نمای مختلط:

چنین تعریف می‌کنیم که $e^{i\theta}=\cos\theta+i\ \sin\theta$ ، و به $e^{i\theta}$ نمای مختلط می‌گوییم (توجه کنید که $e^{io}=Cis\theta$ است). در این کتاب از علت درستی این تساوی صرف نظر می‌کنیم، اما خواص نمای مختلط را بررسی خواهیم نمود.

بنابر آنچه که گفتیم داریم : $\left|e^{i\theta}\right|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$. پس $e^{i\theta}$ دارای مختصات $(\cos\theta,\sin\theta)$ بوده و روی محیط دایره یکه (دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد) قرار دارد، همچنین با توجه به خواص $Cis\theta$ داریم:

۱. $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)}\,(k=0,1,\ldots)$

۲. $e^{io}.e^{i\beta}=e^{i(\theta+\beta)}$

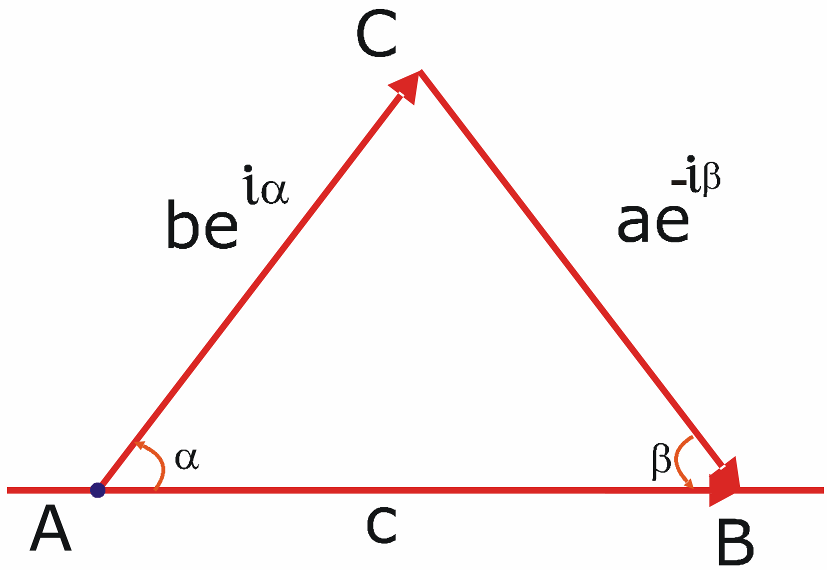
۳. $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{i(n\theta)}$

۴. $\left(\overline{e^{i\theta}}\right)==e^{-i\theta}$

حال از تساوی $e^{i\theta}=Cis\theta$ ، می‌توانیم شکل نمایی z را نیز بدست آوریم:

$$z=|z|Cis\theta=|z|e^{i\theta}$$

برای مثال می‌توان قانون سینوس‌ها و کسینوس ها را با استفاده از این روش ثابت نمود. با توجه به شکل داریم:



$$c = b\ e^{i\alpha} + a\ e^{-i\beta} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$= b(\cos\alpha + i\ \sin\alpha) + \alpha(\cos\beta - i\ \sin\beta)$$

$$\Rightarrow c + i_0 = (b\ \cos A + a\ \cos B) + i\,(b\ \sin A - a\ \sin B)$$

از برابر قرار دادن قسمتهای موهومی و حقیقی رابطه فوق باید قسمت موهومی برابر صفر باشد ، یعنــی :

$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$، و قسمت حقیقی آن با c برابر شود، یعنی:

$$c = b\ \cos A + a\ \cos B \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\ \cos(A + B)$$

$$= a^2 + b^2 = -2ab\ \cos\hat{C}$$

قضیه دموآور.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \theta \in \mathbb{R} : \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}$$

با توجه به این که $e^{i\theta} = Cis\theta$ ، این رابطه قبلاً ثابت شده است.

گفتیم $Cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ یا در واقع $e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $\left(k=0,1,\dots,n-1\right)$ ریشه‌های معادله $x^n=1$ هستند. بنابراین $a^n.e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ که $k=0,\dots,n-1, a\in \mathbb{R}^+$ ریشه‌های معادله $x^n=a^n$ هستند، یعنی کلیه این نقاط روی دایره ای به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات قرار دارند. همچنین این n نقطه رئوس یک n ضلعی منتظم خواهند بود.

قضیه ۱. مجموع تمام n ریشه n ام واحد، برابر با صفر است.

اثبات. فرض کنید $\left(i=0,1,\dots,n-1\right)w^i$ ریشه های n ام واحد باشند (ریشه w که $w=Cis(\frac{2\pi}{n})$ ریشه n ام اولیه واحد نام دارد)، پس مجموع ریشه ها برابر است با:

$$1+w+w^2+\dots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}$$

اما داشتیم: $\left(w\neq 1\right)w^n=1$، پس صورت کسر سمت راست تساوی فوق، صفر خواهد بود و حکم ثابت شد.

مثال۱. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ رئوس یک n ضلعی منتظم با دایره محیطی به شعاع واحد باشند ثابت کنید به ازای هر نقطه P روی محیط این دایره داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA_i^2}=2n$$

حل. اگر اعداد مختلط متناظر A_i ها را در صفحه مختلط با a_i ها، و عدد متناظر P را با p نشان دهیم،

داریم:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \overline{PA_i^2} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} |p - a_i|^2$$

(نماد $(\rightarrow)$ را نشان دهنده تناظر در صفحه مختلط در نظر گرفته ایم)

که خواهیم داشت:

$$K = \sum_{i=1}^{n} |p - a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} (p - a_i)(\overline{p} - \overline{a}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(p\overline{p} + a_i\overline{a}_i - (a_i\overline{p} + \overline{a}_i . p) \right)$$

حال از آنجا که a_i, p ها روی محیط دایره به شعاع واحد قرار دارند، اگر مرکز دایره را مبـدا مختـصات قرار دهیم، داریم:

$$p\overline{p} = |p|^2 = 1, a_i\overline{a}_i = |a_i|^2 = 1$$

بنابراین:

$$K = 2n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i . \overline{p} + \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i . p \right) = 2n - \left(\overline{p} . \sum_{i=1}^{n} a_i \right) - \left(p \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \right)$$

همچنین از قضیه قبلی می‌دانیم که: $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ و در نتیجه

$$\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i = 0$$

پس: $K = 2n - (\overline{p} \times 0) = 2n$

و حکم بدین ترتیب اثبات گردید.

تابع نمایی

در درس حساب دیفرانسیل وانتگرال آموخته ایم که به ازای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$،

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

اگر به جای x ،$i\theta$ قرار دهیم چه خواهد شد؟ طرف چپ این تساوی $e^{i\theta}$ می‌شود، اما اینکه تابع نمایی با متغیر مختلط چیست؟ نمی دانیم. پس ابتدا نگاهی به طرف راست این تساوی مـی‌انـدازیم. هـر جمله $(i\theta)^n / n!$ کاملاً تعبیر خوبی دارد پس جملات را براساس آنهایی که i دارند و آنهایی که i ندارند دسته بندی می‌کنیم (چون این سری همگرای مطلق است، ترتیب مجموعیابی را مـی تـوانیم در سـری نامتناهی تغییردهیم)، و خواهد شد

$$\left\{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right\}$$

$$+ i\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right\}$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

باز هم به چیزی رسیدیم که در حساب دیفرانسیل وانتگرال آموخته بودیم. چـون $e^{i\theta}$ معنـایی نـدارد، می‌توانیم از این نتیجه برای تعریف آن استفاده کنیم.

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i \sin\theta$$

بنابراین فرمول دموآور یعنی

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + i\ \sin n\theta$$

به

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

تبدیل می‌شود که فرمولی پیش پا افتاده است. از قرار دادن $\theta = \pi$ در تساوی معرف $e^{i\theta}$، خواهیم داشت

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad \therefore\ e^{i\pi} + 1 = 0$$

که پنج عدد $i, e, \pi, 1, 0$ را بهم مربوط می‌کند؛ و می توان ثابت کرد که این ۵ عدد مهمترین اعداد در ریاضیات هستند.

اما تابع نمایی $f(x) = e^x$, $(x \in \mathbb{R})$، با ویژگی :

$$e^{x+y} = e^x . e^y \quad \text{یعنی} \quad f(x+y) = f(x). f(y)$$

(وشرط اولیه $f'(0) = 1$) نامشخص می‌شود. آیا بازهم این ویژگی هنگامی که به متغیر مختلط گسترش داده شود معتبر می ماند؟ پاسخ مثبت از آب در می آید. یک استدلال استادانه در کتاب « آنالیز ریاضی» تاکاگی آمده و آن این است که از یک سری با توان مختلط می توان در داخل قرص همگرایی جمله به جمله مشتق گرفت. فرض کنید

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

با مشتقگیری جمله به جمله از آن بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(z) = f(z)$$

به ازای جمیع مقادیر $z \in$ £ و جمیع مقادیر $n \in$ ¥.

بنابراین از بسط تابع $f(z+w)$ به سری تیلر در حول نقطه z خواهیم داشت

$$f(z+w)=f(z)\frac{f'(z)}{1!}w+\frac{f''(z)}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(z)}{n!}w^{n}+\ldots$$

$$=f(z)\left\{1+\frac{w}{1!}+\frac{w^{2}}{2!}+\ldots+\frac{w^{n}}{n!}+\ldots\right\}$$

$$=f(z).f(w)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

از جمع و تفریق تساویهای

$$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$$

و

$$e^{-i\theta}=cos\theta-i\ sin\theta$$

خواهیم داشت

$$cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و از ضرب این دو رابطه تساوی

$$cos^{2}\theta+sin^{2}\theta=1$$

به دست می‌آید.

مثال۳. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 2 & (n=0) \\ 0 & (n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots) \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} cos^4\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 d\theta$$

$$= \frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{6}{16}\int_{.0}^{2\pi} d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

به طور کلیتر، به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، داریم

$$\int_0^{2\pi} sin^{2n}\theta d\theta = \int_0^{2\pi} cos^{2n}\theta d\theta = \binom{2n}{n} . \frac{2n}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} . \frac{2\pi}{2^{2n}}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-3).(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2).(2n)} .2\pi$$ **(والیس)**