یک جفت دایره

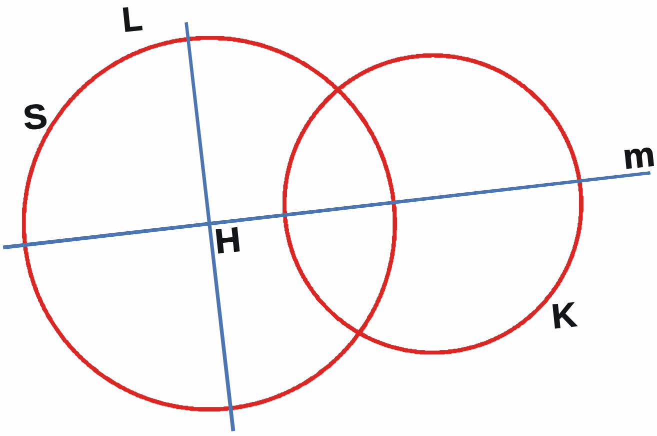
قبلاً دیده ایم که با یک تبدیل موبیوس می توان یک دایره دلخواه از صفحه z را بر یک دایره مشخصی در صفحه w نگاشت. اما در مورد یک جفت دایره چطور؟ آیا همواره می توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایره دلخواه C_2, C_1 در صفحه Z را بر یک جفت دایره مشخص C_2', C_1' در صفحه w نگاشت؟ چون تبدیل موبیوس همدیس است واضح است که اگر C_2, C_1 یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند، C_2', C_1' نیز باید یکدیگر را به زاویه θ قطع کنند. اما اگر این شرط برقرار باشد، آیا می‌توانیم وجود چنین تبدیل موبیوسی را تضمین کنیم؟

پاسخ مثبت است. برای اثبات این حکم کافی است ثابت کنیم که می‌توان با یک تبدیل موبیوس یک جفت دایره دلخواه C_2, C_1 را، یکدیگر را به زاویه θ قطع می‌کنند، بر محور حقیقی و خط $x \sin\theta - y \cos\theta$ نگاشت. (چرا کافی است؟). اما انجام این کار ساده است. خیلی ساده، یکی از دو دایره متقاطع C_2, C_1 را بر نقطه ∞ می‌نگاریم. بدین ترتیب نگاره های C_2, C_1 دو خط متقاطع می‌شوند که زاویه بین آنها θ است. حال نقطه تقاطع این دو خط را به مبدا انتقال می‌دهیم و با یک دوران مناسب کار تمام می‌شود.

در استدلال بالا فرض کردیم که (پیمانه π) θ همنهشت صفر نیست (که در کجا از این فرض استفاده کردیم؟) خوب، اگر این دو دایره بر هم مماس بودند چطور؟ می‌گوییم که با یک تبدیل موبیوس، دو دایره مماس بر هم دلخواه را می توان بر یک جفت دایره مماس بر هم مشخص C_2', C_1' نگاشت. باز کافی است ثابت کنیم که یک جفت دایره مماس بر هم دلخواه C_2, C_1 را می توان با یک تبدیل موبیوس

بر دو خط موازی $y=1, y=0$ نگاشت. باز هم انجام این کار ساده است: نقطه تماس این دو دایره را بر نقطه بینهایت می‌نگاریم، که در این صورت نگاره های دوایر C_2, C_1 یک جفت خط موازی خواهند شد. حال با این انتقال و یک اتساع (یعنی یک دوران و به دنبال آن یک بزرگنمایی) به منظور خود می‌رسیم.

می‌ماند حالت دو دایره ای که متقاطع نیستند. گوییم با یک تبدیل موبیوس همواره می توان یک جفت دایره نامتقاطع را بر یک جفت دایره نامتقاطع را بر یک جفت دایره هم مرکز نگاشت. برای اثبات این ادعا، ابتدا نقطه ای بر یکی از این دو دایره، مثلاً C_2، اختیار کرده آن را بر نقطه بینهایت می‌نگاریم. دراین صورت نگاره های C_2, C_1، دایره و خطی می‌شوند که یکدیگر را قطع نمی‌کنند. این دایره را k و این خط $\mathbf{l}$ را می‌نامیم. فرض کنید m خطی باشد که از مرکز دایره k گذشته و برخط $\mathbf{l}$ عمود باشد. H



شکل۱

را فصل مشترک خطهای $m, \mathbf{l}$ می‌گیریم. توجه داریم که H خارج دایره k است. دایره ای مانند S به مرکز H و عمود بر k رسم می‌کنیم. (برای این منظور کافی است شعاع این دایره را طول مماس مرسوم از H بر این دایره بگیریم. لذا دایره S مشخص می شود). بالاخره یکی از نقاط تقاطع خط m و دایره ی S (هر کدام را که خواستید) را بر نقطه بینهایت می نگاریم. پس نگاره های دایره k و

خط l دو دایره هستند که هر دو بر نگاره های دایره S و خط l عمودند. اما نگاره های دایره S و خط m، دو خط متعامدند. بنابراین باید نگاره های دایره k و خط l یک جفت دایره هم مرکز باشند.

به دقت توجه کنید؛ چنین نیست که می توان یک جفت دایره نامتقاطع دلخواه را بر یک جفت دایره هم مرکز قبلاً مشخص شده ای نگاشت. چه، اگر دو دایره نامتقاطع داده شده باشند، نسبت شعاعهای دو دایره هم مرکزی که بتوان دو دایره مفروض را بر آنها نگاشت عددی است مشخص در اختیار ما نیست.

مثال. فرض می‌کنیم $D=\{z\in \mathbb{C};|z|\le 1\}$ قرص بسته دایره یکه باشد و D' قرص بسته دیگری درون D. (به ویژه دوایر مرزی بسته D',D یکدیگر را قطع نمی‌کنند.) می‌خواهیم نشان دهیم که تبدیل موبیوسی وجود دارد که این قرص دایره بسته یکه را بر خودش و قرص D' را بر قرص $\{w\in \mathbb{C};|w|\le r\}$، با یک شعاع متناسب r، بنگارد. به پیروی از شوینبرگ (۱۹۰۳ – ۱۹۹۱)* محاسبه را چنین دنبال می‌کنیم.

بی آنکه از کلیت مساله کاسته شود، در صورت لزوم با دورانی مناسب، می توان فرض کرد که مرکز D' بر محور حقیقی واقع است و خط

$$[a,b]=D'\cap\{z\in \mathbb{C};\Im z=0\}$$

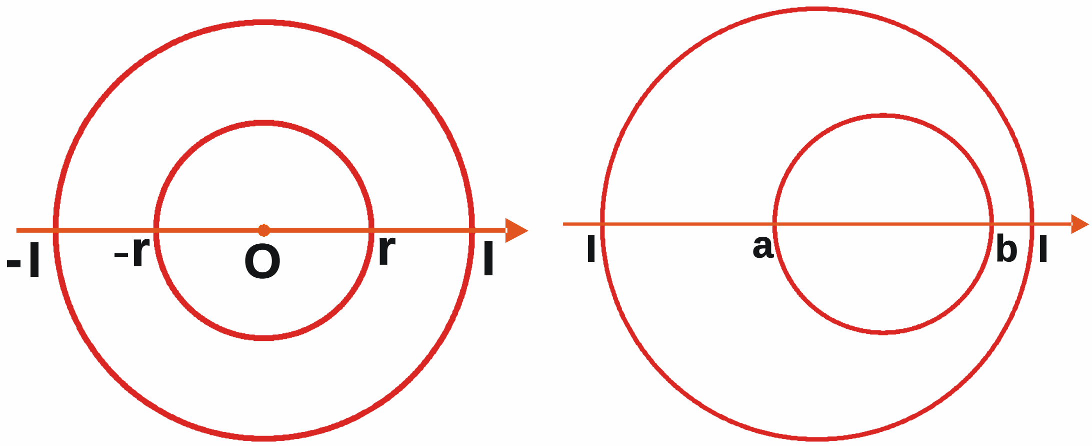
قطری از D' است. اگر $a+b=0$، مساله اثبات شده است. پس بی آنکه از کلیت کاسته شود می‌توان فرض کرد $a+b>0$ (در واقع حتی اگر $a+b<0$، با اصلاح جزئی استدلال ما معتبر خواهد بود).

با یادآوری مثالی از بخش قبل و توجه به این که دو قرص دایره در صفحه z و نگاره های آنها در صفحه w، همه نسبت به محور حقیقی متقارن اند، می‌کوشیم تبدیل موبیوسی به صورت

$$w = \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$$

پیدا کنیم که در آن α عدد حقیقی مناسبی باشد که باید تعیین کنیم. چون همه ضرایب حقیقی اند، این تبدیل موبیوس محور حقیقی را بر خودش می‌نگارد. به علاوه ۱- و ۱ دو نقطه ثابت این تبدیل موبیوس‌اند. چون هر تبدیل موبیوس همدیس است، و مرز دایره های قرصهای D', D محور حقیقی را به زاویه قائمه قطع می‌کنند، کافی است نشان دهیم که می توان عددی حقیقی مانند α چنان یافت کـه b, a را به $r, -r$ (r عددی حقیقی) بنگارد. معنی این، این است که معادله

$$\frac{a-\alpha}{1-\alpha a} + \frac{b-\alpha}{1-\alpha b} = 0$$



شکل۲

باید ریشه های حقیقی داشته باشد. با مرتب نمودن این معادله بر حسب α خواهیم داشت.

$$\alpha^2 - \frac{2(1+ab)}{a+b}\alpha + 1 = 0$$

با محاسبه $\frac{1}{4}$ مبین آن:

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2-1=\frac{1-a^2-b^2+a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}{(a+b)^2}>0 \quad (\because -1<a<b<1)$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادله ریشه های حقیقی دارد. به علاوه از علامتهای ضرایب معادله دیده می‌شود که هر دو ریشه مثبت اند. چون حاصلضرب ریشه های برابر ۱ است (با توجه به فرض ما که دوایر مرزی D', D متقاطع نیستند، $\alpha=1$ ریشه نیست)، نتیجه می گیریم که یکی از ریشه ها بین ۰ و۱ است و دیگری بزرگتر از ۱. ریشه بین صفر و یک را αی خودمان می گیریم و کار تمام است.

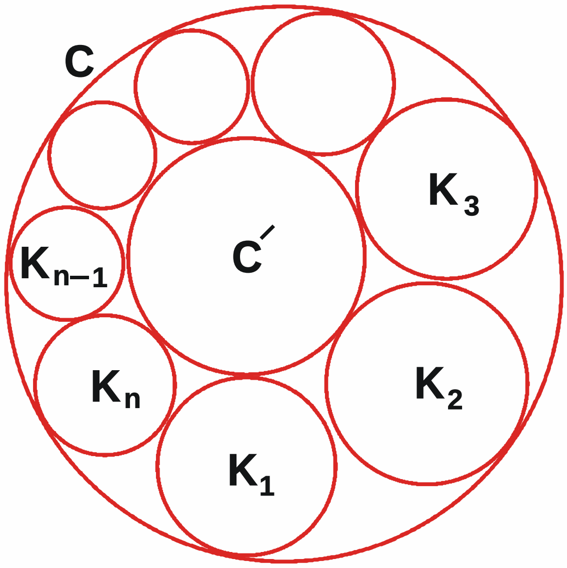
تبصره. الف. در واقع، اگر صرفاً بخواهیم دو دایره مرزی را بر یک جفت دایره هم مرکز بنگاریم، با یک انتخاب می‌توانیم این کار را انجام دهیم. انتخاب ما بستگی به این دارد که بخواهیم دایره کوچکتر را به یک دایره کوچکتر بنگاریم.

ب. حتی اگر $D' \supset D$ (یعنی $b>1, a<-1$)، فقط با اندکی اصلاح استدلال ما معتبر خواهد بود.

قضیه۱. (ی. اشتاینر). فرض می‌کنیم C', C دو دایره در صفحه باشند که یکی (مثلاً C') درون دیگری (دایره C) واقع باشد. دایره ای مثل K_1 رسم می کنیم که مماس داخل بر C و مماس خارجی بر C' باشد. بعد دایره ای مثل K_2 رسم می کنیم که مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر K_1, C' باشد. این روند را ادامه می دهیم تا یک رشته دایره $K_1, K_2, \ldots, K_n$ $(n \ge 3)$ که هر K_j مماس داخلی بر C و مماس خارجی بر K_{j-1}, K_{j+1} $(2 \le j \le n-1)$، C' است، به دست آوریم. اگر چنین پیش آید

که K_n بر K_1 (و البته بر C',C و همچنین بر K_{n-1}) مماس شود، انتخاب جای دایره اولیه K_1 هــر چه باشد باز هم K_n بر K_1 مماس خواهد شد.

برهان. وقتی دوایر C',C را با یک تبدیل موبیوسی بر دو دایره هم مرکز بنگاریم، بداهت قضیه به روشنی دیده خواهد شد.



شکل۳

تبصره. برای حالتی که بتوان یک رشته از n دایره مماس بر هم در دایره C محاط کرد، اشــتاینر رابطه‌ای بین r',r یعنی شعاعهای دوایر C',C و خط المرکزین این دو به دست آورده است:

$$d^2 = (r - r')^2 - 4rr'\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$