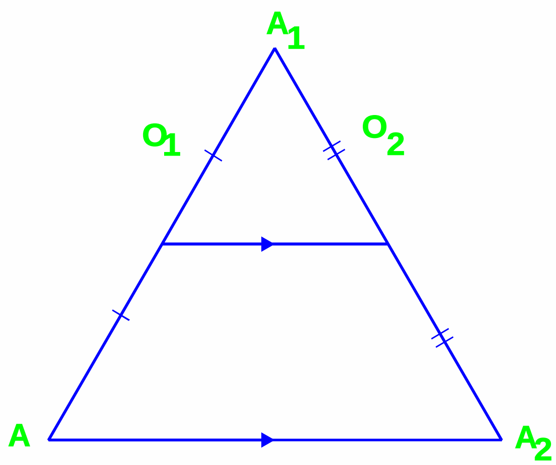
نیم دور

تعریف نیمدور. حالت خاصی از دوران است که در آن زاویه دوران 180^0 می باشد .

قضیه ۱. ترکیب دو نیم دور یک انتقال است .

اثبات اول. چون در نیمدور زاویه دوران ۱۸۰ درجه می باشد مجموع زاویه های دو دوران ۳۶۰=۱۸۰+۱۸۰ می باشد و طبق قضیه ۸ ترکیب این دو دوران (یا نیمدور) یک انتقال است .

اثبات دوم. فرض کنید A_1 از نیمدور A حول O_1 و A_2 نیز از نیمدور A_1 حول O_2 به دست آید . طبق ویژگی های دوران داریم $O_1A = O_1A_1$ ، پس O_1 وسط AA_1 است .



به طریق مشابه O_2 وسط A_1A_2 می باشد $(A_1O_2 = A_2O_2)$. طبق تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{O_1A_1O_2}$ و $\overset{\Delta}{AA_1A_2}$ (اثبات به عهده خواننده) داریم :

$$\frac{AA_1}{A_1O_1} = \frac{A_1A_2}{A_1O_2} = \frac{AA_2}{O1O_2} \qquad (I)$$

چون $AA_1=2O_1A_1$ (O_1 وسط AA_1) داریم : $\frac{AA_1}{A_1O_1}=2$ پس طبق رابطه (I) داریـم : $\frac{AA_1}{A_1O_1}=\frac{AA_2}{O_1O_2}=2$ و

لذا $AA_2=2O_1O_2$. از طرفی طبق عکس قضیه تالس O_1O_2 موازی A_1A_2 می باشد . پس طول AA_2 ثابت و دو برابـر فاصله مرکز ها یعنی $2O_1O_2$ می باشد.

نکته. اگر ابتدا نیمدور حـول O_1 و سـپس حـول O_2 انجـام پـذیرد ، جهـت بـردار از O_1 بـه O_2 مـی باشـد ، یعنی $2\overrightarrow{O_1O_2}$ و اگرابتدا نیم دور حول O_2 و سپس حول O_1 باشد ، جهت برداراز O_2 به O_1 می باشد یعنی $2\overrightarrow{O_2O_1}$.

ویژگی های نیمدور :

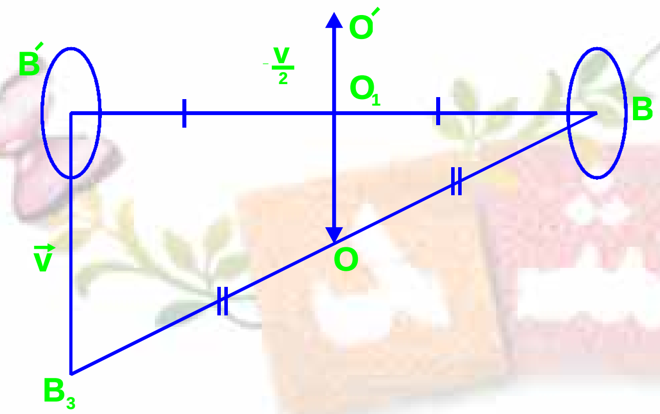
۱. تنها نقطه ای که بر اثر نیمدور ثابت می ماند ، مرکز O است که نیمدور حول آن صورت می گیرد.

۲. خطوطی که از مرکز نیمدور می گذرند ثابت می مانند .

تذکر. تمام ویژگی های دوران برای نیمدور نیز صادق هستند.

قضیه ۲. ترکیب یک انتقال و یک نیمدور یک نیمدور است .

اثبات. فرض کنیم B' از نیمدور B حول O_1 به دست آمده باشد و B'' از انتقال B' با بردار $\vec{v}$ به دست آمده باشد .



ابتدا باید نشان دهیم که یک نقطه ثابت وجود دارد که پس از انتقال و نیمدور جای ثابتی داشته باشد . ابتدا از O_1

بردار $\frac{\vec{V}}{2}$ را رسم می کنیم و انتهای آن را O می نامیم ، دوران ۱۸۰(نیمدور) O را به O' مــی بــرد کــه $\overrightarrow{O'O} = \vec{v} +$ پــس

انتقال با بردار $\vec{v}$ ، o' را به o باز می گرداند پس در کل نقطه O ثابت است . از نقطه B به O وصل می کنـیم تـا راسـتای

بردار $\vec{v}$ (راستایی که از B' می گذرد.) را در B_3 قطع کند ودوخط O_1O و $B'B''$ موازی اند زیرا $\overrightarrow{O_1O} = \frac{\vec{v}}{2}$ و $\vec{B'B''} = \vec{v}$.

از طرفی B_3 روی خط $B'B''$ قرار دارد پس خط $B'B_3$ همان خط $B'B''$ است . پس طبق قضیه تـالس ، چـون در مثلـث

$\overset{\Delta}{BB'B_3}$ خط O_1O موازی ضلع $B'B_3$ می باشد در مثلث مذکور اضلاع متناسب پدید می آورد، یعنی :

$$\frac{BO_1}{BB'} = \frac{BO}{BB_3} = \frac{OO_1}{B'B_3}$$

از طرفی طبق ویژگی های دوران می دانیم $2BO_1 = BB'$ پس : $\frac{BO_1}{BB'} = \frac{1}{2}$ و

$$\frac{BO_1}{BB'} = \frac{BO}{BB_3} = \frac{OO_1}{B'B_3} = \frac{1}{2}$$

از $\frac{BO}{BB_3} = \frac{1}{2}$ نتیجه می گیریم که $BB_3 = 2BO$ ؛ پس O وسط پاره خط BB_3 می باشد و ایـن بـدان معناسـت

که B_3 از یک نیمدور B حول O به دست می آید و مسئله حل شده است .

مسئله ۱. فرض کنید تعداد فردی از نقاط $O_1, O_2, \ldots$ و O_n در صفحه داده شده باشند . یک نقطه دلخواه A مرتباً

با نیمدورهایی حول $O_1, O_2, \ldots$ و O_n تبدیل شود تا A_n به دست آید یعنی A با نیمدور حـول O_1 بـه A_1 بـرود و A_1 بـا

نیمدور حول O_2 به A_2 و...، A_{n-1} با نیمدور حول O_n به A_n برود . نشان دهید که نقطه A_{2n} ، کـه نتیجـه تـاثیر $2n$

نیمدور است بر A منطبق است آیا حکم مسئله برای وقتی که n زوج باشد برقرار است ؟

حل. ادعا می کنیم که ترکیب نیمدورهای $O_1, \ldots, O_{n-1}$ (چون $n-1$ زوج است) برابر یک انتقـال بـه طـول $|\vec{V}|$

می‌باشند:

$$\vec{V} = 2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_3O_4} + \cdots + 2\overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}}$$

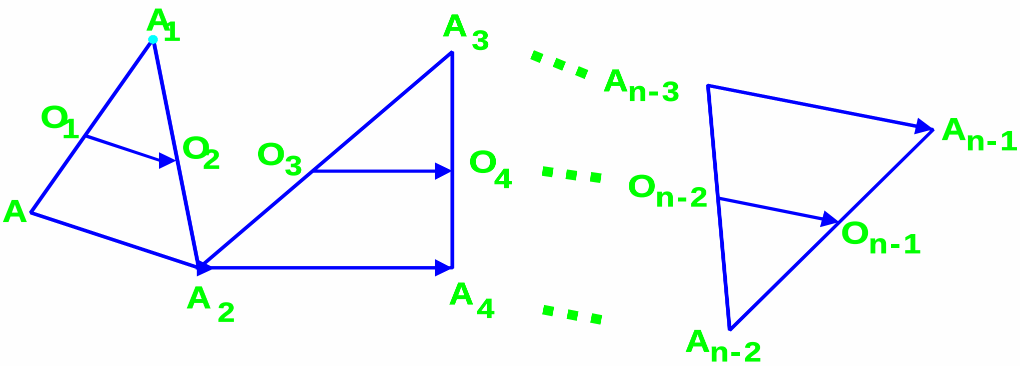
چون ترکیب دو نیمدور یک انتقال است ، ($\alpha = \beta = 180$ پس $\alpha + \beta = 360$) پس ترتیب ترکیب دو نیمدور حول O_3 و O_4 برابرانتقال $2\overrightarrow{O_3O_4}$,... و ترکیب دو نیمدور حول O_{n-2} و O_{n-1} برابر انتقال $2\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$ می باشد پس ترکیب نیمدورهای حول $O_1 , O_2 ,\ldots$ و O_{n-1} برابر انتقال $\vec{v} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \cdots + \overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}}$ که بردار $\vec{V}$، A را به A_{n-1} می برد (طبق قضیه ۱) . از طرفی نیمدور حول O_n، A_{n-1} را به A_n می برد، پس طبق ویژگی نیمدور $A_nO_n = A_{n-1}O_n$ می باشد ؛ یعنی O_n وسط $A_{n-1}A_n$ می باشد . (شکل۱الف)

حال نیمدورهای $O_1 , O_2 ,\ldots$ و O_{n-1} ، A_n را به نقطه A_{2n-1} می برند که طبق قضیه ۱ یک انتقال با بردار

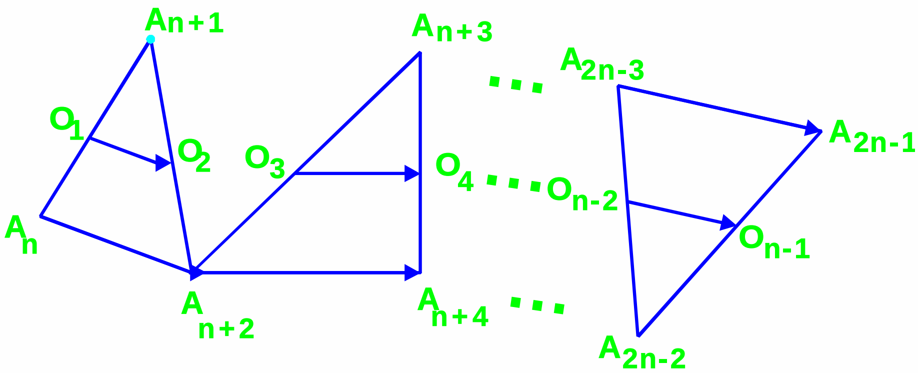
$$\vec{V} = 2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_3O_4} + \cdots + 2\overrightarrow{O_{n-2}O_{n-1}}$$

می باشد . (توجه کنید که A_n با نیمدور حول O_1 به $A_{n+1} ,\ldots, A_{2n-2}$ با نیمدور حول O_{n-1} به A_{2n-1} می رود.)

اگر ثابت کنیم O_n وسط پاره خط AA_{2n-1} است مسئله حل شده است ؛ زیرا آنگاه نیمدور حول O_n، A_{2n-1} را به A می برد و یعنی A_{2n} بر A_n منطبق است .

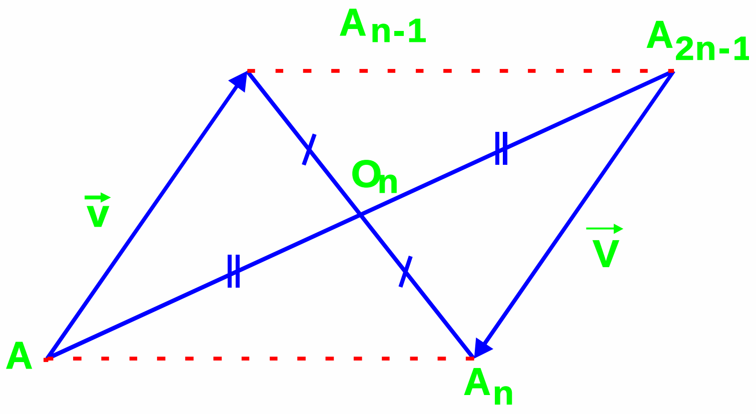


شکل۱(الف)



شکل۱(ب)

برای این منظور از A به A_n واز A_{n-1} به A_{2n-1} وصل می کنیم . (شکل ج) چهار ضلعی $AA_{n-1}A_{2n-1}A_n$ متوازی الاضلاع است . زیرا دو ضلع رو به روی موازی و مساوی دارد ، یعنی $AA_{n-1} \| A_nA_{2n-1}$ و $AA_{n-1}=A_nA_{2n-1}$ (زیرا $\overrightarrow{A_nA_{2n-1}}=\vec{V}$ و $\overrightarrow{AA_{n-1}}=\vec{V}$) از طرفی می دانیم که در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند ؛ پس O_n محل برخورد قطرها می باشد ، چون وسط A_nA_{n-1} می باشد . بنابراین وسط AA_{2n-1} نیز می باشد و حکم ثابت شده است و چون A_{2n} بر A منطبق است .



شکل (ج)