دوران حول O و زاویه ی 2α تبدیل شده است . طبق قضیه اساسی چون O مرکز تجانس مارپیچی حاصل از ترکیب دو تجانس مارپیچی با مراکز C و D به ترتیـب بـا زاویـه هـا و نسبت تجانس های (K,α) و $\left(\frac{1}{K},\alpha\right)$ می باشد ، O روی عمود منصف CD قرار خواهد گرفت.

با توجه به آنچه که گفته شد و این نکته که دو خط در حالتی که با هم موازی و هم منطبق نباشند فقـط در یـک نقطه برخورد دارند ، نتیجه می شود که O همان نقطه Y می باشد . و مسئله حل شده اسـت. زیـرا اگـر $\angle BOA = 2\alpha$ باشد آنگاه $\angle BYA = 2\alpha$ ؛ در ضمن چون دو خط BA و CD ناموازی اند پس عمودمنصف های آن هـا نیـز مـوازی یـا منطبق نخواهند بود . پس اثبات کامل است.

مسئله ۱۲. چهار ضلعی محدب $ABCD$ مفروض است . نقاط M و N را بـه ترتیـب بـر روی امتـداد AB و AD

طوری می یابیم که داشته باشیم :

$CN = CD$ ، $CM = CB$ ، $\angle CN = \angle BCM = 90^{0}$

حال محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AMN}$ را K می نامیم . ثابت کنید که AK بر KC عمود است .

حل. طبق حالت سوم طرز یافتن دوران می دانیم که اگر با مرکز تجانس مارپیچی نامشخص نقطه B به D و M به N برده می شود برای یافتن این مرکز دوران کافی است خطوط BM و DN را امتداد داده تا همدیگر را در نقطه ای مثل A قطع کنند . آنگاه محل برخورد دوم دایره های محیطی مثلث های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{AMN}$ را (یعنی K) بیابیم . K مرکز تجانس مارپیچی مذکور خواهد بود.

چون K مرکز تجانس مارپیچی مذکور است چون پاره خط BM طی این تجانس مارپیچی به پاره خط DN رفته است بنابراین وسط پاره خط BM و یعنی F وسط DN یعنی E نیز با تجانس مارپیچی مذکور به هم تبدیل می شوند و زاویه ی FKE برابر زاویه ی تجانس مارپیچی یعنی زاویه ی بین خطوط BM و DN یا زاویه BAD خواهد بود . از آنچه که گفته شد نتیجه می شود چهار ضلعی $AKEF$ محاطی می باشد چون زاویه ی FKE و FAE هر دو برابر می باشند . یا به عبارتی K روی دایره AEF قرار دارد از طرفی دایره ی AEF از C نیز می گذرد چون AC قطر دایره $AECE$ می باشد.

$(\angle AFC = 90, \angle AEC = 90$ یا $\angle AFC + \angle AEC = 180)$

پس K روی دایره ای به قطر AC قرار دارد بنابراین $\angle AKC = 90$ خواهد بود .

به طریق مشابه از موازی بودن خطوط BX و FC و MY و تساوی $\frac{MF}{BF} = BF$ یعنی $\frac{MF}{BF} = 1$ خواهیم داشت $\frac{XC_2}{C_2Y} = 1$ که C_2 محل برخورد CF با XY بود بنابراین C_2 وسط XY می باشد و طبق آنچه گفته شد C_1 و C_2

منطبق است و این به آن معناست که CEF بر یک خط قرار دارند. و با کمی دقت متوجه می شوید که معادل با آن می باشد که زاویه ی BCD قائمه باشد و اگر این چنین باشد زاویه A برابر صفر خواهد بود چون مجموع دو زاویه‌ی BDC و CBD ، ۲۷۰ درجه می باشد و مجموع زاویه های یک چهارضلعی ۳۶۰ می باشد . بنابراین به تناقض رسیدیم و از آنجا که این تناقض از آنجا ناشی شد که C روی XY قرار ندارد پس C بایدروی XY قرار داشته باشد . از آنجا نتیجه می شود که O_1 و O_2 و O نیز روی یک خط قرار دارند . (مجانس های این نقاط)

چون O_2O_1 روی عمودمنصف وتر مشترکشان یعنی AK قرار دارند . و O نیز روی این خط می باشد بنابراین K نیز روی دایره ای با شعاع OA $(OC = OA)$ و مرکز O قرار دارد و داریم $OA = OK = OC$ یعنی K روی دایره ای به قطر AC قرار دارد . بنابراین $\angle AKC = 90$ خواهد بود.