قضیه بطلیموس – اویلر

به ازای هر چهار عدد مختلط $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ به آسانی می توان تساوی زیر را تحقیق کرد

$$(\alpha-\beta).(\gamma-\delta)+(\alpha-\delta).(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma).(\beta-\delta)$$

و با توجه به نابرابری مثلثی خواهیم داشت

$$|\alpha-\beta|.|\gamma-\delta|+|\alpha-\delta|,|\beta-\gamma|\geq|\alpha-\gamma|.|\beta-\delta|$$

اکنون به بررسی حالتی می‌پردازیم که این نابرابری به برابری بدل شود. در حالت نابرابری مثلثی،

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

تساوی، فقط و فقط هنگامی برقرار خواهد شد که $\frac{z_1}{z_2}$ یک عدد حقیقی مثبت (به شرط $z_1 z_2 \neq 0$)

باشد. پس به جستجوی شرطی می پردازیم که ضامن مثبت و حقیقی بودن عدد

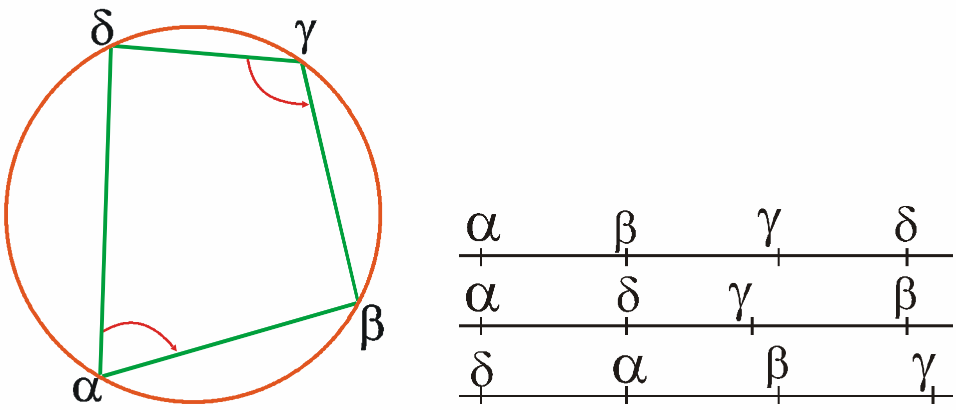
$$\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$$ عدد مثبت حقیقی بودن

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\Big/\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta}$$ عدد منفی حقیقی بودن

$$\Leftrightarrow \arg\left\{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\Big/\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\delta}\right\}$$

$$=\arg\left\{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\right\}-\arg\left\{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\delta}\right\}\equiv\pi$$ (پیمانه 2π)

یعنی $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ همدایره هستند .و α, γ در دو طرف وتر واصل بین دو نقطه δ, β قرار دارنـد، که نتیجه آن به ترتیب الفبایی قرار گرفتن این نقاط (ساعتسو یا پادساعتسو) است. پس قـضیه زیـر را ثابت کردیم.



شکل۱

قضیه۱. به ازای هر چهار نقطه D, C, B, A در صفحه داریم

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{DA} \geq \overline{AC}.\overline{BD}$$

تساوی هنگامی و فقط هنگامی برقرار می‌شود که این چهار نقطه همدایره (یا همخط) باشند و به ترتیب الفبایی (ساعتسو یا پاد ساعتسو) قرار گرفته باشند.

حالت تساوی توسط ک. بطلیموس (حدود ۸۵ – ۱۶۵ ب.م) کشف گردید، در صورتی کـه حالـت کلی متجاوز از هزار سال بعد توسط ل. اویلر (۱۷۰۷ – ۱۷۸۳) پیدا شد. ولی با استفاده از اعداد مخـتلط نتایج آن را می‌توان فقط در یک سطر به دست آورد.

عبارت

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta):=\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\right)\Big/\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}\right)$$

را نسبت ناهمساز چهار نقطه $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ گویند، این نسبت نقش مهمی در بخشهای مختلف ریاضیات، به خصوص در هندسه تصویری، که مسلماً یکی از زیباترین شاخه های ریاضیات است ایفا می کند.

فرع ۱. چهار نقطه همدایره (همخط) اند، اگر و فقط اگر

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in \mathbb{R}$$

در مطالب بعد، همخطی، حالت خاص (تباهیده) همدایرگی در نظر گرفته می‌شود.

هنگامی که چهار ضلعی محاطی به مستطیل بدل شود، قضیه بطلیموس به صورت زیر در می آید:

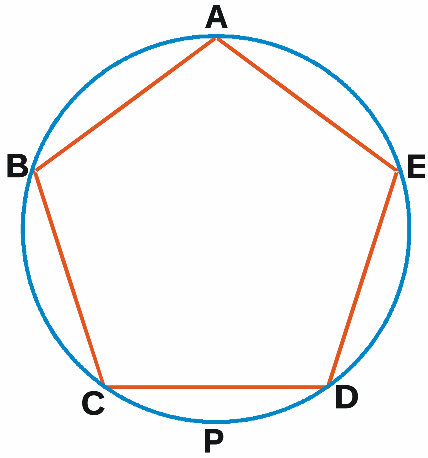
فرع ۲. (فیثاغورس) در مثلث قائم الزاویه ABC ، قائمه در راس C، داریم:

$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$$

مثال. فرض می‌کنیم $ABCDE$ پنج ضلعی منتظمی به ضلع 1 محاط در دایره ای به شعاع P,r وسط $d,\widehat{CD}$ طول یک قطر آن باشد. با استفاده از قضیه بطلیموس برای چهار ضلعیهای $ACPD, ACDE$ خواهیم داشت:

$$2xd=2r1 \quad , \quad d1+1^2=d^2$$

که درآن x طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایره ای به شعاع r است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\varphi:=\frac{r}{x}=\frac{d}{1}$ در تساوی $\varphi^2=\varphi+1$ صدق می‌کند.



شکل۲

بنابراین نسبت شعاع r به طول ضلع ده ضلعی منتظم محاطی، x ، نسبت زرین معروف را می‌دهد:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because \varphi > 0)$$

بویژه همان طوری که قبلا دیده ایم، یک پنج ضلعی منتظم را می توان با یک ستاره و پرگار رسم کرد.