

ترسیمهای هندسی. جبر هیأت‌های اعداد

مسئله‌های ترسیم همیشه موضوع محبوبی در هندسه بوده است. خواننده از دوره مدرسه به یاد دارد که می‌توان فقط با خط‌کش و پرگار انواع زیادی از ترسیمها را انجام داد: می‌توان پاره‌خط یا زاویه‌ای را دو نیم کرد، خطی از یک نقطه عمود بر یک خط مفروض رسم کرد، چند ضلعی منتظمی را در دایره‌ای محاط کرد، و غیره. در همه این مسئله‌ها از خط‌کش فقط به عنوان سطراره [ستاره] استفاده می‌شود یعنی ابزاری غیرمدرج برای کشیدن خط راست و نه اندازه‌گیری یا مشخص کردن فاصله‌ها. محدودیت ابزارهای ترسیم به خط‌کش و پرگار از دوران باستان سابقه دارد هر چند خود یونانیان در استفاده از سایر ابزارها هم تردید نمی‌کردند.

یکی از مشهورترین مسئله‌های کلاسیک ترسیم، مسئله موسوم به «تماسها» از آپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد) است که در آن سه دایره دلخواه در صفحه مفروضند و مطلوب مسئله، دایره چهارمی است که بر هر سه مماس باشد. در حالت خاص، مجاز است که یک یا چند تا از دایره‌های مفروض «تباهیده» شده و به یک نقطه یا خط راست (یعنی، به ترتیب، «دایره»ای به شعاع صفر یا «بینهایت») تبدیل گشته باشند. مثلاً ممکن است ترسیم دایره‌ای مماس بر دو خط مفروض و گذرنده از یک نقطه مفروض خواسته شود. بررسی و حل این حالت‌های خاص نسبتاً ساده است، اما حالت کلی مسئله بسیار دشوارتر است.

در میان همه مسئله‌های ترسیم، شاید ترسیم یک n ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار جالب توجه‌تر از همه باشد. راه‌حل این مسئله به ازای مقادیر خاصی از n ، مثلاً $n = 3, 4, 5, 6$ ، از دوران باستان معلوم بوده است و بحث درباره آنها بخش مهمی از هندسه مدرسه است. اما ثابت شده است که ترسیم هفت ضلعی منتظم ($n = 7$) ناممکن است.

سه مسئله کلاسیک یونانی دیگر هم هست که جستجوی راه‌حل برای آنها بیهوده بوده است: تثلیث [سه بخش کردن]

یک زاویه دلخواه مفروض، تضعیف یک مکعب مفروض (یعنی یافتن یال مکعبی که حجمش دو برابر حجم مکعبی باشد که یال آن در دست است)، و تربیع دایره (یعنی ترسیم مربعی که مساحتش با مساحت یک دایره مفروض برابر باشد). در همه این مسأله‌ها، فقط استفاده از خط‌کش و پرگار مجاز است.

این گونه مسأله‌های حل نشده موجب یکی از چشمگیرترین و بدیع‌ترین دستاوردها در ریاضیات شدند و آن، موقعی بود که پس از قرن‌ها تلاش بی‌ثمر برای حل آنها، این گمان قوت گرفت که شاید این مسأله‌ها قطعاً حل‌ناپذیر باشند. بنابراین، ریاضیدانان خود را با این پرسش دشوار و جالب توجه روبرو دیدند که: چگونه می‌توان ثابت کرد مسأله‌های خاصی قابل حل نیستند؟

در جبر، مسأله‌ای که باعث بروز این اندیشه تازه شد، مسأله حل معادلات درجه ۵ به بالا بود. در طی قرن شانزدهم ریاضیدانان پی برده بودند که معادله‌های جبری درجه ۳ یا ۴ را می‌توان به روشی مشابه با روش مقدماتی حل معادلات درجه دوم حل کرد. همه این روشها خصیصه مشترکی دارند: جوابها یا «ریشه‌ها»ی معادله را می‌توان به صورت عبارتهایی جبری نوشت که با یک رشته عملها از ضرایب معادله به دست می‌آیند، عملهایی که هر یک از آنها یا یک عمل گویاست - جمع، تفریق، ضرب، یا تقسیم - و یا گرفتن ریشه دوم، سوم، یا چهارم است. می‌توان گفت که معادله‌های جبری تا درجه چهارم «به وسیله رادیکالها» حل می‌شوند (کلمه رادیکال از واژه لاتینی *radix* به معنی ریشه گرفته شده است). هیچ چیز طبیعی‌تر از این به نظر نمی‌رسید که همین شیوه، با استفاده از ریشه‌های مراتب بالاتر، به معادله‌های درجه ۵ و بالاتر تعمیم داده شود. ولی همه تلاشهایی که در این جهت صورت گرفت به شکست انجامید. حتی ریاضیدانان برجسته قرن هیجدهم خود را با این فکر که راه حل را پیدا کرده‌اند فریب می‌دادند. در اوایل قرن نوزدهم بود که روفینی^۱ ایتالیایی (۱۷۶۵ - ۱۸۲۲) و نابغه نروژی آبل^۲ اندیشه‌ای را مطرح کردند که در آن زمان انقلابی بود یعنی

^۱ Ruffini .

اثبات امکان‌ناپذیری حل معادله جبری کلی درجه n به وسیله رادیکالها. باید به روشنی درک کرد که مسأله این نیست که آیا هر معادله جبری درجه n جواب دارد یا نه. این موضوع را گاؤس در سال ۱۷۹۹ در رساله دکتری خود ثابت کرد. پس هیچ شکی درباره وجود ریشه‌های یک معادله وجود ندارد، به خصوص به این دلیل که این ریشه‌ها را می‌توان به شیوه‌های مناسب با هر درجه از دقت محاسبه کرد. هنر حل عددی معادله‌ها البته خیلی مهم است و تکامل زیادی یافته است، ولی مسأله آبل و روفینی چیز دیگری بود: آیا حل معادله ممکن است فقط به وسیله عملهای گویا و رادیکالها انجام شود؟ تمایل به اینکه جوانب گوناگون این مسأله کاملاً روشن شود، الهامبخش پیشرفت شکوهمند جبر نوین و نظریه گروهها بود که روفینی، آبل، و گالوا^۳ (۱۸۱۱ - ۱۸۳۲) آغازگر آن بودند.

موضوع اثبات امکان‌ناپذیری بعضی از ترسیمهای هندسی، یکی از ساده‌ترین نمونه‌های این گرایش در جبر است. بالاخره خواهیم توانست امکان‌ناپذیری تثلیث زاویه، ترسیم هفت ضلعی منتظم، یا تضعیف مکعب را با خط‌کش و پرگار ثابت کنیم. نقطه شروع کار ما مسأله منفی امکان‌ناپذیری بعضی از ترسیمها نخواهد بود بلکه این پرسش مثبت خواهد بود: چگونه می‌توان همه مسائل ترسیم‌پذیر را کاملاً مشخص کرد؟ پس از آنکه به این پرسش پاسخ دادیم، به آسانی می‌توان نشان داد که مسأله‌های نامبرده در بالا در این دسته قرار نمی‌گیرند.

گاؤس در هفده سالگی به بررسی ترسیم‌پذیری p ضلعی منتظم در حالتی که p عددی اول باشد، پرداخت. در آن موقع فقط ترسیم‌پذیری ۳ ضلعی و ۵ ضلعی معلوم بود. گاؤس کشف کرد که p ضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر p یک «عدد فرما»^۲ی اول،

$$p = 2^{2^n} + 1$$

^۲ N. H. Abel .

^۳ Galois .

باشد. نخستین عددهای فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ هستند. گاوس جوان آنقدر تحت تأثیر این کشف خود قرار گرفت که فوراً از هدف خود مبنی بر اینکه لغت‌شناس شود دست کشید و مصمم شد زندگیش را وقف ریاضیات و کاربردهایش کند. او همیشه از این نخستین شاهکار خود با غرور و افتخار یاد می‌کرد. پس از مرگش مجسمه‌ای برنزی از او در گوتینگن برپا داشتند که پایه آن به شکل ۱۷ ضلعی منتظم است، و هیچ بزرگداشتی مناسبتر از این نمی‌توانست از او به عمل آید.

وقتی با یک ترسیم هندسی سروکار داریم، هرگز نباید فراموش کنیم که مسأله این نیست که شکلهایی را عملاً و با درجه معینی از دقت بکشیم، بلکه این است که آیا فقط با استفاده از خط‌کش و پرگار و با فرض اینکه ابزارهای ما از دقت کامل برخوردارند، می‌توان به طور نظری به جواب دست یافت یا نه. چیزی که گاوس ثابت کرد این است که ترسیمهای مورد نظر او علی‌الاصول امکان‌پذیرند. نظریه او به ساده‌ترین راه برای اجرای عملی آن ترسیمها یا تدابیر ممکن برای ساده‌سازی و کاهش تعداد مراحل لازم کاری ندارد. اینها از لحاظ نظری اهمیت بسیار کمتری دارند. از لحاظ عملی، نتیجه چنین ترسیمهایی هرگز به اندازه ترسیمی که با استفاده از یک نقاله خوب انجام شود، رضایت‌بخش نیست. ناتوانی در فهم صحیح ماهیت نظری مسأله ترسیم هندسی و لجاجت در نپذیرفتن حقایق تثبیت شده علمی، باعث تداوم صف بی‌پایان تثلیث‌گران زاویه و تربیع‌کنندگان دایره شده است.

باید یک بار دیگر تأکید کنیم مفهومی که در اینجا از ترسیم هندسی در نظر داریم از بعضی لحاظ ساختگی می‌نماید. خط‌کش و پرگار مسلماً ساده‌ترین ابزارهای ترسیم هستند اما محدودیت ابزارها به این دو وسیله به هیچ وجه مربوط به ذات هندسه نیست. همان‌طور که یونانیها هزاران سال قبل دریافته بودند، بعضی از مسأله‌ها- به عنوان نمونه، مسأله تضعیف مکعب- اگر مثلاً استفاده از خط‌کشی به شکل یک زاویه قائمه [گونیا] مجاز باشد قابل حل است؛ به همان

سادگی می‌توان ابزارهای دیگری غیر از پرگار ابداع کرد که با آنها بتوان بیضی، هذلولی، و خمهای پیچیده‌تر را رسم کرد،
و استفاده از آنها مجموعه اشکال ترسیم‌پذیر را گسترش می‌دهد.

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران



Olympiad.roshd.ir