ضرب داخلی بردارها

تعریف. ضرب داخلی دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را برابر با $|\vec{a}|.|\vec{b}|.Cos\alpha$ در نظر می گیریم ، که در آن α زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است . البته ضرب داخلی تعریف گسترده تری دارد اما در این جا به تعریف این حالت خاص که مورد نیاز ماست اکتفا خواهیم کرد .

پس ، ضرب داخلی دو بردار عددی حقیقی است که مقدارش $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.Cos\alpha$ می باشد .

نتیجه مهم این تعریف آن است که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیر صفر و بر هم عمودند اگر و تنها اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$. لذا یکی از کاربردهای ضرب داخلی اثبات عمود بودن خطوط بر هم می باشد .

خواص ضرب داخلی

(۱) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (۲) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

(۳) $\alpha(\vec{a}.\vec{b})=(\alpha\vec{a}).\vec{b}:(\alpha\in IR)$

(۴) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$ و هنگامی $\vec{a}.\vec{a}$ برابر صفر خواهد شد که $\vec{a}=0$. (توجه که داریم : $\vec{a}.\vec{b}\in \mathbb{R}$)

همان طور که گفتیم از ضرب داخلی بردارها می توان برای اثبات عمود بودن دو خط بر هم ، نیز استفاده کرد . به مثال زیر توجه کنید ،

مثال ۱. ثابت کنید در هر مثلث ، ارتفاع ها همرسند .

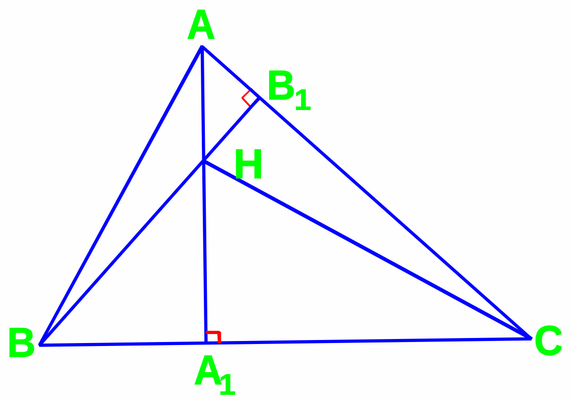
حل. فرض کنید AA_1 و BB_1 دو ارتفاع از مثلث مفروض ΔABC ، یکدیگر را در H قطع نماید . حال باید ثابت کرد $AB\perp CH$ ؛ یا به زبان برداری ، باید ثابت کرد :

$$\vec{CH}\,.\,\vec{AB}=0$$

با توجه به آنچه که گفتیم داریم :

$$\vec{BH}\,.\,\vec{AC}=0 \qquad (۱)$$

$$\vec{AH}\,.\,\vec{BC}=0 \qquad (۲)$$



حال داریم :

$$\vec{CH}\,.\,\vec{AB}=\vec{CH}\,.(\vec{AC}-\vec{BC})$$

$$=\vec{CH}\,.\,\vec{AC}-\vec{CH}\,.\,\vec{BC}$$

$$=(\vec{BH}-\vec{BC}).\vec{AC}-(\vec{AH}-\vec{AC}).\vec{BC}$$

$$=\vec{BH}\,.\,\vec{AC}-\vec{BC}\,.\,\vec{AC}-\vec{AH}\,.\,\vec{AC}+\vec{BC}\,.\,\vec{AC}$$

$$=\vec{BH}\,.\,\vec{AC}+\vec{AH}\,.\,\vec{BC}$$

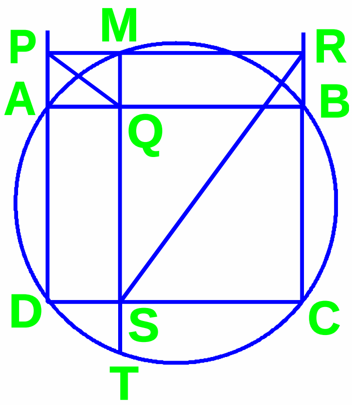
که این مقدار با توجه به روابط (۱) و (۲) برابر با صفر خواهد بود ، در نتیجه حکم ثابت می شود.

حال به چند مثال پیچیده تر می پردازیم :

مثال ۲. روی کمان AB از دایره محیطی مستطیل $ABCD$ ، نقطه M را (به جز A و B) در نظر گرفته ایم . تصویر نقطه M را بر خطوط AB ، AD ، BC و CD به ترتیب Q ، P ، R و S بنامید.

ثابت کنید : $PQ \perp RS$.

حل. فرض کنید محل برخورد خطی که از M ، Q و S می گذرد با دایره محیطی ، نقطه T باشد .



پس داریم : $MQ = ST$

در نتیجه :

$$\vec{RS} = \vec{MS} - \vec{MR} = \vec{QT} - \vec{QB}, \vec{PQ} = \vec{AQ} + \vec{MQ}$$

پس با جایگذاری این دو رابطه خواهیم داشت :

$$\vec{PQ} \cdot \vec{RS} = \vec{AQ} \cdot \vec{QT} - \vec{MQ} \cdot \vec{QB} + \vec{MQ} \cdot \vec{QT} - \vec{AQ} \cdot \vec{QB}$$

$$=|AQ|.|QT|Cos90^0-|MQ|\cdot|QB|Cos90^0$$

$$+|MQ|.|QT|Cos0^0-|AQ||QB|Cos0^0$$

$$=|MQ|.|QT|-|AQ|.|QB|$$

که با توجه به رابطه قوت نقطه Q نسبت به دایره این مقدار برابربا صفر خواهد بود ؛ پس حکم ثابت شد .

مثال ۵. در چهار ضلعی عمود قطر $ABCD$ ، قطرها با هم برابرند . نقاط P ، Q ، R و S روی اضلاع آن به گونه ای قرار دارند که :

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}=\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}=\frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}}$$

ثابت کنید : $PR=QS$ و $PR\perp QS$

حل. فرض کنید AC و BD یکدیگر را در مبدا قطع کنند و داشته باشیم :

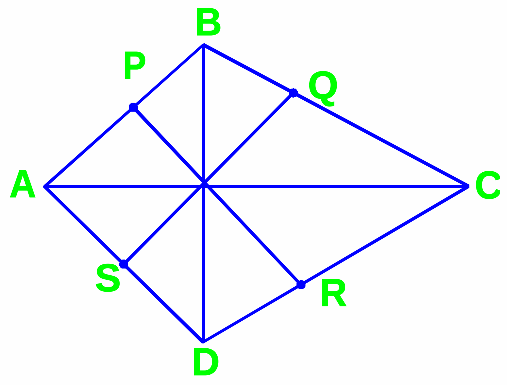
$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}=\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RD}}=\frac{\overrightarrow{DS}}{\overrightarrow{SA}}=\lambda$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{\vec{R}-\vec{C}}{\vec{D}-\vec{R}}=\lambda\Rightarrow\vec{R}-\vec{C}=\lambda(\vec{D}-\vec{R})\Rightarrow\vec{R}(1+\lambda)=\vec{C}+\lambda\vec{D}$$

داریم :

$$\vec{R}=\frac{\vec{C}}{\lambda+1}+\frac{\lambda\vec{D}}{\lambda+1}$$



$$\vec{P}=\frac{\vec{A}}{\lambda+1}+\frac{\lambda\vec{B}}{\lambda+1}$$

$$\vec{G}=\frac{\vec{B}}{\lambda+1}+\frac{\lambda.\vec{C}}{\lambda+1}$$

$$\vec{S}=\frac{\vec{D}}{\lambda+1}+\frac{\lambda.\vec{A}}{\lambda+1}$$

در نتیجه :

$$\overrightarrow{PR}=\vec{R}-\vec{P}=\frac{\vec{C}-\vec{A}}{\lambda+1}+\frac{\lambda.(\vec{D}-\vec{B})}{\lambda+1}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\lambda+1}+\frac{\lambda.\overrightarrow{BD}}{\lambda+1}$$

به طریق مشابه داریم :

$$\overrightarrow{QS}=\vec{S}-\vec{Q}=\frac{\overrightarrow{BD}}{\lambda+1}-\frac{\lambda.\overrightarrow{AC}}{\lambda+1}$$

از طرفی با توجه به فرض مسئله داریم : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ و $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BD}^2$

در نتیجه داریم :

$$\overrightarrow{PR}.\overrightarrow{QS}=\left(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{AC}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BD}\right)\left(\frac{-\lambda}{\lambda+i}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \frac{-\lambda}{(\lambda+1)^2}(\vec{AC})^2 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\vec{AC}\,.\vec{BD}$$

$$+\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}(\vec{BD})^2 + \frac{1}{(\lambda+1)^2}\vec{BD}\,.\vec{AC}$$

$$= \frac{-\lambda}{(\lambda+1)^2}(\vec{AC}^2 - \vec{BD}^2) + 0 \Rightarrow \vec{PR}\,.\vec{QS} = 0$$

بنابراین : $PR \perp QS$.

هم چنین داریم :

$$\vec{PR}^2 = \left(\frac{1}{1+\lambda}\vec{AC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{BD}\right)^2 = \frac{1}{(\lambda+1)^2}\vec{AC}^2 + \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}\vec{BD}\,.D^2$$

$$= \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}(\vec{AC})^2 = \left(\frac{1}{1+\lambda}\vec{BD} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{AC}\right)^2 = \vec{QS}^2$$

بنابراین: $PR = QS$.