نسبتهای ناهمساز

هر تبدیل موبیوس را نسبتهای بین ضرایبش کاملاً مشخص می‌کند، لذا با داشتن سه شرط باید بتوانیم یک تبدیل موبیوس را که در این شرایط صدق می‌کند تعیین کنیم. به خصوص، از آنجا که هر دایره با سه نقطه مشخص می‌شود، پس باید بتوانیم تبدیل موبیوسی پیدا کنیم که یک دایره مفروض از صفحه z را بر دایره مفروضی از w صفحه بنگارد.

مطلب را با مشاهده زیر آغاز می کنیم. فرض کنید:

$$\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

اگر w را بر حسب z حساب کنیم، تبدیل موبیوس w بر حسب z به دست می‌آید. به علاوه، اگر صورت یکی از دو طرف صفر شود، صورت طرف دیگر نیز باید صفر شود و مخرجها متناظراً به هم مربوط باشند. بدین ترتیب اگر یک تبدیل موبیوس z_1, z_2, z_3 را به ترتیب بر w_1, w_2, w_3 بنگارد، آنگاه می‌توانیم چنین بنویسیم.

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}=k\frac{z-z_2}{z-z_3}$$

که باید ثابت k تعیین می‌شود. بدون در نظر گرفتن مقدار k، تبدیل موبیوسی که با این معادله مشخص می‌شود z_2, z_3 را به ترتیب بر w_2, w_3 می‌نگارد. بنابراین کافی است k را چنان انتخاب کنیم که z_1 با w_1 متناظر شود. یعنی

$$\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=k\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

از اینجا k را به دست آورده آن را در رابطه قبلی می‌گذاریم (یا از تقسیم این دو تساوی بر هم و حذف k) خواهیم داشت:

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}\Big/\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

این تبدیل موبیوسی است که z_3, z_2, z_1 را به ترتیب بر w_3, w_2, w_1 می‌نگارد. اما اگر این تبدیل موبیوس z_0 را نیز بر w_0 بنگارد، باید داشته باشیم..

$$\frac{w_0-w_2}{w_0-w_3}\Big/\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z_0-z_2}{z_0-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

یعنی :

$$(w_0, w_1; w_2, w_3)=(z_0, z_1; z_2, z_3)$$

پس قضیه زیر را ثابت کرده ایم:

قضیه۱. نسبت ناهمساز بر اثر تبدیلهای موبیوس ناوردا می‌ماند.

فرع ۱. شرط لازم و کافی برای این که تبدیل موبیوسی وجود داشته باشد که z_3, z_2, z_1, z_0 را به ترتیب بر w_3, w_2, w_1, w_0 بنگارد، این است که تساوی زیر برقرار باشد:

$$(w_0, w_1; w_2, w_3)=(z_0, z_1; z_2, z_3)$$

برای اینکه صحت این قضیه را با کلیت تمام بیان کنیم تعریف نسبت ناهمساز را برای حالتی که یکی از نقاط ∞ باشد تعمیم می‌دهیم، بدین صورت که اصلاً عواملی را که شامل این نقطه هستند حذف می‌کنیم.

مثلاً اگر $z_0=\infty$ خواهیم داشت:

$$(z_0, z_1; z_2, z_3):=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$$

زیرا با توجه به روابط:

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \bigg/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$
$$= \left(\frac{1-\frac{z_2}{z}}{1-\frac{z_3}{z}} \right) \cdot \left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \right)$$
$$\rightarrow \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \quad (z \rightarrow \infty \text{وقتي})$$

این نست به طور خیلی طبیعی به دست می‌آید.

از اینجا نتیجه می‌شود که همواره می‌توان تبدیل موبیوسی را که سه نقطه مفروض $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ را به سه نقطه متمایز از پیش تعیین شده $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ می برد با نوشتن:

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} \bigg/ \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} \bigg/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

وحل این معادله نسبت به w به دست آورد. چون تناظر $z_j \rightarrow w_j$ $(j=1,2,3)$این تبدیل موبیوس را کاملاً معین می کند، تبدیل موبیوس مطلوب به دست می آید.

چون یک دایره با سه نقطه اش معین می شود و یک تبدیل موبیوس یک ((دایره)) را بر یک ((دایره)) می‌نگارد. پس می توان تبدیلهای موبیوسی را که یک دایره مفروض صفحه z را بر یک دایره مفروض صفحه w می نگارد به دست آورد. به علاوه سه نقطه متمایز دلخواه دایره اول را می توان برسه نقطه دلخواه دایره دوم نگاشت.

مثال۱. چهار نقطه z_3, z_2, z_1, z_0 همدایره(یا همخط) اند، اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز آنها، $(z_0, z_1; z_2, z_3)$، حقیقی باشد.

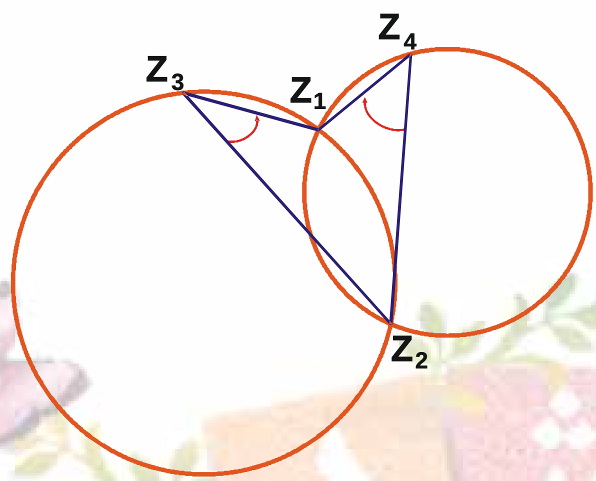
برهان دیگر. دراینجا برهان دیگری برای آن می آوریم. چهار نقطه همدایره (همخط) هستند، اگر و فقط اگر یک تبدیل موبیوس چنان وجود داشته باشد که این نقاط را بر نقاط محور حقیقی بنگارد. چون نسبت ناهمساز چهار عدد حقیقی، عددی حقیقی است، پس قضیه ثابت شده است.

قضیه۲. هر تبدیل موبیوس یک تبدیل همدیس است، یعنی یک تبدیل موبیوس زاویه بین دو منحنی متقاطع (اندازه و جهت آن) را محفوظ نگاه می دارد.

برهان. بی آنکه از کلیت کاسته شود، می توان فرض کرد که این دو منحنی دایره اند. فرض کنید z_1, z_2 نقاط تقاطع این دو دایره باشند، z_3 را بر یکی از این دوایر و z_4 را بر دیگری اختیار می کنیم. در این صورت:

$$\arg(z_3, z_4; z_1, z_2) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) - \arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right)$$

$$= \angle z_2 z_3 z_1 - \angle z_2 z_4 z_1$$

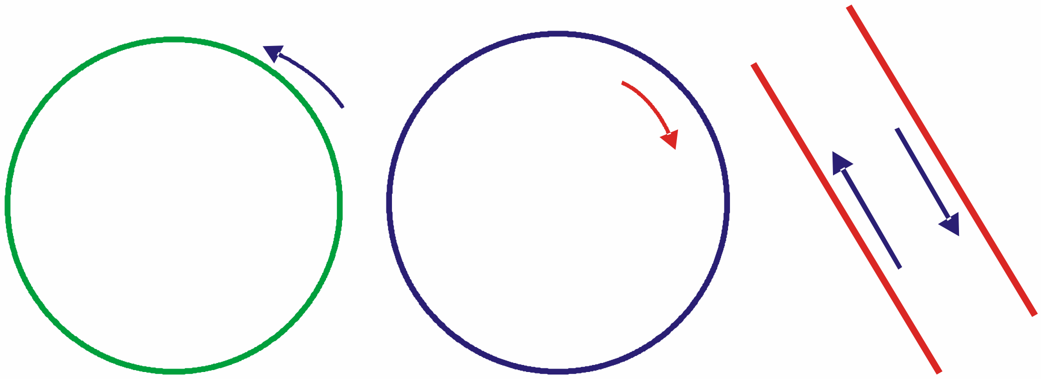


شکل۱

فرض کنید z_4, z_3 هر یک بر دایره مربوطه خود به سمت z_1، میل کنند، در این صورت سمت راست این رابطه زاویه بین دو دایره متقاطع خواهد شد. (خواننده ای که با هندسه مقدماتی آشنایی دارد می‌تواند استدلال بخش بعدی را دنبال کند). اما نسبت ناهمساز بر اثر هرتبدیل موبیوس پایاست و بنابراین، نتیجه مطلوب به دست می‌آید. ▪

فرض کنید که یک تبدیل موبیوس T دایره C در صفحه z را به دایره C' درصفحه w نگاشته است.دایره C صفحه z را به دو ناحیه Δ_2, Δ_1، و دایره C' صفحه w را به دو ناحیه Δ'_2, Δ'_1 تقسیم می‌نماید. هر دو نقطه z_2, z_1 در صفحه z را می توان با یک کمان $\mathbf{l}$ از دایره و یا پاره خطی که دایره C را قطع نکند به هم وصل کرد. در این صورت نگاره $\mathbf{l}$ بر اثر تبدیل موبیوس T کمانی از دایره (یا پاره خطی) است که نگاره های z_2, z_1 را بهم وصل می‌کند و دایره C' را قطع نمی کند. از اینجا نتیجه می‌شود که نگاره های z_2, z_1 یا هر دو در Δ'_1 قراردارند یا هر دو در Δ'_2. همین امر در مورد نقاط دلخواه Δ_2 نیز صادق است. چون هرتبدیل موبیوس دو سوئی است، چنانچه به ازای مقداری مانند $z \in \Delta_1$، نگاره اش $T_z \in \Delta'_1$، آنگاه نگاره Δ_1 بر اثر تبدیل T باید تمامی Δ'_1 باشد؛ در صورتی که اگر $T_z \in \Delta'_2$، نگاره Δ_1 بر اثر T باید تمامی Δ'_2 باشد.

اکنون یک دایره C و یکی از شعاعهای آن را در نظر می‌گیریم. نگاره های آنها بر اثر هر تبدیل موبیوس T یک دایره C' و یک قوس مستدیری هستند که یکدیگر را به زاویه قائمه قطع می‌کنند. چون هر تبدیل موبیوس جهت زوایا را نیز محفوظ نگاه می‌دارد، بلافاصله متوجه می شویم که اگر با یک تبدیل



شکل۲

موبیوس T داخل دایره C به داخل دایره C' نگاشته شود، هنگامی که یک نقطه z در جهت خلاف عقربه های ساعت بر دایره C تغییر مکان دهد، نگاره آن، w ، نیز در جهت خلاف عقربه های ساعت بر دایره C' تغییر مکان خواهد داد. از طرف دیگر، اگر داخل C، بر خارج C' نگاشته شود، آنگاه هنگامی که یک نقطه z درجهت خلاف عقربهث های ساعت بر دایره C حرکت نماید، نگاره اش w در جهت عقربه‌های ساعت بر دایره C' حرکت خواهد کرد.

به عکس اگر یک نقطه z و نگاره اش w بر اثر یک تبدیل موبیوس T بر دوایر مربوطه در یک جهت حرکت نمایند، آنگاه T داخل دایره C را به داخل دایره C' می برد، در صورتی که اگر w, z در دو جهت مختلف حرکت نمایند، T داخل دایره C را به خارج دایره C' می‌برد.

مناسبتر این است که قرار داد ذیل را بپذیریم : یک دایره (یا یک منحنی) را به صورت یک منحنی جهتدار(معمولاً با معادلات پارامترهایش) در نظر می‌گیریم، در این صورت هنگامی که نقطه ای بر این دایره (منحنی بسته) حرکت می‌کند ناحیه ای را که ناظر در ((طرف چپ)) می بیند، بنابر تعریف، داخل می‌گیریم. با این قرار داد یک تبدیل موبیوس داخل (یک دایره) را به داخل (یک دایره) می‌نگارد.