خط سیمسن

این بخش را با شرح مقدماتی درباره معادله خط آغاز می‌کنیم.

خطی مانند $\mathbf{l}$ داده شده است. فرض می کنیم α بردار واحد عمود بر $\mathbf{l}$، p فاصله مبدا تا خــط $\mathbf{l}$ باشند. در این صورت به ازای هر نقطه z بر $\mathbf{l}$، $z-p\alpha$ برداری است واقع بر خط $\mathbf{l}$ و چون α بــرداری است عمود بر $\mathbf{l}$، داریم:

$\frac{z-p\alpha}{\alpha}$ یک عدد انگاری محض است

یعنی

$$\frac{z-p\alpha}{\alpha}+\frac{\bar{z}-p\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}=0$$

پس معادله خط $\mathbf{l}$ چنین داده می‌شود

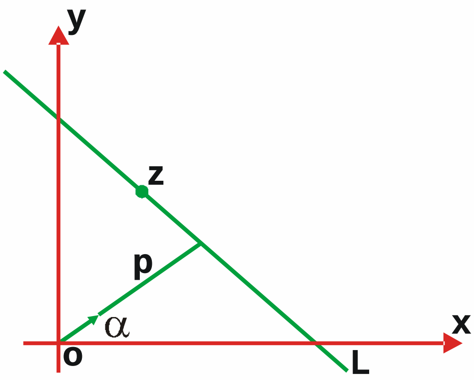
$\frac{z}{\alpha}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=2p$ یعنی $z+k\bar{z}=2p\alpha$ ، که $p\in\mathbb{R}$ و $\therefore\ |k|=1, k=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$

برای به دست آوردن معادله خط عمود بر $\mathbf{l}$ فقط به جای α مقدار $i\alpha$ می گذاریم

به ازای مقداری مانند $q\in\mathbb{R}$

$$\frac{z}{i\alpha}-\frac{\bar{z}}{i\bar{\alpha}}=2q$$

$\frac{z}{\alpha}-\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=2qi$؛ یعنی $z-k\bar{z}=2qi\alpha$, $\left(k=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)$



شکل۱

که در آن ثابت طرف راست را می‌توان طوری اختیار کرد که خط از نقطه مشخصی بگذرد.

باید توجه داشت که یک معادله خطی بر حسب z و $\bar{z}$ فقط و فقط وقتی معادله یک خط راست است که خود − مزدوج باشد؛ یعنی نتیجه مزدوج مختلط گرفتن از طرفین معادله باید معادله ای هم ارز با معادله اولیه به دست دهد. مثلاً اگر مزدوج مختلط معادله:

$$z+k\bar{z}=2p\alpha \qquad \left(k=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}, p\in \mathbb{R} \right) \text{ که در آن:}$$

را به دست آوریم، خواهد شد:

$$\bar{z}+\bar{k}z=2p\bar{\alpha}$$

با قرار دادن $\bar{k}=\frac{1}{k}$ این معادله به معادله:

$$k\bar{z}+z=2p\bar{\alpha}k=2p\alpha$$

بدل می‌شود که همان معادله اولیه است. همین طور است در مورد معادله

$$z-k\bar{z}=2qi\alpha \qquad \left(q\in \mathbb{R}, k=\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right)$$

به خصوص، لازم (ولی نه کافی) است که ضرائب α,β ی $z,\bar{z}$ در معادله

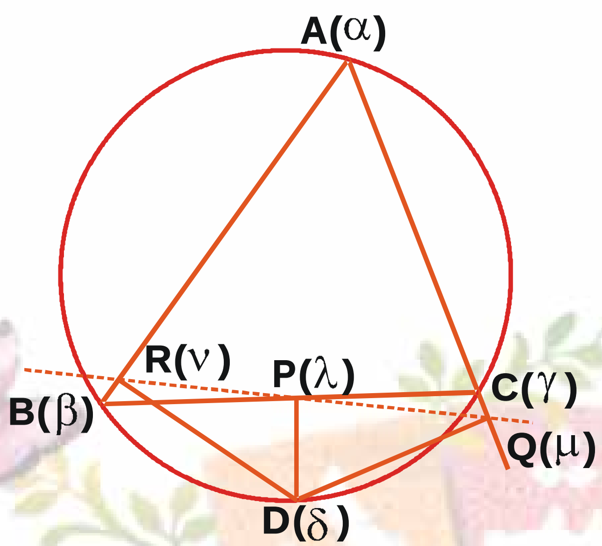
$\alpha z + \beta \bar{z} = \gamma$

قدرمطلقهای برابر داشته باشند؟ یعنی $|\alpha| = |\beta|$. از اینجا نتیجه می‌شود که معادله هایی مانند $z + \bar{z} = i$ یا $2z - \bar{z} = 1$ معادله های خط نیستند.

اکنون آماده اثبات قضیه سیمسن هستیم.

قضیه۱. نقطه ای مانند D و ΔABC داده شده اند. فرض می کنیم P, Q, R پاهای عمودهای مرسوم از D به ترتیب براضلاع BC, CA, AB باشند. در این صورت P, Q, R همخط اند، اگر و فقط اگر D بر دایره محیطی ΔABC باشد.

برهان. بدون اینکه خللی برکلیت مساله وارد آید، می‌توان فرض نمود که ΔABC در دایره ای به شعاع واحد محاط شده است و نقاط A, B, C, D را به ترتیب با اعداد مختلط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ نمایش می‌دهیم.



شکل۲

در این صورت، معادله خط BC عبارت است از

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی

$$\left(\bar{\beta} - \bar{\gamma}\right)z - \left(\beta - \gamma\right)\bar{z} + \left(\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma\right) = 0$$

با استفاده از روابط $\bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$ می توان این معادله را چنین نوشت

$$z + \beta \ \gamma \ \ \bar{z} = \beta + \gamma$$

از این رو، معادله عمود مرسوم از $D(\delta)$ بر ضلع BC چنین می شود

$$z - \beta \ \gamma \ \ \bar{z} = \delta - \beta\gamma\bar{\delta}$$

بنابراین، نقطه $P(\lambda)$ ، فصل مشترک این دو خط، از حل این دو معادله به دست می آید:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}\right)$$

همین طور $R(v), Q(\mu)$ از روابط

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}\right)$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}\right)$$

به دست می آیند. امّا،

همخط اند $P(\lambda), Q(\mu), R(v) \Leftrightarrow \frac{\lambda - v}{\mu - v} \in \mathbb{R}$

ولی با قرار داد $r=|\delta|$ (بنابراین $\bar{\delta}=\dfrac{r^2}{\delta}$)، داریم

$$\frac{\lambda-v}{\mu-v}=\frac{(\gamma-\alpha)(1-\beta\bar{\delta})}{(\gamma-\beta)(1-\alpha\bar{\delta})}$$

$$=\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right)\Bigg/\left(\frac{\alpha-\delta\ r^{-2}}{\beta-\delta\ r^{-2}}\right)$$

$$=\left(\alpha,\beta\ ;\gamma,\delta\ r^{-2}\right)$$

بنابراین

R,Q,P همخط اند $\Leftrightarrow \left(\alpha,\beta\ ;\gamma,\delta\ r^{-2}\right)\in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ همدایره اند $\alpha,\beta,\gamma,\delta\ r^{-2}$

$$\Leftrightarrow \left|\delta\ r^{-2}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow r=|\delta|=1$$

این خط را عموماً خط سیمسن نقطه D نسبت به ΔABC گویند. ولی مورخان بیهوده این خط را در آثار رابرت سیمسن (۱۶۸۷ – ۱۷۶۸) جستجو کرده اند. به نظر می رسد که اولین بار ویلیام والاس (۱۷۶۸ – ۱۸۴۳) در ۱۷۹۷ آن را مطرح کرده باشد.

اکنون می‌خواهیم معادله خط سیمسن را پیدا کنیم. همان قرار دادهای قبلی را به کار می گیریم؛ به خصوص فرض می‌کنیم ΔABC محاط در دایره واحد باشد و نقطه $D(\delta)$ بر این دایره واحد قرار داشته باشد. پس نقطه P ، پای عمود وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC ، چنین خواهد بود.

$$z=\frac{1}{2}\left(\beta+\gamma+\delta-\frac{\beta\gamma}{\delta}\right)$$

اکنون نمادهای

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

را وارد می کنیم. پس

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

$$\bar{\sigma}_3 = \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sigma_3}$$

بدین ترتیب عبارتی که در بالا برای z به دست می‌آید چنین خواهد شد

$$z = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \alpha + \delta - \frac{\sigma_3}{\delta\alpha}\right)$$

و

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha} + \bar{\delta} - \frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\delta}\bar{\alpha}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\delta} - \frac{\delta\alpha}{\sigma_3}\right)$$

و از حذف α بین دو رابطه خواهیم داشت

$$\delta \; z - \sigma_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(\delta^2 + \sigma_1\delta - \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\delta}\right)$$

این رابطه ای است که باید پای عمود $P(\lambda)$، وارد از $D(\delta)$ بر ضلع BC در آن صدق نماید. ولی، چون این رابطه فقط شامل $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ و لذا نسبت به α, β, γ متقارن است، نتیجه می‌شود که نقاط $Q(\mu), R(v)$، یعنی پاهای عمودهای مرسوم از نقطه $D(\delta)$ به ترتیب بر اضلاع CA و AB نیز باید در آن صدق کننــد.

ولی این معادله، معادله یک خط مستقیم است، لذا پاهای عمودهای R, Q, P همخط اند، و معادله به دست آمده، معادله خط سیمسن مربوطه است. این برهان دیگری است برای قسمت شرط لازم قضیه ۱.

قضیه ۲. گیریم N, M, L سه نقطه بر دایره محیطی ΔABC باشند. شرط لازم و کافی برای تقارب خطوط سیمسن نقاط N, M, L نسبت به ΔABC برقراری همنهشتی زیر است.

$$\overset{\frown}{AL}+\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{CN}\equiv 0 \quad (\text{پیمانه } 2\pi)$$

برهان. دایره محیطی ΔABC را دایره واحدو u_3, u_2, u_1 را به ترتیب اعداد مختلط متناظر با نقاط N, M, L می گیریم. پس معادله های سه خط سیمسن مورد نظر عبارت اند از

$$u_1 z-\sigma_3\bar{z}=\frac{1}{2}\left(u_1^2+\sigma_1u_1-\sigma_2-\frac{\sigma_2}{u_1}\right)$$

$$u_2 z-\sigma_3\bar{z}=\frac{1}{2}\left(u_2^2+\sigma_1u_2-\sigma_2-\frac{\sigma_2}{u_2}\right)$$

$$u_3 z-\sigma_3\bar{z}=\frac{1}{2}\left(u_3^2+\sigma_1u_3-\sigma_2-\frac{\sigma_2}{u_3}\right)$$

پس فصل مشترک دو خط اول سیمسن، نقطه

$$z=\frac{1}{2}\left(u_1+u_2+\sigma_1+\frac{\sigma_3}{u_1u_2}\right)$$

و فصل مشترک دو خط دیگر، نقطه

$$z=\frac{1}{2}\left(u_2+u_3+\sigma_1+\frac{\sigma_3}{u_2u_3}\right)$$

است، بنابراین، شرط لازم و کافی برای انطباق این دو نقطه، برقراری تساوی $\sigma_3 = u_1u_2u_3$ یعنی $\alpha\beta\gamma = u_1u_2u_3$ است.

چون $\alpha,\beta,\gamma,u_1,u_2,u_3$ اعدادی مختلط با قدر مطلق ۱ هستند، با برابر گرفتن شناسه های آنها به ترتیب $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ خواهیم داشت.

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3 \equiv \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 \qquad (\text{پیمانه } 2\pi)$$

$$\therefore (\theta_1-\varphi_1)+(\theta_2-\varphi_2)+(\theta_3-\varphi_3) \equiv 0 \qquad (\text{پیمانه } 2\pi)$$

که شرط مطلوب است. ▪

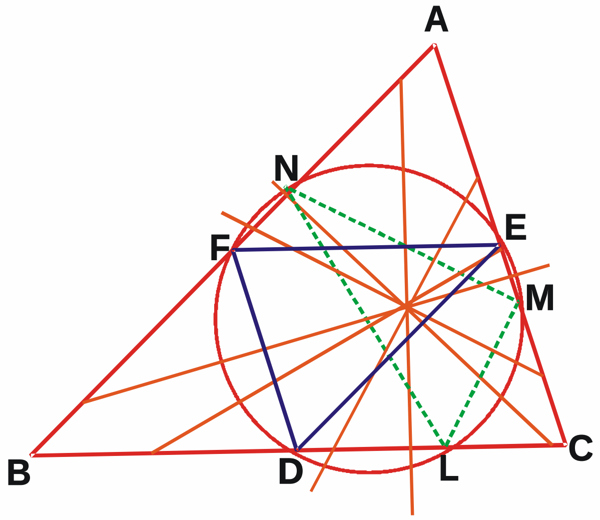
باید توجه کنیم که اگر این شرط برقرار باشد، نقطه فصل مشترک با تساوی زیر داده می‌شود.

$$z=\frac{1}{2}(\sigma_1+u_1+u_2+u_3)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+u_1+u_2+u_3)$$

با توجه به تقارن این رابطه نسبت به مقادیر $\alpha,\beta,\gamma,u_1,u_2,u_3$ فرع زیر به دست می‌آید.

فرع۱. A, B, C, L, M, N را شش نقطه بر یک دایره در نظر می‌گیریم. در این صورت خطهای سیمسن نقاط L, M, N نسبت به ΔABC متقارب اند، اگر و فقط اگر خطوط سیمسن نقاط A, B, C نسبت به ΔLMN متقارب باشند. به علاوه، در این حالت، هر شش خط سیمسن در وسط پاره خطی که مرکز ارتفاعات ΔABC و ΔLMN را به هم وصل می‌کند، متقارب اند.



شکل ۳

فرع ۲. فرض می‌کنیم F, E, D به ترتیب وسطهای اضلاع AB, CA, BC از ΔABC و N, M, L به ترتیب پاهای عمودهای وارد از راسهای C, B, A بر اضلاع مقابل باشند.در این صورت شش نقطه N, M, L, F, E, D بر دایره نه نقطه ΔABC واقع اند و خطوط سیمسن نقاط N, M, L نسبت به ΔDEF متقارب اند. عکس این فرع نیز صحیح است.

برهان. دایره محیطی ΔABC را دایره واحد می گیریم و فرض می کنیم راسهای C, B, A به ترتیب با اعداد مختلط γ, β, α متناظر باشند. در این صورت با توجه به بحث مربوط به دایره نه نقطه، نقاط N, M, L به ترتیب متناظر با اعداد مختلط:

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) \quad ,\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\gamma\alpha}{\beta}\right) \quad ,\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

و نقاط متناظر با اعداد مختلط

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \quad ,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \quad ,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

خواهند شد. علاوه بر این، همه این شش نقطه بر دایره نه نقطه یی واقع اند که مرکز آن، K، نقطه $\frac{\sigma_1}{2}$

و شعاع آن $\frac{1}{2}$ است. از این رو داریم

$$\overrightarrow{KL}:-\frac{\beta\gamma}{2\alpha},\qquad \overrightarrow{KM}:-\frac{\gamma\alpha}{2\beta},\qquad \overrightarrow{KN}:-\frac{\alpha\beta}{2\gamma}$$

$$\overrightarrow{KD}:-\frac{\alpha}{2},\qquad \overrightarrow{KE}:-\frac{\beta}{2},\qquad \overrightarrow{KF}:-\frac{\gamma}{2}$$

و چون

$$\left(-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{\gamma\alpha}{2\beta}\right)\cdot\left(-\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right)=\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\left(-\frac{\beta}{2}\right)\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

حکم برقرار و قضیه ثابت شده است. ▪