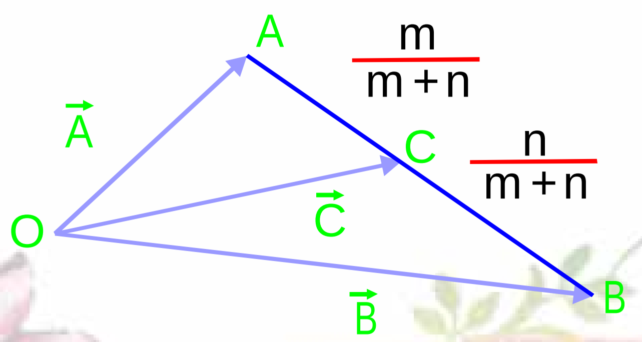
خط و تقسیم پاره خط

تعریف. نقطه O را مبدا مختصات در نظر بگیرید . بردار $\overrightarrow{OA}$ بردار مکان A نامیده می شود وآن را با $\overrightarrow{A}$ نشان می‌دهیم . واضح است که تناظری یک به یک بین نقاط صفحه و بردارهای مکان وجود دارد . یعنی به ازای هر نقطه تنها یک بردار مکان داریم و بالعکس. توجه کنید که با در نظر گرفتن تساوی بردارها می توان گفت هر بردار دلخواه متناظر با یک بردار مکان می باشد . حال فرض کنید $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای مکان نقاط A و B باشند و نقطه C بگونه ای روی AB واقع باشد که آن را به نسبت $\frac{m}{n}$ قطع کند؛ در نتیجه بردار مکان برابر خواهد بود با :

$$\vec{C}=\vec{A}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{C}=\vec{A}+\frac{m}{m+n}(\vec{B}-\vec{A})$$

$$=\frac{(m+n)\vec{A}+m(\vec{B}-\vec{A})}{m+n}$$

$$=\left(\frac{n}{m+n}\right)\vec{A}+\left(\frac{m}{m+n}\right)\vec{B}$$



نتیجه. نقاط A ، B و C را سه نقطه متمایز در صفحه در نظر بگیرید و O را نقطه دلخواه دیگری فرض کنید . در این صورت A ، B و C هم خط اند . اگر و تنها اگر ، موجود باشد عددی حقیقی مانند λ در بازه (۱و۰) به طوری که :

$$\vec{OC} = \lambda \vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB}$$

از این رابطه می توان برای اثبات هم خطی نقاط A ، B و C استفاده کرد .

رابطه اخیر ، رابطه پرکاربردی در حل مسائل توسط هندسه بردارهاست ، برای مثال با استفاده از این رابطه می‌خواهیم بردار مکان مرکز ثقل مثلث ΔABC را به دست آوریم :

می دانیم اگر M وسط BC باشد و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد؛ با توجه به رابطه فوق داریم :

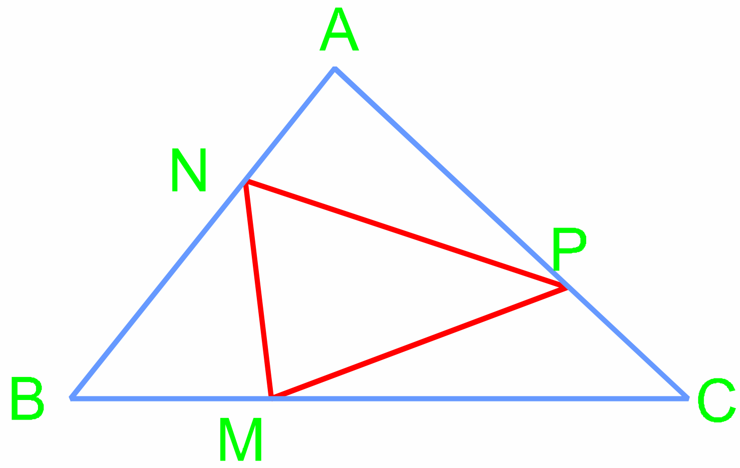
$$\vec{M} = \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{C}$$

و مجدداًاز آنجا که G پاره خط AM را به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم می کند، خواهیم داشت :

$$\vec{G} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{2}{3}\vec{M} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{C}\right) = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

مثال۱. نقاط P, N, M روی اضلاع BC و AB و AC از مثلث ΔABC به گونه ای هستند که $BC = 3BM$ ، $CA = 3CP$ و $AB = 3AN$. نشان دهید مرکز ثقل های مثلث های ΔABC و ΔMNP بر هم منطبق اند.

حل. با توجه به آنچه در مورد بردار مکان مرکز ثقل مثلث به دست آوریم ، اگر مرکز ثقل ΔABC را G و مرکز ثقل ΔMNP را Q بنامیم ، داریم : $\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ از طرفی از فرض مسئله داریم :



$$\vec{Q}=\frac{1}{3}(\vec{M}+\vec{P}+\vec{N})$$

$$\vec{M}=\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}$$

$$\vec{P}=\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{A}$$

$$\vec{N}=\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}$$

پس :

$$\vec{Q}=\frac{1}{3}(\vec{M}+\vec{P}+\vec{N})=\frac{1}{3}[\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}+\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{A}+\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}]$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})=\vec{G}$$

پس $\vec{Q}=\vec{G}$ و چون بردار مکان هر نقطه یکتاست لذا نقاط Q ، G هم بر هم منطبق هستند، و حکم به راحتی اثبات می شود .

همان طور که گفتیم با سه بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ می توان یک مثلث ساخت، اگر و تنها اگر : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. در مورد مثال بالا می توان ثابت کرد که با بردارهای $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{CN}$ و $\overrightarrow{BP}$ می توان یک مثلث ساخت، بدین ترتیب که :

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BP}=(\vec{M}-\vec{A})+(\vec{N}-\vec{C})+(\vec{P}-\vec{B})$$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}\right)-\vec{A}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}\right)-\vec{C}\right]+\left[\left(\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{A}\right)-\vec{B}\right]$$

$$=\left[\frac{2}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{B}-\vec{B}\right]+\left[\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{A}-\vec{A}\right]+\left[\frac{2}{3}\vec{C}+\frac{1}{3}\vec{C}-\vec{C}\right]=\vec{0}$$

پس به راحتی ادعای ما اثبات گردید .

قضیه ۱. اگر A و B و C سه نقطه ناهم خط باشند و $\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}=\gamma.\overrightarrow{AB}+\varphi.\overrightarrow{AC}$

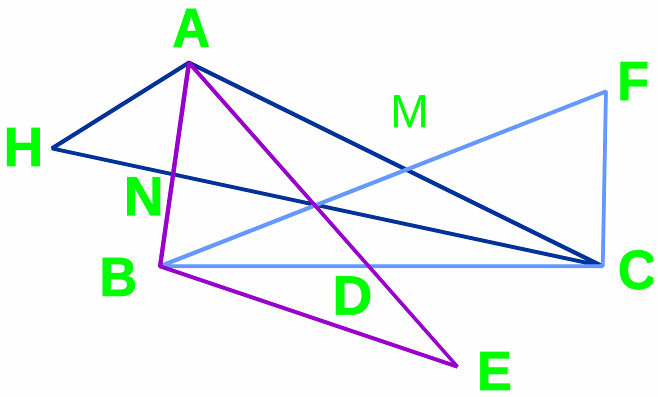
آن گاه داریم : $\alpha=\gamma,\beta=\varphi$ $(\alpha,\beta,\gamma,\varphi\in\mathbb{R})$

اثبات. فرض کنید چنین نباشد و $\alpha\neq\gamma$؛ در نتیجه : $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$

که در آن $k=\frac{\varphi-\beta}{\alpha-\gamma}\in\mathbb{R}$ قابل تعریف است پس A و B و C باید هم خط باشند و خلاف فرض قضیه است ؛ بـه همین ترتیب ثابت می شود : $\beta=\varphi$

مثال ۲. در مثلث ΔABC ، نقاط M ، N و D به ترتیب اوساط اضلاع AB ، AC و BC را تشکیل می دهنـد. هـم چنین نقاط F ، H و E در امتداد BM ، CN و AD قرار گرفته اند . ثابت کنید با بردارهای $\vec{AH}$ ، $\vec{BE}$ و $\vec{CF}$ می توان یک مثلث ساخت ، اگر و تنها اگر :

$$\frac{DE}{AE}=\frac{MF}{BF}=\frac{NH}{CH}$$



حل. می دانیم که با میانه های یک مثلث می توان مثلثی ساخت ؛ زیرا :

$$\vec{AD}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC} \qquad \vec{BM}=\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$\vec{CN}=\frac{1}{2}\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{CB}$$

با جمع این سه رابطه خواهیم داشت :

$$\vec{AD}+\vec{BM}+\vec{CN}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$$

حال فرض کنید :

$$\vec{CN}=c.\vec{NH},\ \vec{BM}=b.\vec{MF},\ \vec{AD}=a.\vec{DE}$$

(که $a,b,c\in\mathbb{R}$) از طرفی داریم :

$$\vec{AH}+\vec{BE}+\vec{CF}=(\vec{AN}+\vec{NH})+(\vec{BD}+\vec{DE})+(\vec{CM}+\vec{MF})$$

$$=(\vec{AN}+\vec{BD}+\vec{CM})+(\vec{NH}+\vec{DE}+\vec{MF})$$

اما:

$$\vec{AN}+\vec{BD}+\vec{CM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CA}=\vec{0} \qquad (۱)$$

پس :

$$\vec{AH}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{NH}+\vec{DE}+\vec{MF} \qquad (۲)$$

حال فرض کنید $a=b=c$. بنابراین رابطه (۱) و با توجه به این که ABC مثلث است ، داریم :

$$(\vec{CA}+\vec{AN})+(\vec{AB}+\vec{BD})+(\vec{BC}+\vec{CM})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{CN}+\vec{AD}+\vec{BM}=\vec{0} \Rightarrow a(\vec{NH}+\vec{DE}+\vec{MF})=\vec{0}$$

$$\vec{AH}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}$$

پس با توجه به رابطه (۲) خواهیم داشت :

$$\vec{AH}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}$$

یعنی می توان با پاره خط های AH, BE, CF یک مثلث ساخت.

حال اگر $\vec{AH}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}$ باید ثابت کنیم که $a=b=c$ ؛ با توجه به رابطه (۲) داریم :

$$\vec{NH}+\vec{DE}+\vec{MF}=\vec{0} \qquad (۳)$$

و هم چنین بنابر استدلال بالا :

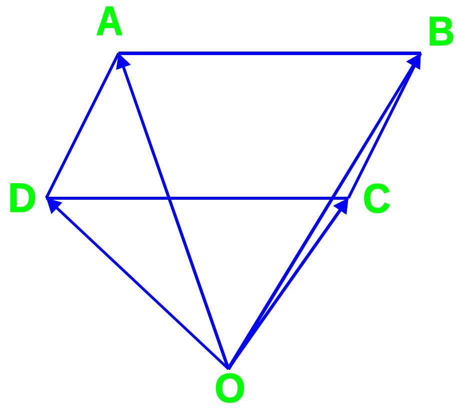
$$\vec{CN}+\vec{AD}+\vec{BM}=\vec{0} \Rightarrow a.\vec{DE}+b.\vec{MF}+c.\vec{NH}=\vec{0} \qquad (۴)$$

از حل دستگاه معادلات (۳) و (۴) مانند استدلالی که در اثبات قضیه (۱) نمودیم نتیجه مـی شـود : $a=b=c$ ؛

پس حکم به طور کامل اثبات گردید .

قضیه ۲. اگر $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد،

آنگاه داریم : $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}$

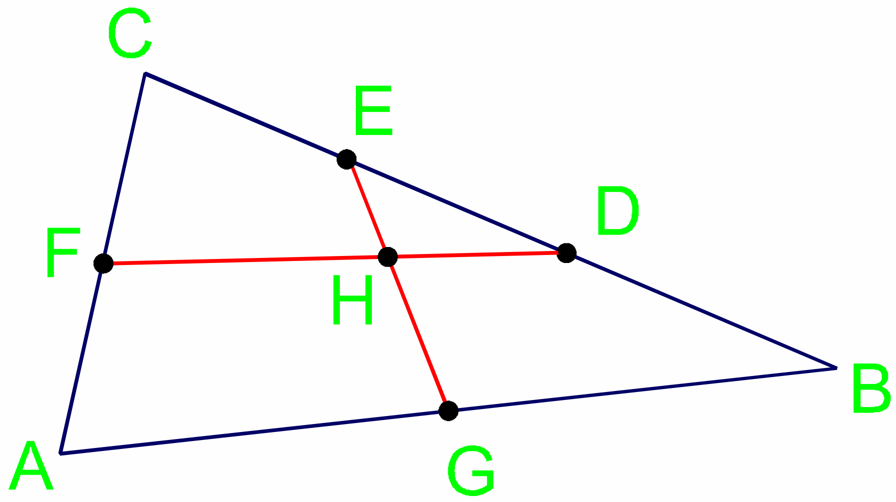


اثبات می دانیم که : $\vec{A}-\vec{B}=\overrightarrow{BA}, \vec{D}-\vec{C}=\overrightarrow{CD}$

اما دو بردار $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA}$ هم جهت و هم اندازه اند زیرا $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است . پس داریم $\vec{A}-\vec{B}=\vec{D}-\vec{C}$ و از آنجا $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}$.

حال به بیان چند مثال در مورد مباحثی که تا اینجا بیان شد می پردازیم :

مثال ۳. فرض کنید در مثلث ΔABC ، D و E نقاطی باشند که ضلع BC را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند ، به طوری که D وسط B و E باشد . هم چنین F وسط AC ، G وسط AB و H محل برخورد EG و DF باشد . مقدار نسبت $\frac{EH}{GH}$ را بیابید.



حل. فرض کنید $\overrightarrow{FH} = b.\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{GH} = a.\overrightarrow{GE}$.

اما $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و داریم:

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

و از طرفی

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

و

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ازطرفی داریم :

$$\vec{AH} = \vec{AG} + \vec{GH} = \vec{AF} + \vec{FH}$$

$$\frac{1}{2}\vec{AB} + a\,\vec{GE} = \frac{1}{2}\vec{AC} + b\,\vec{FD}$$

پس :

$$\frac{1}{2}\vec{AB} + a\left[\frac{-1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\right] = \frac{1}{2}\vec{AC} + b\left[-\frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}\right]$$

در نتیجه :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}a\right)\vec{AB} + \frac{2}{3}a.\vec{AC} = \frac{2}{3}b.\vec{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}b\right)\vec{AC}$$

پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}b \\ \frac{2}{3}a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}b \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{GH}{GE} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{GH}{GE - GH} = \frac{3}{2} = \frac{GH}{EH}$$

در نتیجه : $\frac{EH}{GH} = \frac{2}{3}$.