مثلث واجزای آن

اکنون به کاربردهای اعداد مختلط در هندسه مسطحه می‌پردازیم. یک مطلب مهم که باید به خاطر داشته باشیم این است که اعداد مختلط فقط بردار نیستند، و می‌توانند در یکدیگر ضرب شوند. در کاربردهای اعداد مختلط در هندسه، از این ویژگی کاملاً استفاده خواهیم کرد. بویژه در حل برخی از نمونه‌های مسائل، اعداد مختلط کارایی زیادی دارند، اما ممکن است در برخی مسائل، ه با روشهای مقدماتی قابل حل هستند، دست و پاگیر باشند.

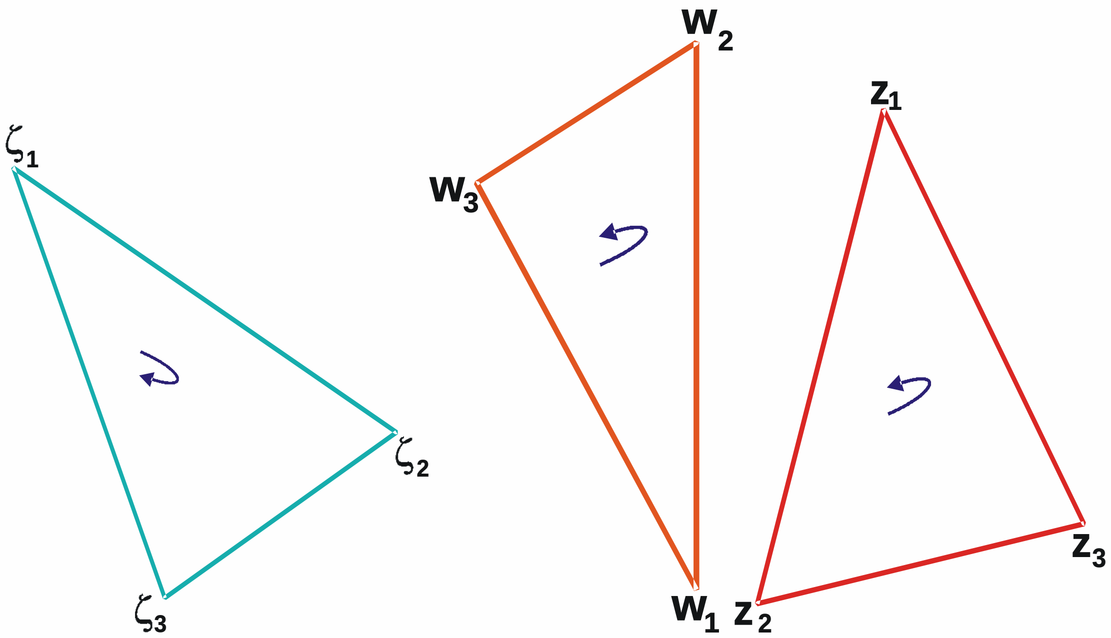
در هندسه مقدماتی، مثلثها در حکم بلوکهای ساختمانی هستند و موضوع قابلیت انطباق و مشابهت در آنها اساسی‌ترین مفاهیم هستند. مطلب را از شرایط تشابه دو مثلث، بر حسب اعداد مختلف آغاز می‌کنیم. ابتدا به ذکر قراردادهای نمادی و مرور برخی نکات می پردازیم. در سراسر این فصل می‌گوییم $\Delta z_1 z_2 z_3$ با $\Delta w_1 w_2 w_3$ متشابه است اگر، و فقط اگر، دو مثلث در زاویه z_k با زاویه w_k برابر (ودر نتیجه z_k متناظر با w_k، $k=1,2,3$) و همجهت (هر دو ساعتسو یا هر دو پادساعتسو) باشند و می‌نویسیم

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

و چنانچه در خلاف جهت یکدیگر (یکی ساعتسو و دیگری پادساعتسو) باشند، می‌نویسیم:

$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ (در جهت عکس)

توجه داشته باشید که باز هم z_k باید متناظر با w_k $(k=1,2,3)$ باشد.



شکل۱

طبق معمول، نمادهای $//,\perp$ را به ترتیب برای نمودن توازی دو خط (پاره خط یا بـردار) و تعامـد آنها به کار می‌بریم.

چون به ازای نقاط متمایز $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$

زاویه جهت دار بردار $\overrightarrow{\alpha\gamma}$, با بردار $\overrightarrow{\alpha\beta}$ $=^{1} \arg\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\arg(\beta-\alpha)-\arg(\gamma-\alpha)$

$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha,\beta,\gamma$ همخط اند

$$\Leftrightarrow\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}$$

و

انگاری محض است $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha\beta}\perp\overrightarrow{\alpha\gamma}$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}+\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}$$

و کلیتر بگوییم به ازای چهار نقطه متمایز $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in £$

$$\overrightarrow{\alpha\beta} \,//\, \overrightarrow{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \in ¡$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}=\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}$$

وانگهی $\overrightarrow{\alpha\beta},\overrightarrow{\gamma\delta}$**، همجهت (یا مختلف الجهت) هستند، اگر و فقط اگر،** $\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ **عدد حقیقی مثبت (یا منفی) باشد؛ و**

$$\overrightarrow{\alpha\beta} \perp \overrightarrow{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \text{ انگاری محض}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}+\frac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\delta}-\overline{\gamma}}=0$$

در نتیجه، هر گاه $\alpha\beta \neq 0$**، آنگاه**

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in ¡ \quad \frac{\alpha}{\beta}>0$$

قضیه۱. $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

برهان. دو مثلث فقط و فقط هنگامی متشابه اند که نسبتهای دو ضلع متناظرشان برابر و زوایای (متناظر) بین آنها نیز برابر باشند (از جمله جهت آنها یکی باشد). از این رو

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right| \quad , \quad \arg\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

فرع۱. $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ (در جهت عکس)

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

برهان. $\because \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ (در جهت عکس)

$\therefore \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ (در جهت عکس) $\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ ▪

مثال۱. سه نقطه z_1, z_2, z_3 همخط اند.

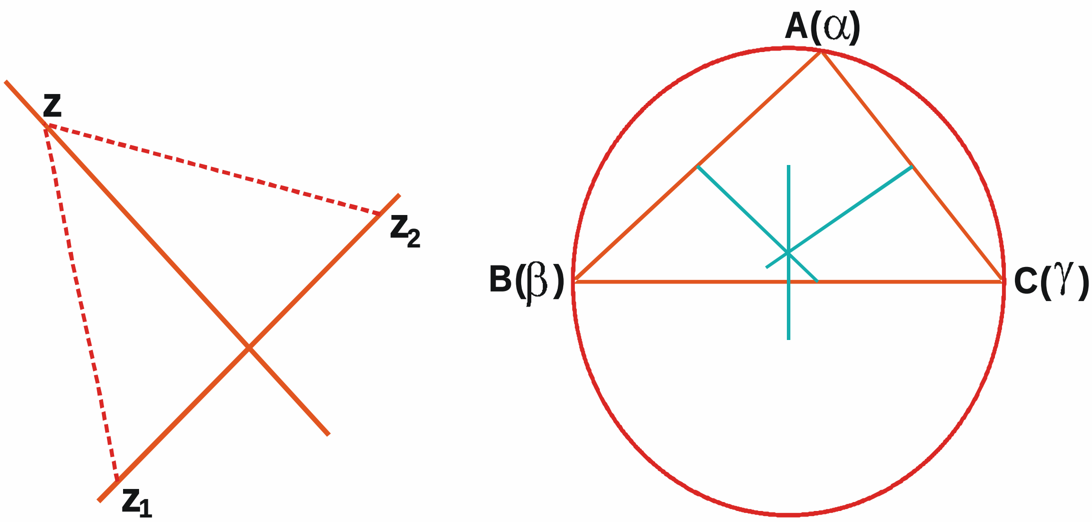
$$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال۲. دو نقطه متمایز z_2, z_1 داده شده اند. پیدا کنید معادلات:

الف. خطی را که از z_2, z_1 می‌گذرد.

ب. عمود منصف پاره خطی را که از نقاط z_2, z_1 می‌گذرد.



شکل۲

جوابها.

الف.

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ب.

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال۳. $\Delta z_1 z_2 z_3$ متساوی الاضلاع است

$$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0$$

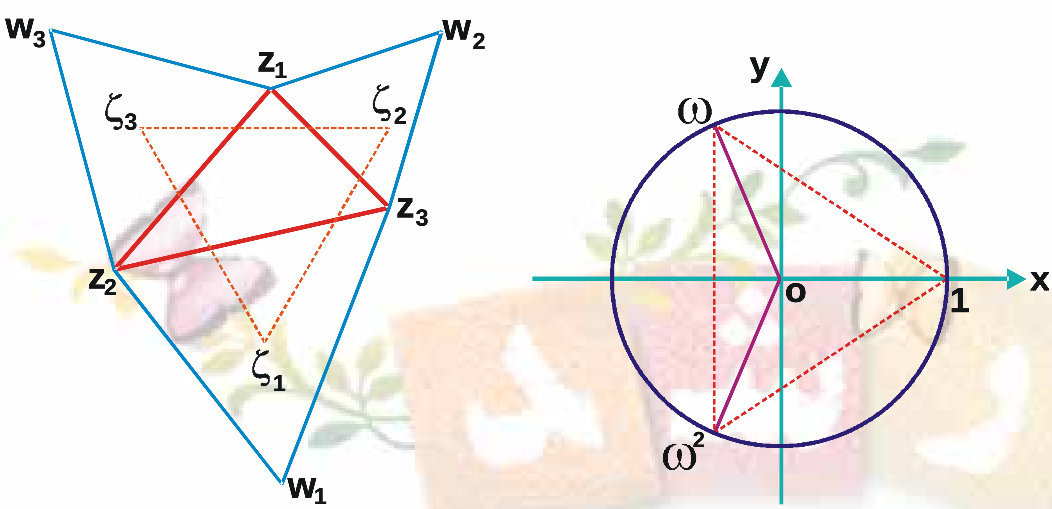
$$\Leftrightarrow \left(z_1 + w z_2 + w^2 z_3\right).\left(z_1 + w^2 z_2 + w z_3\right) = 0 \quad \left(w^2 + w + 1 = 0\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 + w z_2 + w^2 z_3 = 0 \quad \text{یا} \quad z_1 + w^2 z_2 + w z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 w w^2 \quad \text{یا} \quad \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 w^2 w$$

مثال۴. (ناپلئون) بر هر یک از اضلاع یک مثلث و در خارج آن، مثلث متساوی الاضلاعی می‌سازیم. مرکزوارهای این سه مثلث متساوی الاضلاع راسهای یک مثلث متساوی الاضلاع هستند.

برهان. $\Delta z_1 z_2 z_3$ را مثلث مفروض و



شکل۳

$$\Delta w_1 z_3 z_2 \quad \Delta z_3 w_2 z_1, \quad \Delta z_2 z_1 w_3$$

را مثلثهای متساوی الاضلاع مورد نظر همجهت، مـثلاً، بـا $\Delta 1 w w^2$ (کـه در آن $w^2 + w + 1 = 0$) بـا مرکزوارهای $\varsigma_3,\varsigma_2,\varsigma_1$ می‌گیریم. پس

$$w_1 + wz_3 + w^2 z_2 = 0,$$

$$z_3 + ww_2 + w^2 z_1 = 0,$$

$$z_2 + wz_1 + w^2 w_3 = 0$$

پس برای اثبات متساوی الاضلاع بودن $\Delta\varsigma_3,\varsigma_2,\varsigma_1$ عبارت $\varsigma_1 + w\varsigma_2 + w^2\varsigma_3$ را حساب می‌کنیم

$$\varsigma_1 + w\varsigma_2 + w^2\varsigma_3$$

$$= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{w}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{w^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(w_1 + wz_3 + w^2 z_2\right) + \left(z_3 + ww_2 + w^2 z_1\right) + \left(z_2 + wz_1 + w^2 w_3\right)\right\}$$

$$= 0$$

بنابراین $\Delta\varsigma_3,\varsigma_2,\varsigma_1$ یک مثلث متساوی الاضلاع است.

برهان دیگر. چون $\Delta\varsigma_1 z_3 z_2 \sim \Delta O 1 w$، داریم

$$\begin{vmatrix} \varsigma_1 & 0 & 1 \\ z_3 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی

$$(1-w)\varsigma_1 - z_2 + wz_3 = 0$$

$$\therefore \varsigma_1 = \frac{z_2 - wz_3}{1-w}$$

همین طور

$$\varsigma_2 = \frac{z_3 - wz_1}{1-w}, \quad \varsigma_3 = \frac{z_1 - wz_2}{1-w}$$

$$\therefore \varsigma_1 + w\varsigma_2 + w^2\varsigma_3 = \frac{1}{1-w}\left\{(z_2 - wz_3) + w(z_3 - wz_1) + w^2(z_1 - wz_2)\right\}$$

$$= 0$$

قضیه بالا را عموماً به ناپلئون نسبت می‌دهند. مشهور است که ناپلئون مدرسه پلی تکنیک را در ۱۷۹۴ تاسیس نمود بسیاری از ریاضیدانان فرانسوی را در اوائل سده نوزدهم در آنجا گرد آورد. بسیارند کسانی که هنوز هم تردید دارند که ناپلئون آنقدر هندسه می دانسته که این قضیه را کشف کند. اتفاقاً ناپلئون بناپارت یکی از معدود کسانی در تاریخ معاصر است که به نام (نه به لقب) شناخته شده است. گالیلئو گالیله (۱۵۶۴ – ۱۶۴۲) نمونه دیگری از آنهاست.