تعیین مکان هندسی

قضیه کارنو. فرض کنید نقاط A_1 ، A_2 ،... و A_n ثابتی در صفحه باشند . هم چنین k ، k_1 ، k_2 ،... و k_n $(k_i \neq 0)$ اعدادی حقیقی و ثابت باشند؛

دراین صورت مکان هندسی نقاطی مانند M که: $k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \cdots + k_n|A_nM|^2 = k$

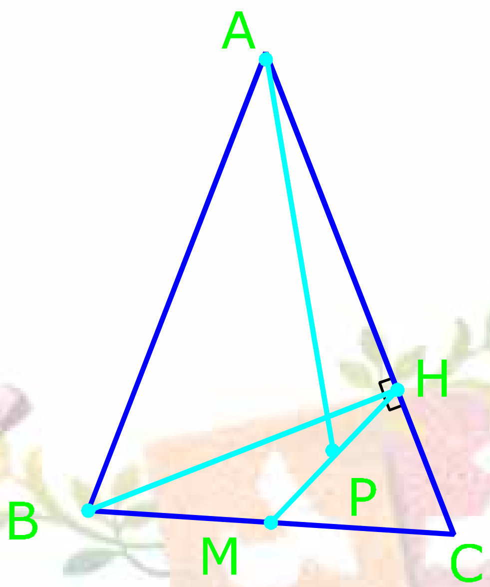
۱. اگر $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \neq 0$ یک دایره، یک نقطه و یا مجموعه تهی است .

۲. اگر $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0$ ، یک خط یا کل صفحه است .

مثال ۱. از نقطه M وسط قاعده BC از مثلث متساوی الساقین ΔABC ، عمود MH را بر ضلع AC فرود می‌آوریم . ثابت کنید اگر P وسط MH باشد، داریم: $AP \perp BH$.

حل. با کمی دقت متوجه می شویم که حکم معادل این است که :

$$AB^2 - AH^2 = BP^2 - PH^2$$



داریم :

$$AB^2 - AH^2 = c^2 - (b - CH)^2$$

$$= c^2 - (c - \frac{1}{2} a.cosc)^2$$

$$= c^2 - c^2 - \frac{1}{4} a^2 cos^2 c + accosc = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} a^2 cos^2 c \quad (cCocc + \frac{a}{2} \text{ زیرا})$$ (۲)

از طرفی :

$$BP^2 - PH^2 = \frac{1}{2} a^2 \frac{-1}{2} MH^2 - \frac{1}{2} a.MH \cos(90^{\mathbf{0}} + c) - PH^2$$

که:

$$MH = \frac{1}{2} a \cos(90^{\mathbf{0}} - c), PH^2 = \frac{1}{4} MH^2$$

پس :

$$BP^2 - PH^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} [acos(90^{\mathbf{0}} - c)]^2 - \frac{1}{2} a[acos(90^{\mathbf{0}} - c)]$$

$$cos(90^{\mathbf{0}} + c) - \frac{1}{4} \left[\frac{a}{2} cos(90^{\mathbf{0}} - c) \right]^2$$

از طرفی :

$$cos(90^{\mathbf{0}} - c).cos(90^{\mathbf{0}} + c) = \frac{1}{2} [cos(90^{\mathbf{0}} + 90^{\mathbf{0}})$$

$$+ cos(90^{\mathbf{0}} - c - 90^{\mathbf{0}} - c)]$$

$$= \frac{1}{2} (cos 2c - 1) = cos^2 c$$

پس : $$BP^2 - PH^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a\cos(90^{0} - c).\cos(90^{0} + c)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2.\cos^2 c \qquad (۲)$$

بنابراین با توجه به تساوی های (۱) و (۲) داریم: $BP^2 - PH^2 = AB^2 - AH^2$ ؛

پس با توجه به قضیه کارنو درستی حکم ثابت شد .

مثال ۲. از واقع K در درون مثلث ΔABC عمودهای KE و KF را بر اضلاع AB و AC رسم کرده ایم . اگر داشته باشیم : $AE.AB = AF.AC$ ، مکان هندسی نقطه K در اثر تغییر نقاط E و F را بیابید.

حل. از آنجا که داریم: $KE \perp AB$ و $KF \perp AC$ ، در نتیجه :

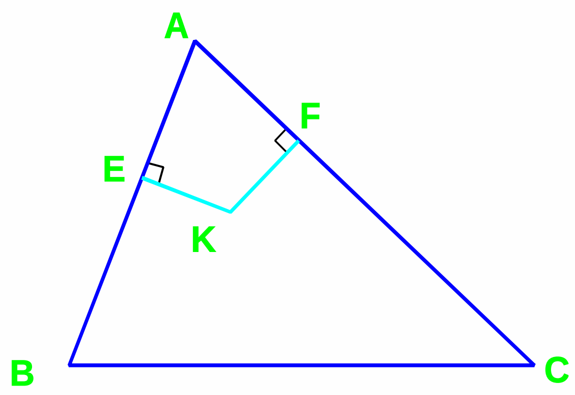
$$\begin{cases} BE^2 - AE^2 = BK^2 - AK^2 \\ AF^2 - FC^2 = AK^2 - CK^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (BE + AE)(BE - AE) = BK^2 - AK^2 \\ (AF + FC)(AF - FC) = AK^2 - CK^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB(BE - AE) = AB(AB - 2AE) = BK^2 - AK^2 \\ AC(AF - FC) = AC(2AF - AC) = AK^2 - CK^2 \end{cases}$$

از جمع دو رابطه بالا داریم :

$$(AB^2 - 2AB.AE) + (2AC.AF - AC^2) = BK^2 - CK^2$$



که با توجه به فرض $AE.AB = AF.AC$ نتیجه می گیریم:

$$AB^2 - AC^2 = BK^2 - CK^2$$

اما طرف چپ تساوی فوق مقداری است ثابت ، بنابراین با توجه به این که مجموع ضرایب $|BK|^2$ و $|CK|^2$ در طرف راست تساوی برابر صفر است ، مکان هندسی مورد نظر بنابر قضیه کارنو ، یا یک خط راست است یا کل صفحه ، واضح است که کل صفحه جواب ما نیست ، زیرا می توان بی شمار نقطه مثل P بین B و C پیدا کرد که $PB^2 - PC^2 \neq a$ (که $a = AB^2 - AC^2$) ؛ پس مکان هندسی مورد نظر حتماً یک خط است .

نقطه K' را روی AB یا در امتداد آن به گونه ای انتخاب می کنیم که $BK'^2 - CK'^2 = a$ حال از K' بر BC عمودی رسم می نماییم . هر نقطه مثل K که روی این عمود قرار بگیرد عضو مکان هندسی مورد نظر ماست و بالعکس ، زیرا :

$$BK^2 - CK^2 = BK'^2 - CK'^2 = a$$

پس مکان هندسی مورد نظر خطی است عمود بر BC که از A می گذرد.

مثال ۳. نقاط F و E طوری روی اضلاع AC و AB از مثلث ΔABC واقعند که $BA\times BE = CA\times CF$.از E و F دو عمود خارج می سازیم تا همدیگر را در نقطه D قطع نمایند ، مکان هندسی نقطه D را به ازای تغییرات E و F بیابید.

حل. واضح است که :

$$BE^2 - AE^2 = BD^2 - AD^2$$

و

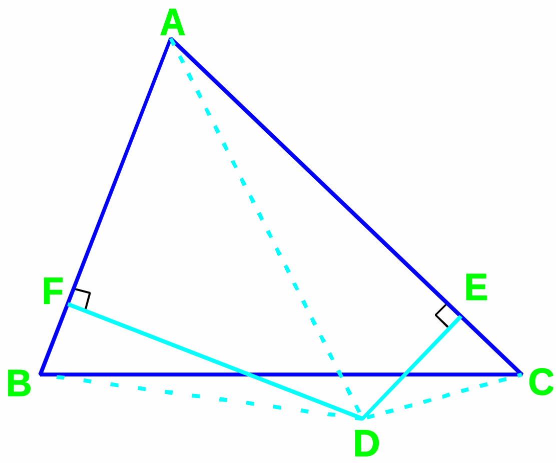
$$CF^2 - AF^2 = CD^2 - AD^2$$

از تفریق دو رابطه فوق خواهیم داشت :

$$(BE^2 - AE^2) - (CF^2 - AF^2) = BD^2 - CD^2$$

$$\Rightarrow AB[BE - (AB - BE)] - AC[CF - (AC - CF)] = BD^2 - CD^2$$

$$\Rightarrow 2(AB.BE - AC.CF) + (AC^2 - AB^2) = BD^2 - CD^2$$



اما از فرض $CA\times CF = BA\times BE$ ؛ خواهیم داشت :

$$BD^2 - CD^2 = AC^2 - AB^2$$

که $AC^2 - AB^2$ مقداری است ثابت . بنابراین با توجه به مثال قبل ، مکان هندسی مورد نظر عبارتست از خطی عمود بر BC که از D می گذرد . پای این عمودرا N می نامیم ، بنابراین $CN^2 - BN^2 = AB^2 - AC^2$ از طرفی برای نقطه H ، یعنی پای ارتفاع وارد بر BC از راس A ، داریم : $BH^2 - CH^2 = AB^2 - AC^2$

با توجه به دو رابطه اخیر ، خواهیم داشت : $CN = BH$ و $BN = CH$ با کمی دقت در می یابیم که N باید قرینه

H نسبت به نقطه وسط BC باشد . پس مکان هندسی مورد نظر ، خطی است عمود بر BC و قرینه یافته ارتفاع نظیر راس A از مثلث ΔABC ، نسبت به عمودمنصف پاره خط BC .

قضیه ۱. برای مجموعه دلخواه از نقاط A_1 ، A_2 ،...و A_n در فضا و مجموعه اعداد حقیقی α_1، α_2،...و α_n که مجموعشان مخالف صفر است ، نقطه منحصر به فرد O موجود است که :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \overrightarrow{OA_i} = 0$$

و بین چنین نقطه ای با هر نقطه دلخواه K رابطه زیر برقرار است :

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) . \overrightarrow{KO} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \overrightarrow{KA_i}$$

این نقطه منحصر به فرد را مرکز هندسی نقاط $A_i (i=1,2,...,n)$ به ضرایب $\alpha_i (i=1,2,...,n)$ می نامیم.

تعریف. M را مرکز ثقل دستگاه نقاط $A_i (i=1,2,...,n)$ می نامیم ، اگر در رابطه زیر صدق کند :

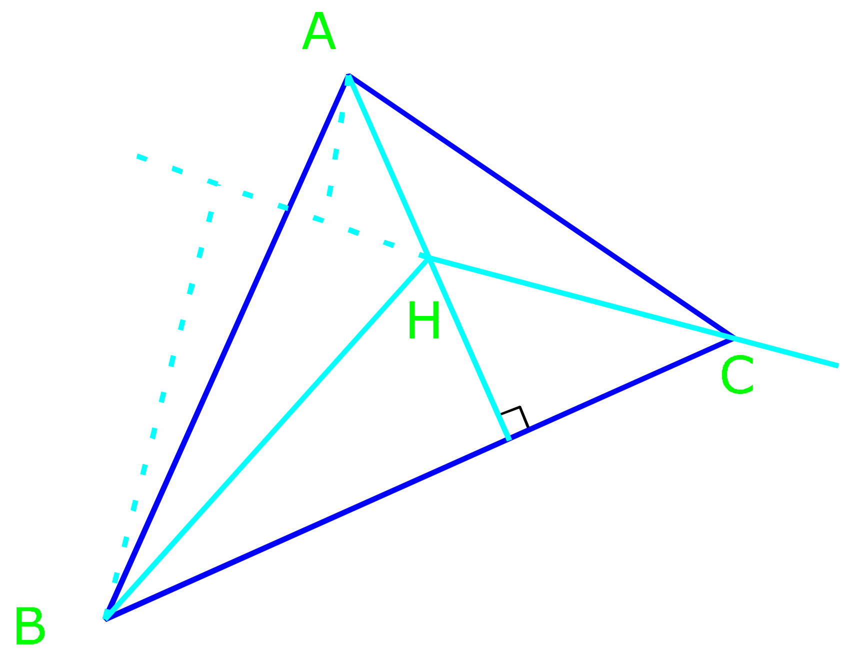
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MA_i} = 0$$

مثال ۴. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC باشد، ثابت کنید :

$$\sum_{A,B,C} tanA . \overrightarrow{HA} = 0$$

و نقطه دیگری به جز H ، دارای این خاصیت نیست .

حل. باید ثابت کنیم حاصل جمع تصاویر $tanB.\overrightarrow{HB}$ و $tanA.\overrightarrow{HA}$ روی $\overrightarrow{HC}$ با $tanC.\overrightarrow{HC}$ صفر است ، مطابق شکل زیر(ب) به همین ترتیب در مورد تصویر روی $\overrightarrow{HB}$ ؛ (زیرا اگر حاصل جمع تصاویر چند بردار در صفحه روی دو بردار مختلف دلخواه صفر شوند، حتماً حاصل جمع حاصل جمع آنها صفر است)



اثبات. اندازه تصویر $\vec{HB}$ و $\vec{HA}$ روی $\vec{HC}$ به ترتیب برابر خواهد بود با : $HB.cosA$ و $HA.cosB$ ،

(زیرا $\angle CHA = 180^0 - B, \angle BHC = 180^0 - A$)

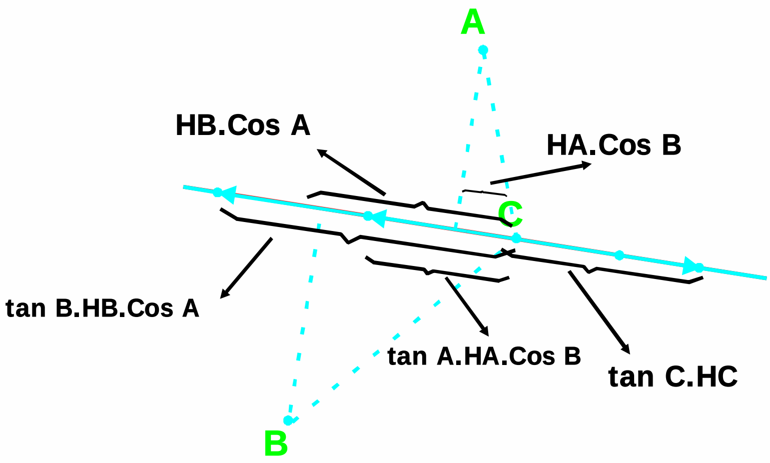
بدین ترتیب حکم معادل این است :

$$HA.cosB.tanA + HB.cosA.tanB = HC.tanC$$

اما می دانیم که $HA = 2RcosA$ و $HB = 2RcosB$ و $HC = 2RcosC$ ؛ پس حکم معادل این است :

$$sinA.cosB + sinBcosA = sinC = sin(A+B)$$

که درست است ، به همین ترتیب در مورد تصویر روی $\vec{HB}$. پس حکم به کلی اثبات گردید.



مثال ۵. فرض کنید M مرکز ثقل نقاط $A_i\ (i=1,2,\dots,n)$ باشد، در نتیجه به ازای هر نقطه دلخواه P خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\overline{MA_i}^2+(\sum_{i=1}^{n}1)\overline{MP}^2 \Rightarrow \overline{MP}^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i}^2-\sum_{i=1}^{n}\overline{MA_i}^2)$$

برای مثال اگر قرار دهیم $P\equiv O$ (O مرکز دایره محیطی مثلث ΔABC) در این صورت برای حالت $n=3$ که $A_1=A$ ، $A_2=B$ ، $A_3=C$ و G مرکز ثقل است ، داریم :

$$\overline{GO}^2=\frac{1}{3}(\sum_{A,B,C}\overline{OA}^2-\sum_{A,B,C}\overline{GA}^2)$$

$$\Rightarrow 3\overline{GO}^2=3R^2-(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$$

و اما کابرد این رابطه در نامساوی های هندسی ؛ تعریف می کنیم : $F(X)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{XA_i}^2$ ،بنابراین داریم :

$$F(P)=F(O)+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overline{OP}^2$$

$F(O)$ مقداری است ثابت، در نتیجه $F(P)$ تنها به فاصله P از O بستگی دارد .

با توجه به آنچه که گفته شد :

$$(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i > 0)\forall P : F(P) \geq F(O)$$

یعنی عبارت $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\overline{PA_i}^2$ هنگامی به کوچکترین مقدار خود می رسد که نقطه P بر O منطبق باشد . برای مثال

با توجه به این که اگر G مرکز ثقل مثلث ΔABC باشد، داریم : $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=0$ ، پس

عبارت $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ وقتی به کوچکترین مقدار خود می رسد که P مرکز ثقل مثلث ΔABC باشد . یا اگر I

مرکز دایره محاطی مثلث ΔABC باشد، از آنجا که داریم : $\sum_{a,b,c} a.\overrightarrow{IA}=0$ ، پس عبارت $\sum_{a,b,c} a.\overline{PA}^2$ هنگامی حداقل

می‌شود که P مرکز دایره محاطی ΔABC باشد .

مثال ۶. مکان هندسی کلیه نقاط P را بیابید، به طوری که برای مثلث مفروض ΔABC با طول اضلاع c, b, a داشته

باشیم:

$$\sum a.\overline{PA}^2 = abc$$

حل. می دانیم: $\sum a.\vec{I}A=0$ ، بنابراین عبارت $\sum a.\overline{PA}^2$ زمانیی و تنها زمانی به کمترین مقدار خود می رسد

که P همان I باشد، حال ثابت می کنیم :

$$\sum_{a,b,c} a.IA^2 = abc \Leftrightarrow \sum_{a,b,c}\frac{a}{\sin^2(\frac{A}{2})}=\frac{abc}{r^2}=\frac{4PR}{r}$$

(اثبات مثلثاتی به عهده خواننده) . در نتیجه مکان هندسی مورد نظر، نقطه منحصر به فرد I خواهد بود .

قضیه ۲. اگر G مرکز ثقل مثلث ΔABC باشد، به ازای هر نقطه دلخواه P در فضا داریم :

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$

برای مثال اگر P همان I ، مرکز دایره محاطی مثلث ΔABC باشد ، داریم :

$$\vec{IG} = \frac{1}{3}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC})$$

تعریف. مرکز ثقل دستگاه مثلث های $A_i B_i C_i \ (i = 1,2,...,n)$ به نقطه ای مانند P گویند که داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{n} S_i . \vec{PG_i} = 0$$

که G_i و S_i به ترتیب معرف مرکز ثقل و مساحت مثلث $\Delta A_i B_i C_i$ می باشند . در واقع P مرکز ثقل ، مرکز ثقل های مثلث های $\Delta A_i B_i C_i$ است .

مثال ۷. ثابت کنید : $\sum_{a,b,c} a.\vec{IA} = 0$ (که I مرکز دایره محاطی مثلث ΔABC می باشد و c, b, a اضلاع متناظر رئوس C, B, A هستند.)

حل. این مثال را با روش دیگری پیشتر اثبات کردیم ، اما در این جا با توجه به قضیه ای که اخیراً اثبات نمودیم ، مثال را مجدداً حل می کنیم :

با توجه به آنچه در قضیه ای داشتیم ، به ازای هر نقطه دلخواه داریم :

$$\sum_{A,B,C} S_A . \vec{PA} = 0$$

بنابراین اگر قرار دهیم $P \equiv I$ ، داریم :

$$\sum_{A,B,C} S_A . \vec{IA} = 0$$

که S_A و S_B و S_C برابر خواهند بود با مساحت مثلث های ΔBIC ، ΔCIA و ΔAIB .

اما داریم :

$$S(\Delta AIB)=\frac{1}{2}rc, S(\Delta CIA)=\frac{1}{2}rb, S(\Delta BIC)=\frac{1}{2}ra$$

که r شعاع دایره محاطی است .

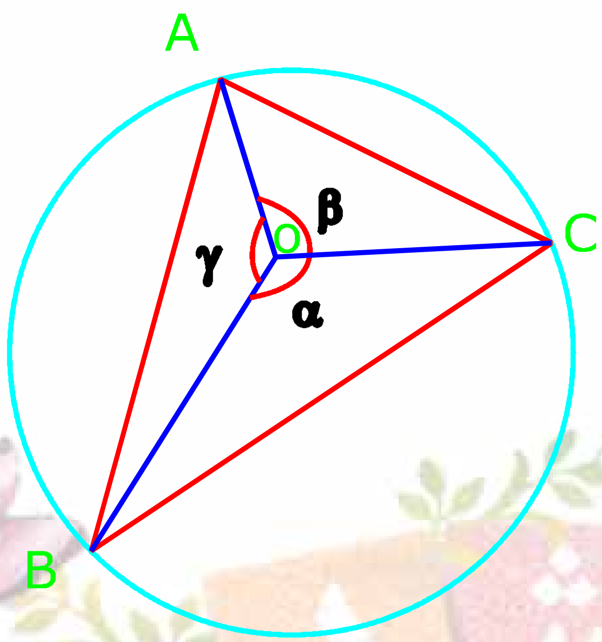
بنابراین :

$$\sum_{A,B,C} S_A.\overrightarrow{IA}=0=\sum_{a,b,c}\frac{1}{2}r.a.\overrightarrow{IA}\Rightarrow\sum_{a,b,c}a.\overrightarrow{IA}=0$$

مثال ۸: اگر O مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، ثابت کنید :

$$\sum_{A,B,C}(\sin 2A).\overrightarrow{OA}=0$$

حل: این مسئله را نیز قبلاً به روش دیگری اثبات نمودیم ، حال دوباره با استفاده از قضیه اخیر آن را ثابت می‌نماییم . اگر داشته باشیم :



$\angle AOB = \gamma$

$\angle BOC = \alpha$

$\angle COA = \beta$

و می دانیم $\gamma = 2\hat{C}$ و $\beta = 2\hat{B}$ و $\alpha = 2\hat{A}$.

از طرفی مساحت مثلث ΔAOB برابر است با :

$$S(A\overset{\Delta}{O}B) = \frac{OA.OB}{2} sin A\hat{O}B$$

پس : $S(A\overset{\Delta}{O}B) = \frac{R^2}{2} sin(2\hat{C})$ (که R شعاع دایره محیطی ΔABC است) .

در نتیجه با توجه به قضیه ای که ذکر شد داریم :

$$\sum_{A,B,C} S_C.\vec{OC} = 0 = \sum_{A,B,C} S(A\overset{\Delta}{O}B).\vec{OC} = \sum_{A,B,C} \frac{R^2}{2} sin(2C).\vec{OC}$$

$$\Rightarrow \sum_{A,B,C} sin 2C.\vec{OC} = 0$$