تصویر مرکزی که یک دایره را به دایره بدل می کند .

تصویر گنجنگاشتی.

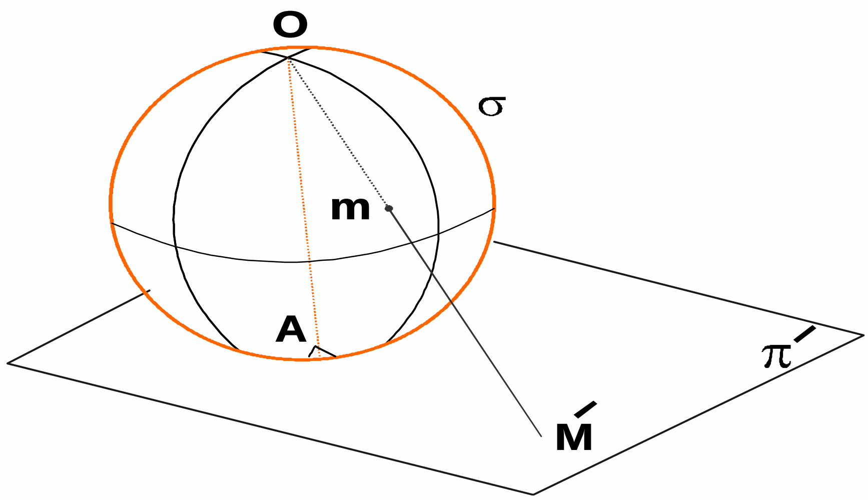
در بخش پیش به تعدادی مساله اشاره کردیم که راه حل انها بر اثر تصویر مناسبی از صفحه شکل بر صفحه دیگر ساده شده بود . بدیهی است که باید محدوده این طریقه را در نظر بگیریم . در هندسه مقدماتی خواص اشکالی مورد مطالعه قرار می گیرد که از خطوط و دوایردرست شده اند . تصویر مرکزی خطوط را حفظ می کند ولی درحالت کلی دوایرراحفظ نمی کند . این مطلب ممکن است این احساس را پدیدآوردکه کاربردتصویرمرکزی به رده نسبتا کوچکی ازمسائل،که شامل دوایر نیستند، محدودمی شود.این احساس درست نیست ،در واقع در این بخش می خواهیم نشان دهیم که تصاویر مرکزی چگونه می توانند برای حل مسائل متضمن دوایر نیز به کار روند . بدین منظور دو قضیه زیر را ثابت میکنیم .

قضیه ۱. گیریم S دایره ای در صفحه π و Q نقطه ای در داخل S باشد . در این صورت یک تصویر مرکزی از π بر یک صفحه π' چنان موجود است که S را به یک دایره S' در π' بدل می کند و Q را به Q' مرکز S' .

قضیه $1'$. گیریم S دایره ای در صفحه π و l خطی در π' باشد که با S متقاطع نیست. در این صورت یک تصویرمرکزی از π بر یک صفحه مناسب π' موجود است چنان که S را به یک دایره S' بدل می کند و l را به یک خط بی‌نهایت π' .

برای اثبات این قضیه راههای مختلفی وجود دارد . راه انتخابی ما ساده ترین راه نیست ولی بینشی که به شخص می دهد ارزش تلاش اضافی را دارد.[1] این راه براساس مطالعه تصویرگنجنگاشتی یک کره بر یک صفحه استوارشده است.

منظوراز تصویرگنجنگاشتی یک کره σ برصفحه π'، مماس بر σ در یک نقطه A،تصویر مرکزی σ است بر π' که O مرکز تصویر ، سر دیگر قطری از σ است که به A وصل می شود . لذا نگاره یک نقطه M از σ $(M \neq 0)$ بر اثر تصویر گنجنگاشتی ، نقطه M' محل برخورد OM است با صفحه π'(شکل ۱) . نقطه O ی کره ، بر اثراین تصویر گنجنگاشتی بر هیچ نقطه صفحه π' تصویر نمی شود .



شکل۱

[1] برهان دیگری در فصل ۲۵ کتاب زیر آورده شده است

Rademacher and Toeplitz The Enjoyment of Matbematics (Princeton Uni . Press 1957).

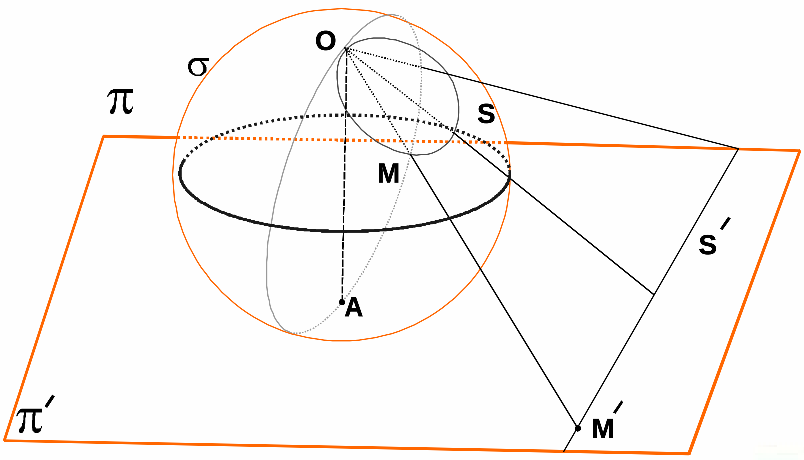
و نیز به کتاب زیر مراجعه کنید .

H . Steinhaus, Matbemalical Snapshots, secend edition, Oxford, London, 1950

مهمترین ویژگی تصویر گنجنگاشتی در قضیه زیر بیان شده است .

قضیه ۲ . تصویر گنجنگاشتی ، هر دایره واقع بر کره σ را به یک دایره یا یک خط در صفحه π' بدل می کند ، و بالعکس ، پیشنگاشت یک خط یا یک دایره صفحه π' دایره ای است واقع بر σ.

برهان . روشن است که تصویر گنجنگاشتی ، یک دایره S واقع بر کره σ مار بر O را به یک خط S' در صفحه π' (شکل ۲) بدل می کند . بالعکس ، پیشنگاشت یک خط در π' بر اثر تصویر گنجنگاشتی دایره ای است واقع بر σ مار بر O. حال فرض می کنیم S دایره ای بر σ باشد که از O نگذرد . S ممکن است به عنوان خم تماسی σ با مخروط محیطی K (شکل ۳ الف) ، یا با استوانه محیطی Λ (شکل ۳ ب) انگاشته شود . فرض می کنیم P' محل برخورد π' با خط مار بر O و راس P ی مخروط K، یا خط مار بر O موازی با مولدی از استوانه Λ، باشد . نشان خواهیم داد که تصویر گنجنگاشتی ، S را به یک دایره S' به مرکز P' در صفحه π' بدل می کند .



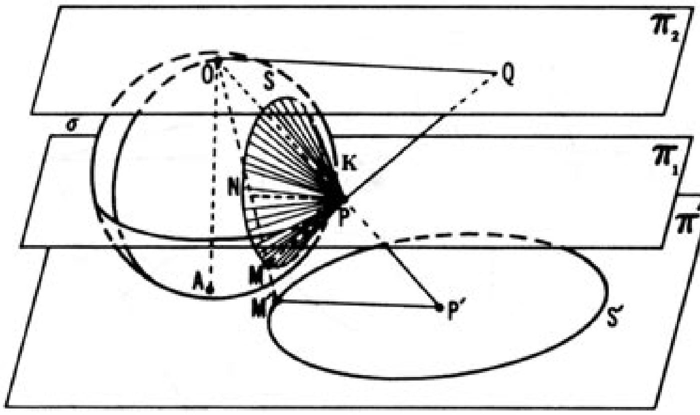
شکل۲

گیریم M نقطه ای بر S باشد و M' تصویر آن بر صفحه π'. باید نشان دهیم که فاصله $P'M'$ مستقل از انتخاب نقطه M بر دایره S است (این ، هم ارز است با اینکه نشان دهیم مکان M' یک دایره S' به مرکز P' است) . ابتدا

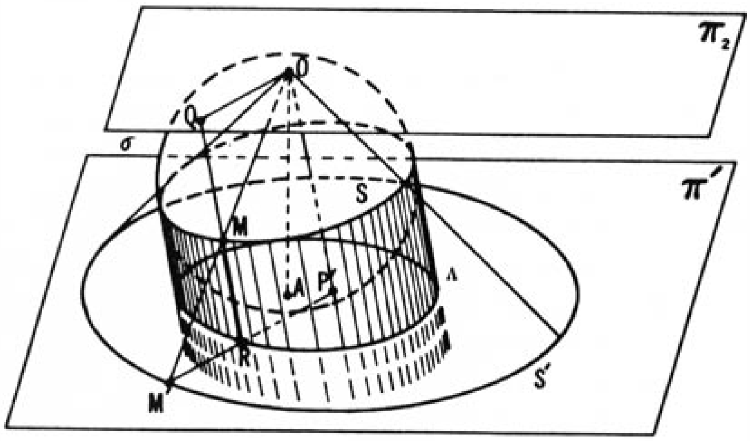
حالتی را در نظر می گیریم که S دایره تماسی مخروط K با کره σ باشد (شکل ۳الـف). صـفحات π_1 و π_2 را ازنقـاط P و O به موازات π' رسم می کنیم ونقطه برخورد OM را با π_1 به N ونقطه برخورد PM را با π_2 به Q نشان میدهیم .

سپس Q رابه O وصل می کنیم.خط های $P'M'$ و PN و QO باهم موازیند،زیرافصل مـشترکهای صـفحه OPM باصفحات موازی π' و π_1 و π_2 هستند .ازاینجانتیجه می شود که $\Delta MPN \sim \Delta MQO$ و $\Delta OPN \sim \Delta OP'M'$. ازتشابه دومثلث اول نتیجه می شود $PN / PM = QO / QM$.چون QO و QM مماسهای مرســوم از Q بــر σ هــستند (QO در صفحه π_2 مماس بر σ قرار داردو QM مولد مخروط محیطی σ است)،و $QO = QM$ ،ولـذا $PM = PN$.ایــن تــساوی نشان می دهد که طول پاره خط PM مستقل ازانتخاب M بر S است (طول PM به ازای جمیع نقــاط M بــر S ثابــت اســت).وانگهـــی تـــشابه دومثلـــث دیگـــر ایجـــاب مـــی کنـــد کـــه داشـــته باشـــیم $P'M' / PN = OP' / OP$. لذا $P'M' = PN(OP' / OP) = PM(OP' / OP)$.معنی این تساوی این است که $P'M'$ در واقع مستقل از انتخاب M است ،و این همان چیزی است که ما می خواستیم ثابت کنیم .

اگر S دایره مماسی استوانه Λ وکره σ باشد (شکل ۳ب)،مولد مار بــر M ازاســتوانه را رســم میکنــیم ومحــل برخوردآن را باصفحات π' و π_2 (که دربالاوارد کردیم)به Q و R نشان می دهیم . چون $MR \| OP'$ ، R بر پاره خط $M'P'$ واقع خواهد شد . Q را به O وصل می کنیم .ومانند قسمت قبل نتیجــه مــی گیــریم کــه $\Delta MRM' \sim \Delta MQO$.وازایــن مشابهت به تساوی $MR = RM'$ می رسیم . (زیرا $QM = QO$ مماس های مرسوم از Q بر σ هــستند .) امــا از تــشابه مثلث های $OP'M'$ و MRM' نتیجه می گیریم $P'M' = P'O$ ، که معنی آن این است که در این حالت هم طول $P'M'$ به انتخاب نقطه M بر S بستگی ندارد.



شکل ۳(الف)



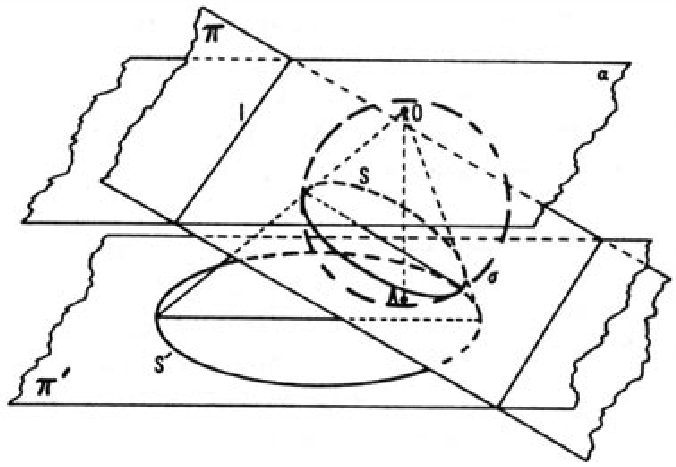
شکل ۳(ب)

به عکس ، گیریم S' دایره ای دلخواه به مرکز P' در صفحه π'، و M' نقطه ای از S' ، و M ، نقطه ای از σ پیشنگاشت M' ، بر اثر تصویر گنجنگاشتی باشد . فرض می کنیم P نقطه برخورد خط OP' با صفحه α ، مماس بر σ در M ، باشد (به شرطی که چنین نقطه ای موجود باشد) . مانند حالت قبل ثابت می کنیم که P مستقل از انتخاب M' بر S' است . ثابت می کنیم که مکان نقطه M دایره S است ، که یا دایره تماسی کره σ با مخروط K ی حاصل از مماس های مرسوم بر این کره از نقطه P است ، و یا دایره مماسی استوانه Λ ی حاصل از مماس های بر σ به موازات OP' .

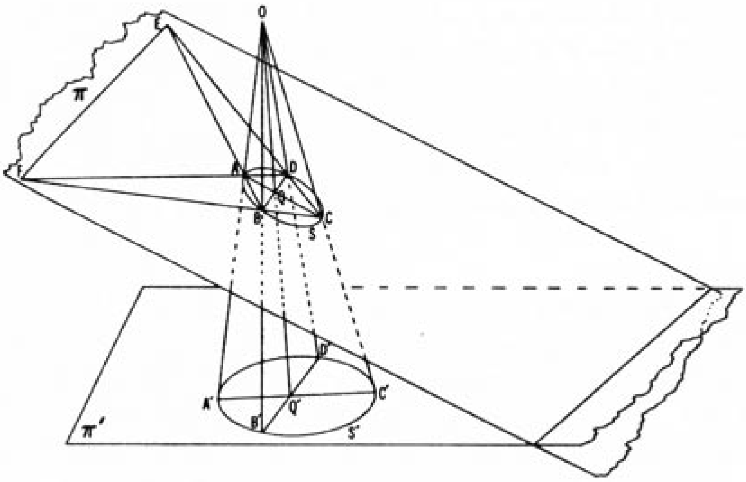
با استفاده از قضیه ۲ بلافاصله می توانیم قضیه های بنیادی 1 و $1'$ را ثابت کنیم .

برهان قضیه $1'$.گیریم S دایره ای در یک صفحه π و l خطی در π نامتقاطع با S باشد . کره دلخواه σ را بـر S ، وصفحه α مار بر l و مماس بر σ در یک نقطه O را رسم می کنیم . حال فرض می کنیم π' صفحه ای موازی α ومماس بر σ در نقطه A ، متقاطر O، باشد (شکل۴) . تصویر مرکزی π از O بر π' (به موجب قضیه ۲) S را به یک دایـره S' از صفحه π' ، و (بدیهی است که) l را به خط بینهایت π' بدل می کند .

برهان قضیه ۱. گیریم S یک دایره و Q نقطه ای در داخل آن باشد . فرض می کنیم AC و BD دو وتـر مرسـوم از Q باشند و چهار ضلعی $ABCD$ (شکل ۵) را در نظر می گیریم . نقاط تلاقی اضلاع مقابل این چهـار ضـلعی را بـه E و F نشان می دهیم .



شکل۴



شکل۵

همه خطوط مرسوم از E ، یا S را (۱) دوبار بر کمان AB ، یا (۲) دو بار بر کمان CD ، یا (۳) یک بـار بـر کمـان AD و یک بار بر کمان BC، می برند یا (۴) نقطه مشترکی با S ندارند . هم چنین همه خط های مـار بـر F،یـا S را (۱) دوبار بر کمان AD ، یا (۲) دوبار بر کمان BC، یا (۳) یک بار بر کمان AB و یک بار بر کمان CD، می برند یـا (۴) نقطـه مشترکی با S ندارند . خط EF باید به دسته چهارم متعلق باشد . زیرا اگر به یکی از سه دسته دیگر نسبت به E متعلـق باشد ، شرایط بودن در یکی از از چهار دسته نسبت به F را نقض می کند.

حال شکل را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به یک دایره S' و EF به خط بی نهایت π' بـدل شود. (که بنا به قضیه $1'$ ممکن است) . نگاره چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ محاط در S'، یعنـی یک مستطیل است . چون Q نقطـه تقـاطع قطرهـای $ABCD$ اسـت ، پـس نگـاره اش ، Q' ، نقطـه تقـاطع قطرهـای مستطیل $A'B'C'D'$ ، یعنی مرکز S' خواهد شد .

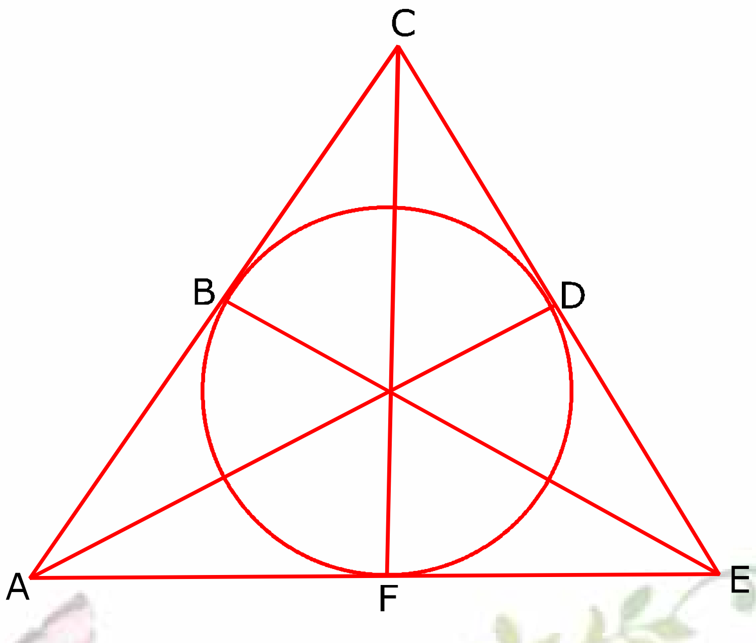
قضیه های 1و $1'$ به ما امکان می دهند که از تصاویر مرکزی برای حل بسیاری از مسائل متـضمن دوایـر اسـتفاده کنیم . تعدادی از این گونه مسائل در زیر می آیند : به خاطر سپردن این واقعیت که یک تصویر مرکزی که یک دایره S را به یک دایره S' بدل می کند ، مماس بر S (یعنی خطی که با S تنها یک نقطه مشترک دارد) را نیز به مماس بر S' بدل

می کند، در حل مسائل اغلب تا حدی مفید واقع می شود. بدون استفاده از تصویر مرکزی ، علی الاصول ، حل این مسائل خیلی دشوار است .

۱.

الف. ثابت کنید که در هر مثلث خطوط واصل از سه راس به نقاط تماس اضلاع مقابل با دایره محاطی داخلی ، متقارب اند (← شکل ۶) .

ب. گیریم ABC یک مثلث و S دایره ای باشند که اضلاع AB ، BC ، CA ی آن به ترتیب در M و N ، P و Q ، R و T می برد . فرض می کنیم C_1 و A_1 و B_1 به ترتیب نقاط برخورد مماس های مرسوم بر S در نقاط M و N ، P و Q ، R و T باشند . نشان دهید که خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 متقارب اند.



شکل ۶

حل.

الف. راه حل اول (براساس قضیه ۱) . گیریم D و E و F نقطه های تماس دایره محاطی داخلی S با

اضلاع ΔABC باشند (شکل ۷ الف) . O ، نقطه تلاقی BE و CF ، درون دایره S قرار دارد . (خط BG ، که G دومین نقطه برخورد CF با دایره S است ، پاره خط EC از خط AC را می برد . لذا BE وتر FG از S را می برد.)

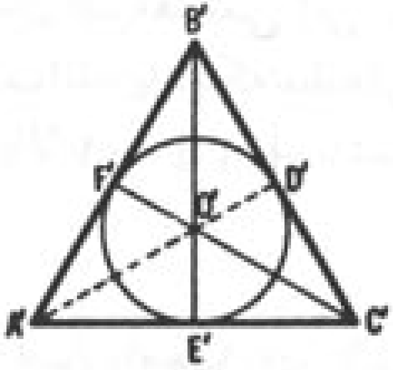
حال صفحه شکل را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به یک دایره S' و O به نقطه O' ، مرکز دایره S' ، بدل شود . بر اثر این تصویر شکل ۷ الف به شکل ۷ ب بدل شده است . به آسانی دیده می شود که خط های $B'E'$ و $C'F'$ هم نیمساز ها و هم ارتفاعات $\Delta A'B'C'$ هستند . از اینجا نتیجه می شود که $A'B' = B'C'$ و $C'A' = B'C'$. پس مثلث $A'B'C'$ مثلثی متساوی الاضلاع است و لذا خط $A'D'$ از O' می گذرد . تقارب $A'D'$ و $B'E'$ و $C'F'$ تقارب AD و BE و CF را ایجاب می کند.

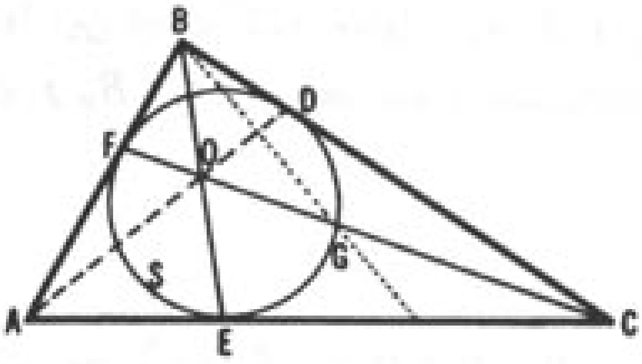
راه حل دوم (بر اساس قضیه $1'$ ؛ نمادها همان نمادهای راه حل قبلی هستند).

برامتداد AB نقطه F_1 را چنان تعیین می کنیم که $F_1A/F_1B=-FA/FB$ (شکل ۸ الف) . خط CF_1 بیرون مثلث ABC و بنابراین بیرون S قرار دارد . صفحه شکل رابر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به یک دایره S' و خط CF_1 به خط بینهایت صفحه π' بدل شود. پس شکل ۸ الف به شکل ۸ ب بدل می شود ، که $A'E' \| B'D' \| F'C'$. ملاحظه می کنیم که F' وسط پاره خط $A'B'$ است . [دلیل آن این است که ، به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر مرکزی داریم

$$\frac{F_1'A'/F_1'B'}{F'A'/F'B'}=-1,\frac{F'A'}{B'F'}=\frac{F_1'A'}{F_1'B'}$$

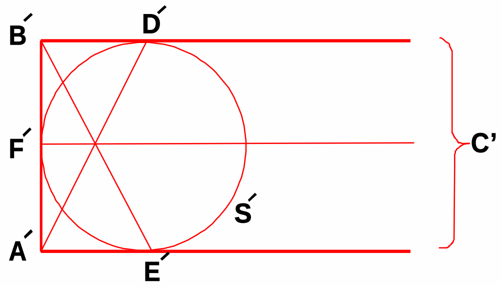
در اینجا F_1' نقطه بینهایت بر خط $A'B'$ است چنانکه $F_1'A'/F_1'B'=1=F'A'/B'F'$]

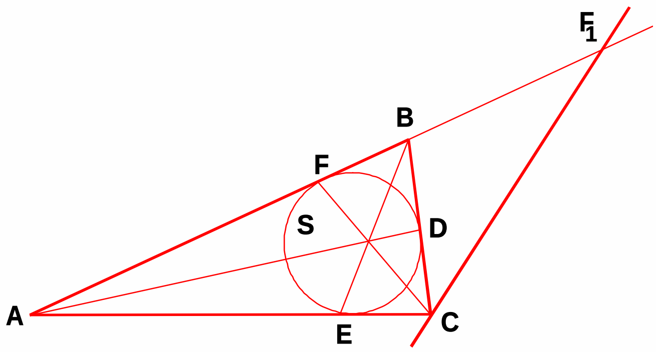




شکل ۷(ب)

شکل ۷(الف)





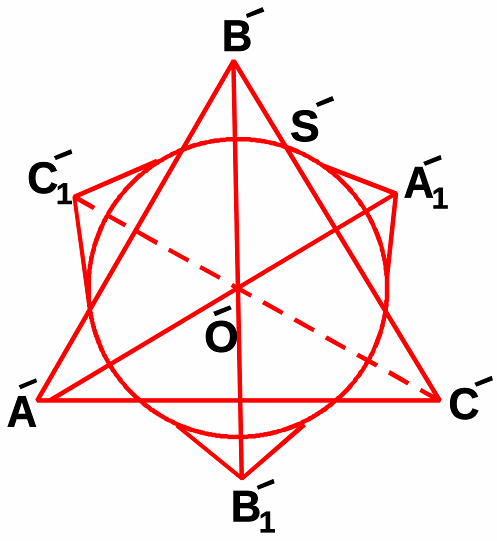
شکل ۸(ب)

شکل ۸(الف)

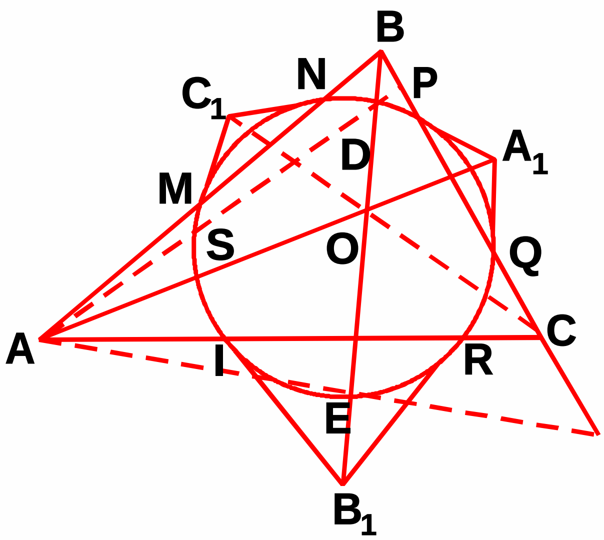
چون $|B'F'|=|A'F'|$ ، پس نتیجه می شود که $F'C'$ یک محور تقارن شکل حاصل است ؛ و، واضح است که ، نقطه تلاقی خط های $A'D'$ و $B'E'$ بر $F'C'$ قرار دارد . چون $A'D'$ و $B'E'$ و $C'F'$ متقارب اند ، این حکم بر خط های AD و BE و CF نیز جاری است .

ب. ملاحظه می کنیم که O نقطه تقاطع خط های AA_1 و BB_1 درون دایره S قرار دارد . زیرا AA_1 و BB_1 وترهای PQ و TR از دایره S را قطع می کنند . (شکل ۹ الف) . چون خط های AD و AE ، که D و E نقطه های تقاطع BB_1 با S هستند ، BC را بیرون پاره خط PQ ، و در دو طرف آن می برند ، از آنجا نتیجه می شود که AA_1 وتر DE را

می برد . حال صفحه شکل ۹ الف را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به یک دایره S' بدل شود و O به O' ، مرکز S' . لذا شکل ۹الف به شکل ۹ ب بدل می شود . چون $A'A_1'$ و $B'B_1'$ از نقطه O' می گذرند ، در نتیجه $A'A_1' \perp B'C'$ و $B'B_1' \perp A'C'$.بنابراین $A'A_1'$ و $B'B_1'$ دو ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهند بود ، و O' نقطه تلاقی آنها . از اینجا نتیجه می شود که $C'C_1'$ سومن ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهد شد .



شکل۹(ب)



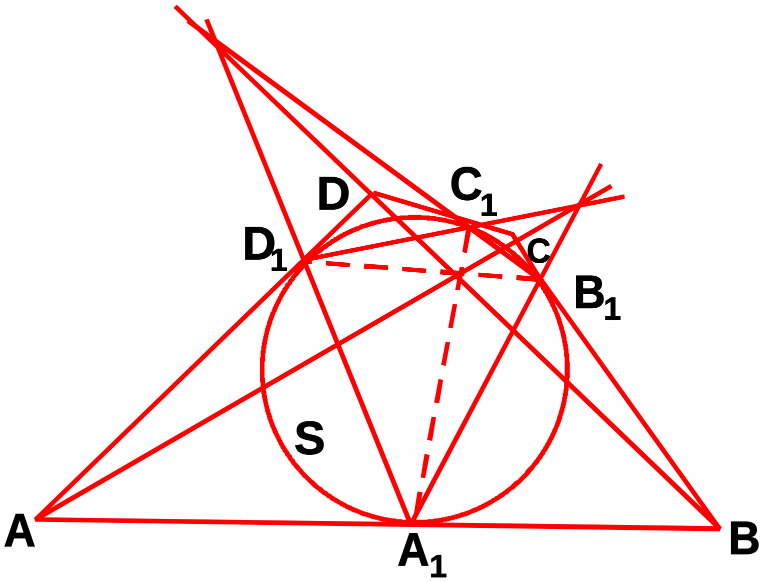
شکل۹(الف)

روشن است که عمودهای مرسوم از O' ، مرکز S' ، بر ضلع $A'B'$ از $\Delta A'B'C'$ باید از C_1' بگذرد . لذا خط های $A'A_1'$ و $B'B_1'$ و $C'C_1'$ در O' متقارب می شوند . از اینجا نتیجه می شود که AA_1 و BB_1 و CC_1 نیز در O یکدیگر را می‌برند .

۲ . اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ در نقطه های A_1 و B_1 و C_1 و D_1 بر یک دایره S مماس هستند (شکل۱۰) . نشان دهید که :

الف. نقاط تقاطع قطرهای چهار ضلعی های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ بر هم منطبق اند.

ب. امتداد قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ از نقاط برخورد اضلاع مقابل چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ می گذرند .



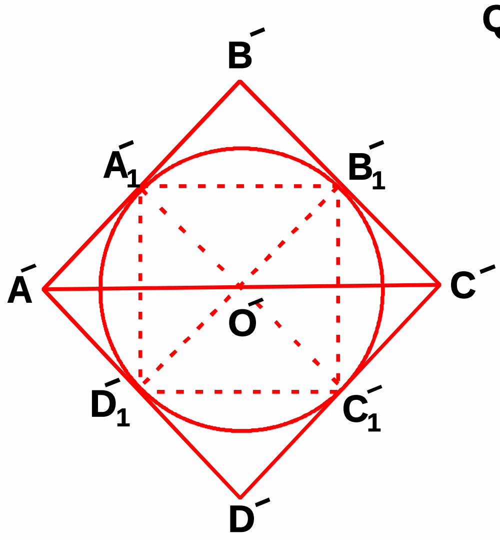
شکل۱۰

حل. صفحه شکل ۱۱ الف را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به دایره S' و O، نقطه تلاقی چهار ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ ، به نقطه O' ، مرکز دایره S' بدل شوند . لذا شکل ۱۱ الف به شکل ۱۱ ب بدل می شود . که $A_1'C_1' \perp C'D' \| A'B'$ و $B_1'D_1' \perp A'D' \| B'C'$. در نتیجه $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاعی می شود که بر یک دایره محیط است ، یعنی یک لوزی است .

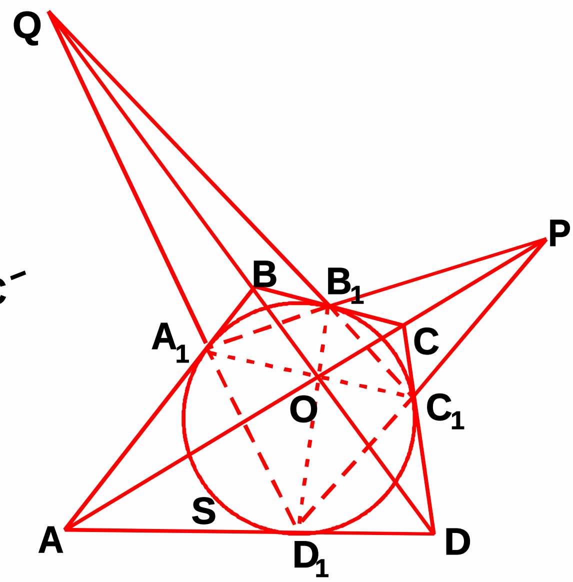
الف. می دانیم که نقطه تقاطع قطرهای لوزی $A'B'C'D'$ بر مرکز دایره محاطی اش منطبق است . لذا نقاط تلاقی قطرهای چهار ضلعی های $A'B'C'D'$ و $A_1'B_1'C_1'D_1'$ بر هم منطبق اند ، و همین امر برای نقاط تلاقی قطرهای چهار ضلعی های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ نیز صادق است.

ب. با توجه به ویژگی تقارن روشن است که $A'C' \| D_1'C_1' \| A_1'B_1'$ و $B'D' \| A_1'D_1' \| B_1'C_1'$. بنابراین AC باید

از P بگذرد و BD از Q .



شکل۱۱(ب)



شکل۱۱(الف)

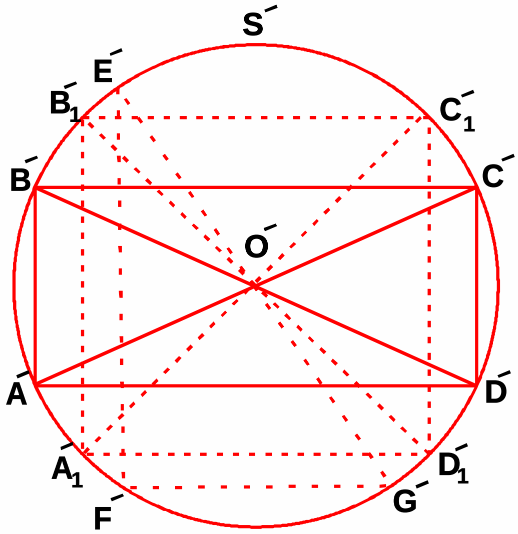
۳ . چهار ضلعی $ABCD$ در یک دایره S محاط است و ضلع های رو به رو در نقطه های P و Q ، وقطرها در نقطه O یکدیگر را قطع می کنند . ثابت کنید که :

الف.بینهایت مثلث محاط در S وجود دارند که اضلاع آنها (یا امتدادشان) از نقاط P و Q و O می گذرند (دقیق تر بگوییم ، اگر دو ضلع از یک مثلث محاط از دو تا از نقاط P و Q و O بگذرند ، الزاماً ضلع سوم از نقطه سوم خواهد گذشت).

ب. بینهایت چهار ضلعی محاط در S وجود دارند که نقاط تلاقی اضلاع مقابل آنها بر P و Q منطبق اند (دقیق تر بگوییم ، اگر دو ضلع مقابل یک چهار ضلعی محاط در S یکدیگر را در P ببرند و ضلع سوم از Q بگذرد ، آنگاه ضلع مقابل به آ ن نیز از Q خواهد گذشت)، و نقاط تلاقی قطرهای همه این نوع چهار ضلعی ها بر O منطبق اند .

ج. بینهایت چهار ضلعی محاط در S وجود دارند که نقاط تقاطع قطرهای آنها بر O منطبق اند ، یکی از نقاط تلاقی اضلاع مقابل بر P منطبق است .(دقیق تر بگوییم ، اگر نقطه تلاقی قطرهای یک چهار ضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یک ضلع آن از P بگذرد ، آنگاه ضلع مقابل به آن هم از P خواهد گذشت) ، و دومین نقطه تلاقی اضلاع مقابل (در همه این گونه چهار ضلعی ها) بر Q منطبق است.

حل. صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه جدید π' تصویر می کنیم به طوری که دایره S به یک دایره S' بـدل شود و نقطه O به O' ، مرکز دایره S' . براثر این تصویر ، چهار ضلعی $ABCD$ به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می شود (زیرا قطرهای $A'B'C'D'$ در مرکز دایره محیطی S' متقاطع اند) .



شکل ۱۲

بنابراین نقطه های P و Q به P' و Q' ، نقاط بینهایت امتدادهای اضلاع مستطیل ، بدل می شوند (شکل ۱۲) .

الف.اگر اضلاع $E'F'$ و $F'G'$ از $\Delta E'F'G'$ ، محاط در S' ، به ترتیب از نقطه های بینهایت P' و Q' بگذرنـد ، یعنی هرگاه $E'F' \| A'B'$ و $F'G' \| B'C'$ ، آنگاه ضلع $E'G'$ از O' ، مرکز S' ، مـی گـذرد (ضـلع $E'G'$

مقابل به زاویه قائمه $E'F'G'$ محاط در S' است) . اگر ضلع $E'G'$ از مرکز O' بگذرد و $E'F'$ از نقطه P'

، یعنی اگر $E'F'\|A'B'$ ، آنگاه $F'G'\|B'C'$ ، یعنی $F'G'$ از نقطه Q' می گذرد (زیرا زاویه محاطی مقابل

به قطر ، قائمه است) . حکم قسمت (الف) مسئله ۲ نتیجه می شود .

ب. اگر اضلاع $A_1'B_1'$ و $D_1'C_1'$ از مستطیل $A_1'B_1'C_1'D_1'$ ، محاط در دایره S' ، از نقطه P' بگذرند و

ضلع $B_1'C_1'$ از Q' بگذرد (یعنی $A_1'B_1'\|D_1'C_1'\|A'B'$ ، و $B_1'C_1'\|B'C'$) ، آنگاه $A_1'D_1'\|B'C'\|A'D'$ ، و

قطرهای $A_1'C_1'$ و $B_1'D_1'$ در O' ، مرکز S' ، یکدیگر را می برند . از اینجا حکم قسمت (ب) نتیجه می‌شود.

ج. اگر قطرهای $A_1'C_1'$ و $B_1'D_1'$ از چهار ضلعی محاطی $A_1'B_1'C_1'D_1'$ در مرکز O' از دایره S' یکدیگر را ببرند ،

و اگر ضلع $A_1'B_1'$ از نقطه P' بگذرد (یعنی اگر $A_1'B_1'\|A'B'$) ، آنگاه $D_1'C_1'\|A'B'$

و $B_1'C_1'\|A_1'D_1'\|B'C'$ ؛ و حکم قسمت (ج) نتیجه می شود .

۳. S یک دایره و P نقطه ای در صفحه S است . کلیه قاطع های S مار بر P را در نظر می گیریم . هر یک از این قاطع ها یک جفت نقطه از S را مشخص می کند . به هر جفت از این نقاط ، نقطه تلاقی مماس در آنها بر دایره را مربوط می کنیم . مکان این نقاط تلاقی را پیدا کنید .

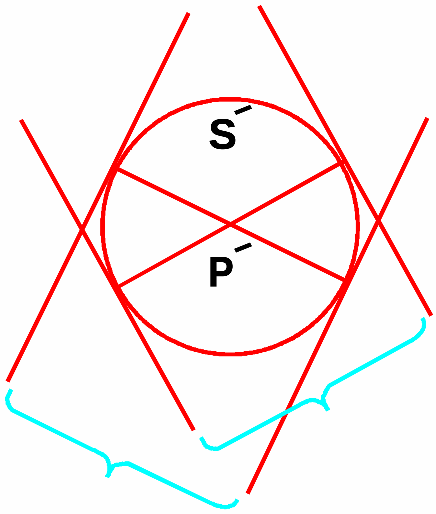
حل. دو حالت در نظر می گیریم .

۱. P نقطه ای است در خارج S . صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که دایره S به یک دایره S' و P به نقطه بینهایت π' بدل می شوند . بر اثر این تصویر مکان مطلوب به یک خط ، ، یعنی به قطری از S' عمود بر امتدادی که به وسیله نقطه بینهایت P' مشخص می شود ، بدل می‌گردد (شکل ۱۳ الف) از آنجا نتیجه می شود که مکان مطلب یک خط است .

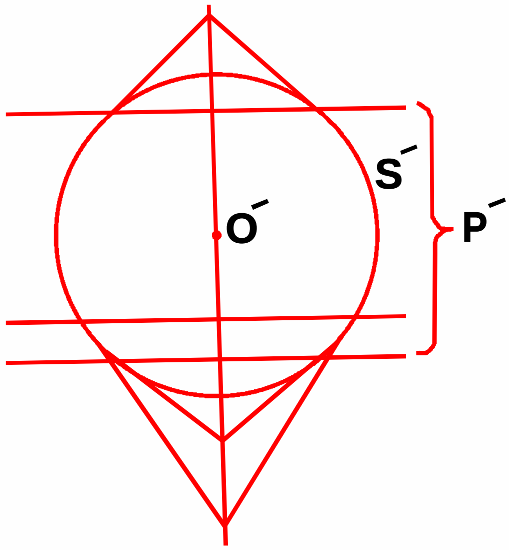
۲. P نقطه ای است در داخل S . صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که

S به یک دایره S' بدل شود و P به P' ، مرکز S' . روشن است که مکان مطلوب در این صورت به خط بینهایت π' بدل می شود (شکل ۱۳ ب) از اینجا نتیجه می شود که مکان مطلوب یک خط است .

ملاحظه می کنیم که اگر P نقطه ای بر S باشد ، آنگاه مکان مطلوب ، مماس بر S در P خواهد شد .



کل۱۳(ب)



شکل۱۳(الف)

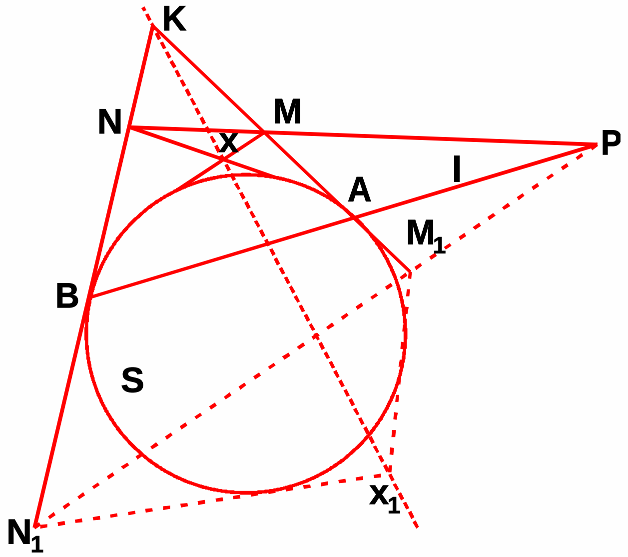
۴. دایره S ونقطه P در یک صفحه مفروض اند . خط l بر P می گذرد و با S در نقاط A و B برخورد می کند .

فرض می کنیم K نقطه تلاقی مماس های بر S در A و B باشد .

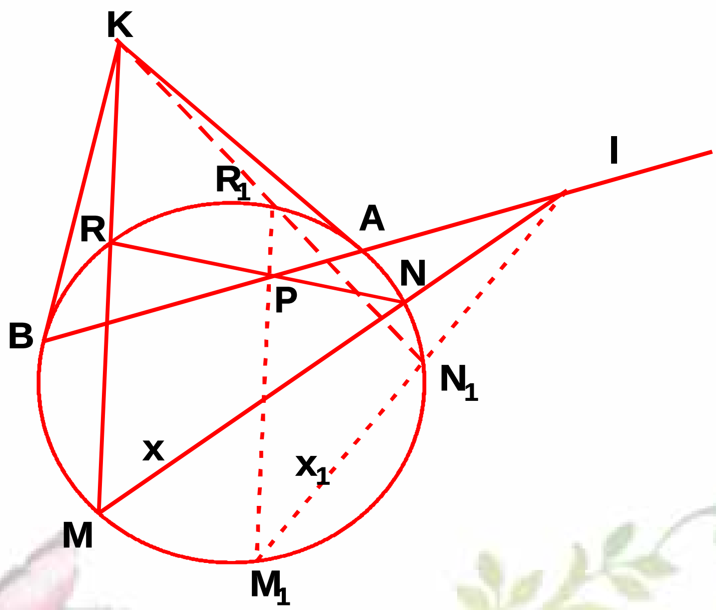
الف. یک خط متغیر مار بر P خط های AK و BK را در نقاط M و N می برد (شکل ۱۴(الف)) . ثابت کنید که مکان X ، نقطه تقاطع دومین مماس های بر S مرسوم از M و N ، خطی است که بر K می گذرد (دقیق تر بگوییم ، جزئی از این خط که در بیرون S قرار دارد).

ب. یک نقطه متغیر R از دایره S را به نقاط P و K وصل می کنیم (شکل ۱۴ ب) . نشان دهیدکه x خط واصل بین نقاط M و N دومین نقاط تقاطع خطوط RK و RP با S ، از نقطه ثابتی (مستقل از

انتخاب R) واقع بر l می گذرد.



شکل۱۴(الف)

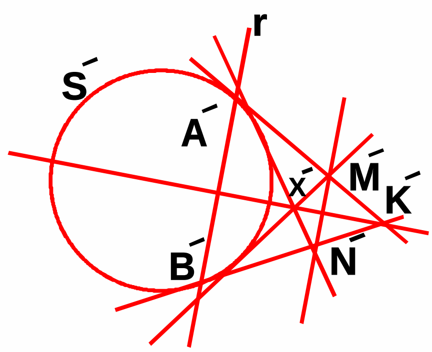


شکل۱۴(ب)

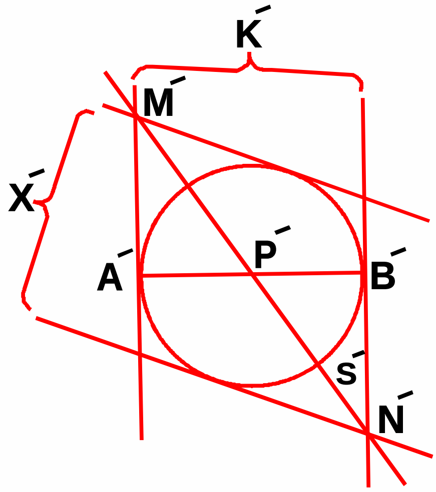
حل.

الف. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱. P نقطه ای در خارج S ($\leftarrow$ شکل ۱۴ الف) . صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به یک دایره S' و P به P' ، نقطه بینهایت π' ، بدل شوند . در این حال خط های AB و MN به خط های $A'B'$ و $M'N'$ بدل می شوند (شکل ۱۵ الف) . با توجه به ملاحظات تقارن ، نتیجه می‌شود که نقطه های K' و X' (شکل ۱۵ الف) بر قطری از S' عمود بر خط l' ، نگاره l ، قرار دارند . بنابراین مکان X' خطی است مار بر K' و عمود بر l' .در نتیجه مکان X خطی می شود که بر K می‌گذرد .



شکل۱۵(الف)



شکل۱۵(ب)

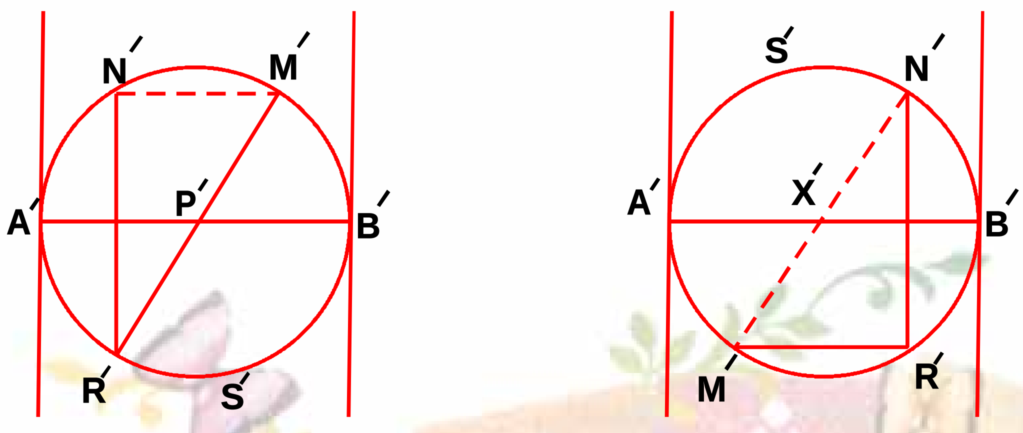
۲. P نقطه ای است در داخل S . صفحه نمودار رابر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که S به دایره S' و P به P' ، مرکز S' بدل شوند (شکل ۱۵ ب) . در این صورت خط های $A'B'$ و $M'N'$ قطرهای S' هستند . بنابراین مماس های $A'K'$ و $B'K'$ بر S' در A' و B' موازی اند .بنابراین مماس های دوم بر S' از M' و N' نیز موازی اند . ملاحظه می کنیم که دراین حالت مکان X' خط بینهایت π' است . نقطه K'

نیز بر این خط است . لذا مکان X خطی است که بر K می گذرد .

روشن است که شرایط مسئله حالتی را که P بر S است مستثنی می کند . (اگر P بر A منطبق باشد ، M نیز بر A منطبق است ، و در آن فقط یک مماس تنها بر S وجود دارد که همان خط AK است .)

ب. اگر P بر S باشد ، روشن است که حکم مسئله صحیح است .(چون ، اگر P بر A منطبق باشد ، آنگاه N نیز بر A منطبق است و نقطه ثابت X بر A منطبق می شود .) بنابراین باید مسئله را برای دو حالت درنظر بگیریم

۱. P نقطه ای است در خارج S . صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به قسمی که S به یک دایره S' بدل شود ، و PK به خط بینهایت π' (شکل ۱۶ الف). پس AB به یک قطر $A'B'$ از S' بدل می شود ، و خط های AK و BK به مماس های بر دایره در نقطه های A' و B' .به آسانی دیده می‌شود که $R'M'$ و $R'N'$ بر هم عمودند و بنابراین $M'N'$ قطری است از S' . لذا به ازای هر انتخاب نقطه R' ، خط $M'N'$ از X' ، مرکز S' ، می گذرد ؛ وحکم نتیجه می شود .



شکل ۱۶(ب)

شکل ۱۶(الف)

۲. P نقطه ای است در داخل S (رک.شکل ۱۴ ب) . صفحه نمودار مسئله را بر یک صفحه π' تصویر

می‌کنیم به طوری که دایره S به یک دایره S' بدل شود و P به P'، مرکز S' (شکل ۱۶ ب) . لذا AB به قطر $A'B'$ از دایره S' ، و K به نقطه بینهایت K' از قطر عمود بر $A'B'$ بدل می شوند . چون $A'B' \perp R'N'$ و $R'N' \perp M'N'$ ، از اینجا نتیجه می شود که $M'N' \| A'B'$ ؛ یعنی به ازای هر انتخاب نقطه R' ، خط های $M'N'$ و $A'B'$ درنقطه بینهایت X' از $A'B'$ تلاقی می کنند ، و حکم نتیجه می شود .

۵ . دردایره مفروض یک چهار ضلعی محاط کنید که

الف. نقطه تلاقی قطرهای آن M ، و دو نقطه K و L از دو ضلع مقابل آن داده شده باشند .

ب. نقطه تلاقی دو ضلع مقابل و یک نقطه از هر یک از دو ضلع دیگر داده شده باشند .

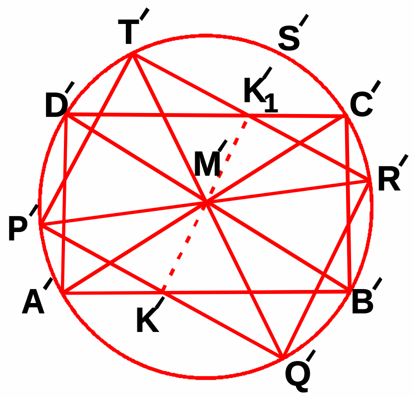
حل.

الف. فرض می کنیم چهار ضلعی مطلوب $ABCD$ رسم شده و نقطه مفروض M نقطه تقاطع قطرهای آن باشد ، و AB و CD از نقطه های مفروض K و L بگذرند . صفحه نمودار مسئله رابر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که دایره محیطی آن S به یک دایره S' بدل شود و M به نقطه M' ، مرکز S' . دراین حال $ABCD$ به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می شود .

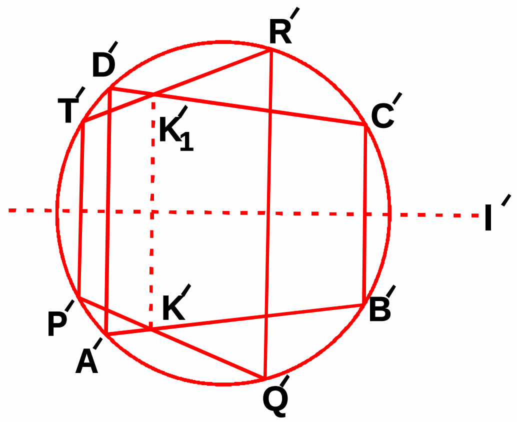
حال اگر $P'Q'R'T'$ یک چهار ضلعی محاط در S' باشد که قطرهایش در مرکز M' متلاقی باشند (که مستطیل بودن آنرا ایجاب می کند) و ضلع $P'Q'$ آن از K' بگذرد ، آنگاه ضلع $R'T'$ باید از K_1' قرینه K' نسبت به M' بگذرد (شکل ۱۷ الف) . بدین ترتیب اضلاع $R'T'$ در همه چهار ضلعی های محاط در S' که اقطارشان در M' متلاقی اند و اضلاع $P'Q'$ آنها از K' می گذرند ، از نقطه ثابت K_1' می گذرند . از اینجا نتیجه می شود که اضلاع RT ی همه چهار ضلعی های $PQRT$ محاط در S که قطرهای آنها در یک نقطه M متلاقی اند و اضلاع PQ ی آنها از K می گذرند ، از

نقطه ثابت K_1 می گذرند . برای تعیین K_1 کافی است که دوتا از این چهار ضلعی ها را رسم کنیم . ضلع CD ی چهار ضلعی مطلوب $ABCD$ از وصل K_1 به L دست می آید.

اگر K_1L با S متقاطع و K_1 غیر از L باشد مسئله جوابی منحصر به فرد دارد .



شکل ۱۷(الف)



شکل ۱۷(ب)

اگر K_1L دایره S را نبرد ، مسئله جواب ندارد . اگر K_1 بر L منطبق باشد ، مسئله بینهایت جواب دارد .

ب. فرض می کنیم $ABCD$ چهار ضلعی مطلوب محاط در دایره S باشد که اضلاع BC و AD ی آن در یک نقطه مفروض M متلاقی باشند و اضلاع AB و CD ی آن به ترتیب از نقطه های مفروض K و L بگذرند . صفحه نمودار رابر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که S به یک دایره S' بدل شود و M به یک نقطه بی نهایت M' از π' . در این صورت چهار ضلعی $ABCD$ به یک ذوزنقه $A'B'C'D'$ به قاعده های $B'C'$ و $D'A'$ بدل می شود (← شکل ۱۷ ب) . چون ذوزنقه محاط در یک دایره است ، پس متساوی الساقین است .

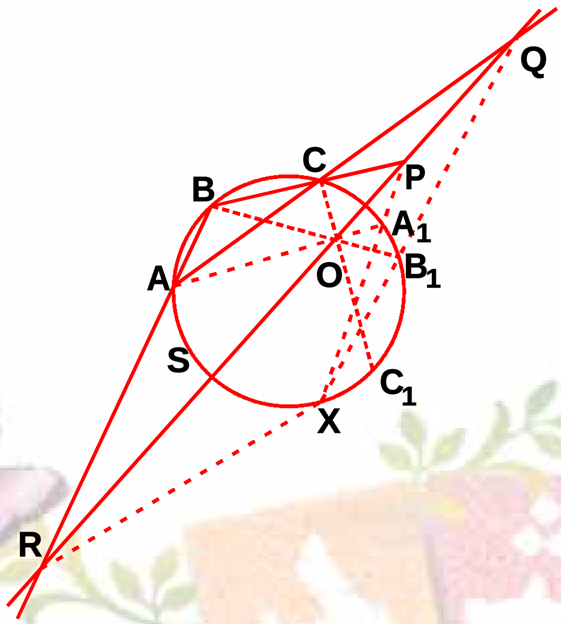
یک چهار ضلعی $P'Q'R'T'$ ، محاط در دایره S' ، که اضلاع $Q'R'$ و $T'P'$ آن در نقطه بینهایت M' متلاقی باشند ، ذوزنقه ای است متساوی الساقین که محور تقارنش قطر l' از دایره S' عمود بر امتدادی است که با M' معین می شود .

بنابراین ، هرگاه ضلع $P'Q'$ از چهار ضلعی از نقطه ای مانند K' بگذرد؛ آنگاه ضلع $R'T'$ از نقطه K_1'، قرینه K' نسبت به

l'، خواهد گذشت . از آنجا نتیجه می شود که اضلاع RT در همه چهار ضلعی های محاطی $PQRT$ ، که اضلاع QR و PT ی آنها در M متلاقی اند و اضلاع PQ ی آنها از K می گذرند ، از نقطه ثابت K_1 می گذرند . برای پیدا کردن K_1 کافی است دو تا از این چهار ضلعی ها را رسم کنیم . از وصل کردن K_1 به L ، ضلع CD ی چهار ضلعی مطلوب به دست می آید .

اگر K_1 از L متمایز باشد ، مسئله (بسته به اینکه خط K_1L دایره را ببرد یا نبرد) یا یک جواب منحصر به فرد دارد و یا جوابی ندارد . اگر K_1 و L بر هم منطبق باشند ، آنگاه مسئله بینهایت جواب پیدا می کند.

۶. گیریم سه وتر AA_1 و BB_1 و CC_1 از یک دایره S در یک نقطه O متقاطع باشند و X نقطه ای دلخواه از S باشد . نشان دهید که P و Q و R ، نقطه ، تلاقی خطوط XA_1 و XB_1 و XC_1 با اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC بر خطی مار بر O واقع است (شکل ۱۸) .



شکل۱۸

حل. اگر O بر S منطبق باشد، مسئله بی معنی است. مانده است دو حالت زیر را بررسی می کنیم.

۱. O نقطه ای است در خارج S. صفحه نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که دایره S به یک دایره S' بدل شود، و O به یک نقطه بینهایت O' از π'. برا ثر این تصویر، شکل ۱۸به شکل ۱۹ الف بدل می شود که

$$A'A_1'\|B'B_1'\|C'C_1'$$

نشان می دهیم که $P'Q'\|A'A_1'$. ذوزنقه $A'B'B_1'A_1'$ محاط در S' متساوی الساقین است، $A'B'=A_1'B_1'$.

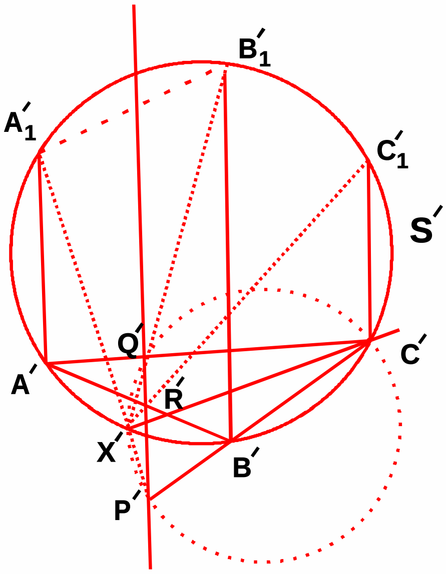
بنابراین $A'B'=A_1'B_1'$ و $\angle A'C'B'=\angle A_1'X'B_1'$ ولی این تساوی ها ایجاب می کنند که نقطه های X' و C' و P' و Q' بر یک دایره قرار داشته باشند. بنابراین $\angle X'P'Q'=\angle X'C'Q'=\angle X'C'A'$. ولی $\angle X'C'A'=\angle X'A_1'A'$ لذا $\angle X'P'Q'=\angle X'A_1'A'$ و، بالاخره $P'Q'\|A'A_1'$.

به طریقی مشابه ثابت می کنیم که $Q'R'\|B'B_1'$. پس داریم

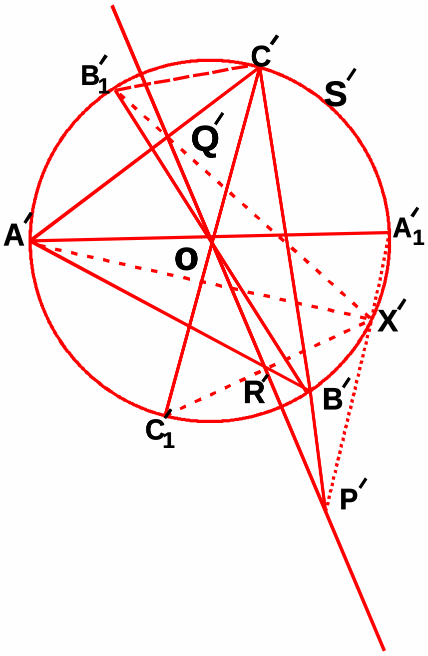
$$P'Q'\|Q'R'\|A'A_1'$$

که بدین معنی است که P' و Q' و R' برخطی قرار دارند که بر نقطه بینهایت O' می گذرد. از آنجا نتیجه می شود که نقطه های P و Q و R، شکل ۱۸، بر یک خط واقع اند که بر O می گذرد.

۲. O نقطه ای است در داخل S. صفحه شکل ۱۸را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که S به یک دایره S' بدل شود و O به O'، مرکز S' (شکل ۱۹ ب).



شکل۱۹(الف)



شکل۱۹(ب)

ثابت می کنیم که $P'Q'$ از O' می گذرد . بدین منظور اول ثابت می کنیم که

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} \qquad (*)$$

که S_{XYZ} معرف مساحت ΔXYZ است .

حال اگر XY یک خط باشد ، پاره خط مرسوم از O' و عمود بر XY ، یا طول آن را ، (که معنی مورد نظر از متن پیدا خواهد شد .) به h_{XY} نشان می دهیم . پس

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{P'A'_1 .h_{X'A'_1}}{P'B'.h_{B'C'}}, \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} = \frac{Q'A'.h_{C'A'}}{Q'B'_1 .h_{X'B'_1}} \qquad (**)$$

یادآور می شویم که $h_{X'A'_1}$ میان خط $\Delta X'A'_1A'$ است ، بنابراین $h_{X'A'_1} = (1/2)X'A'$.

هم چنین $h_{B'C'} = (1/2)B'_1C'$. باز از تشابه مثلث های $A'Q'X'$ و $B'_1Q'C'$ نتیجه می شود که

$\frac{A'X'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1}$ ولذا $\frac{h_{X'A'_1}}{h_{B'C'}}=\frac{X'A'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1}$

هم چنین ، با استدلالی مشابه به دست می آوریم

$$\frac{h_{C'A'}}{h_{X'B'_1}}=\frac{P'A'_1}{P'B'}$$

از قرار دادن این روابط در تساوی های (**)، به رابطه(*) می رسیم .

حال نقطه تلاقی $P'Q'$ را با ضلع $A'C'$ از $\Delta A'B'C'$ به Q'_1 نشان می دهیم . هم چنین فرض مــی کنــیم h_1 و h_2 و h_3 و h_4 طول های عمودهای مرسوم از نقطه های A'_1 و B' و A' و B'_1 بر خط $P'O'Q'_1$ باشند . چون $O'A'=O'A'_1$ ، از آنجا نتیجه می شود که $h_1=h_3$ و به طریق مشابه $h_2=h_4$. بنابراین

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'},\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'}$$

و بنابراین

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}$$

یا

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}} \qquad (***)$$

از مقایسه تساوی های(***) و(*) نتیجه می گیریم

$$\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}}$$

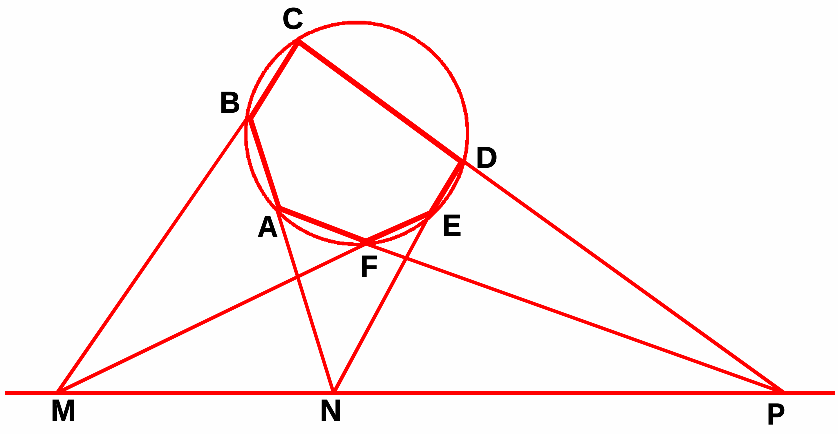
از اینجا نتیجه می شود که Q'_1 بر Q' منطبق است .

استدلالی مشابه ، نشان می دهد که R' بر خط $O'P'$ قرار دارد . لذا، P' و Q' و R' بر یک خط مار بر O' واقع اند،

و حکم مسئله نتیجه می شود.

۷ . قضیه پاسکال . نشان دهید که سه نقطه تقاطع اضلاع مقابل یک شش ضلعی محاط در یک دایره هم خط انـد

(شکل ۲۰) .



شکل۲۰

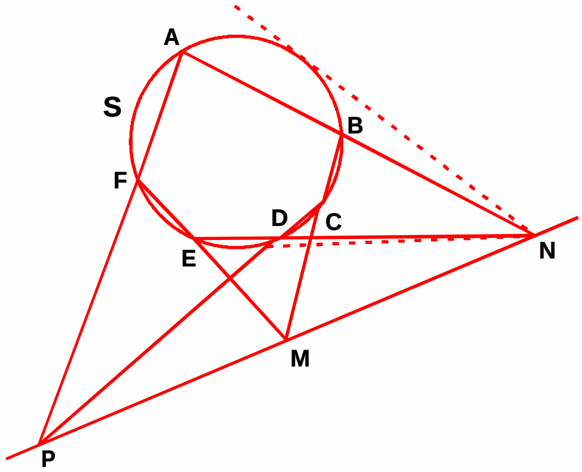
حل. فرض می کنیم M و N و P نقطه های تلاقی اضلاع مقابل شش ضلع محاطی $ABCDEF$ باشد (← شـکل

۲۰ و شکل ۲۱ الف) . چون نقاط تماس مماس های مرسوم از N بر S بر کمان های $\acute{AB}$ و $\acute{DE}$ قرار دارند ، از اینجا نتیجـه

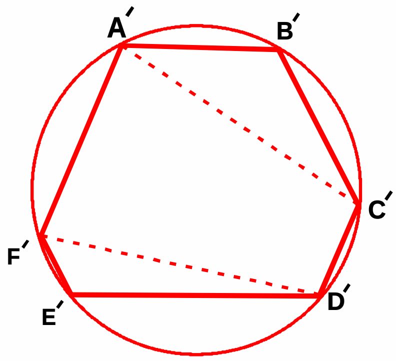
می شود که NM دایره S را نمی برد . بنابراین می توانیم صفحه شکل ۲۱ الف را بر یک صفحه π' تصویر کنیم به گونه ای

که S به یک دایره S' بدل شود، و NM به خط بینهایت π' . پس شکل ۲۱ الـف بـه شـکل ۲۱ ب بـدل مـی شـود کـه

$A'B' \| E'D'$ و $B'C' \| E'F'$. در نتیجه $\angle A'B'C' = \angle D'E'F'$ یعنی $A'\acute{B'}C' = D'\acute{E'}F'$. از اینجا نتیجه می شودکه



شکل۲۱(الف)



شکل۲۱(ب)

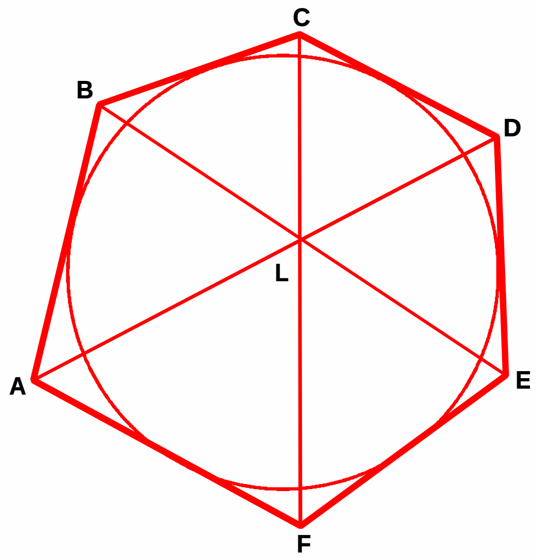
$$\angle F'A'C' + \angle D'C'A' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'E'F'}) + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{F'A'} + \overset{\frown}{D'E'F'})$$

$$= \frac{1}{2}(C'D' + \overset{\frown}{D'E'F'} + F'A' + \overset{\frown}{A'B'C'}) = 180^{0}$$

بنابراین $A'F' \| C'D'$ ، یعنی ، خط های $A'F'$ و $D'C'$ در یک نقطه در بینهایت یکدیگر را مـی برنـد . لـذا ، P' و M' و N' ، نقاط تقاطع اضلاع مقابل شش ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ هم خط اند.– بر یک خط بینهایت صـفحه π' قـرار دارند . در نتیجه ، نقطه های P و M و N در شکل ۲۱ الف نیز هم خط اند.

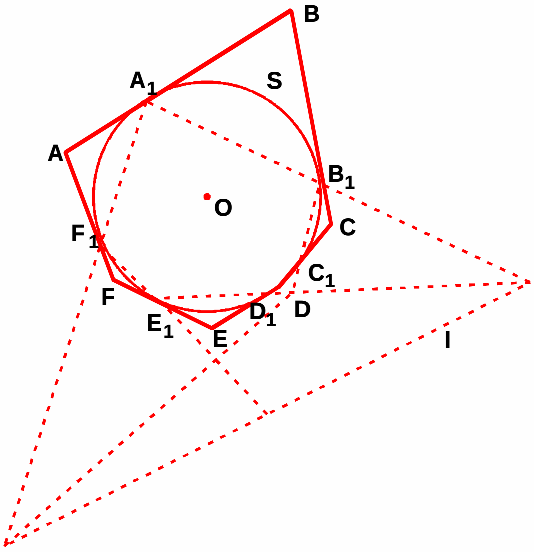
$C_1'D_1'$ عمود است . به طریقی کاملا مشابه می توانیم ثابت کنیم که خط های $B'E'$ و $C'F'$ از O' می گذرنـد . از اینجا نتیجه می شود که خط های AD و BE و CF متقارب اند.

۸. قضیه بریانشن . ثابت کنید که سه قطر واصل به راس های مقابل یک شش ضلعی محیط بر یک دایره متقارب‌اند (شکل ۲۲) .

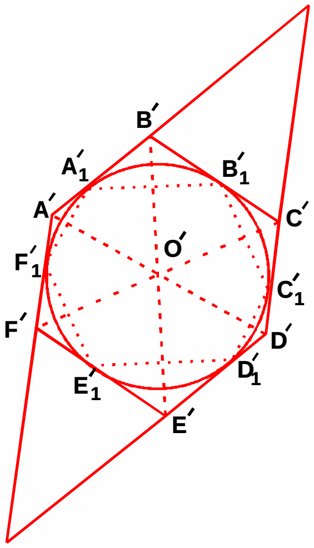


شکل۲۲

حل. شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ شکل ۲۳ الف در دایره S محاط شده است و لذا در شرایط قضیه پاسکال (مسئله ۷) صدق می کند . صفحه شکل ۲۳ الف را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به گونه ای که S به یک دایره S' بدل شود و خط l ، که نقاط تلاقی اضلاع مقابل شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را بر خود دارد ، به خط بینهایت صفحه π' بدل شود . برا ثر این تصویر $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، به شش ضلعی $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'$ بدل می شود که اضلاع مقابلش موازی‌اند (شکل ۲۳ ب) . حال مماس های $A'B'$ و $A'F'$ و $D'C'$ و $D'E'$ بر S' را در نظر می گیریم . چون $A_1'F_1' \| C_1'D_1'$ ، از اینجا نتیجه می شود که $A'D'$ یک محور تقارن چهار ضلعی حاصل از این مماس هاست . این محور از O' ، مرکز S' ، می گذرد و بر $A_1'F_1'$ و برخی احکام مربوط به پنج ضلعی ها ، چهار ضلعی ها و سه ضلعی های محیطی و محاطی حالت های خاص قضیه های بریانشن و پاسکال هستند. از این رو ، مثلا فرض می کنیم که راس F از شش ضلعی محاطی $ABCDEF$ بر دایره محیطی آن حرکت می کند و به نقطه E نزدیک شود .



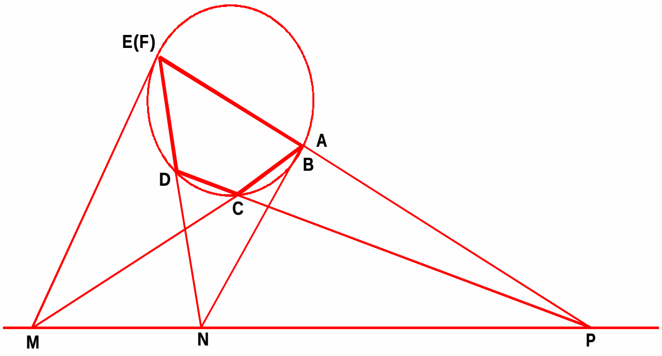
شکل ۲۳(الف)



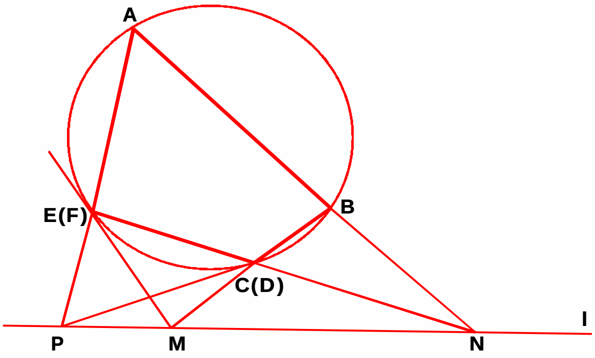
شکل ۲۳(ب)

در این صورت ضلع EF به سمت مماس بر دایره در E میل می کند و در حالت حد قضیه زیر به دست مـی آیـد :

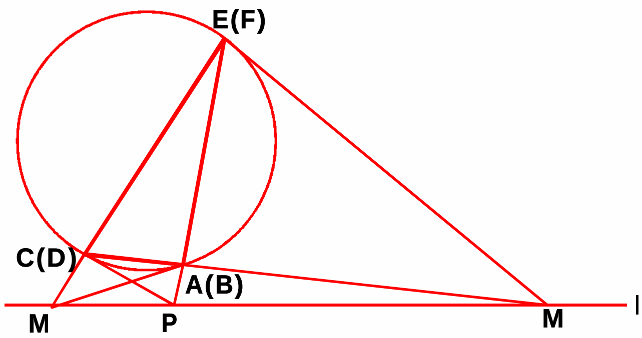
نقطه تلاقی ضلع BC از پنج ضلعی $ABCDE$ محاط در یک دایره و مماس بـر دایـره در E ، بـا نقـاط تلاقـی اضـلاع AB و DE ، CD و AE (شکل ۲۴ الف) هم خط اند . هم چنین اگر فرض کنیم که در شش ضلعی محـاطی $ABCDEF$ راس F بر E منطبق باشد و راس D بر C ، قضیه زیر به دست می آید : نقطه تلاقی اضلاع AB و CE از چهـار ضـلعی محاطی $ABCE$ با نقطه ای که BC مماس بر دایره در E را می برد و نقطه ای که AE مماس بر دایره در C را می برد سه نقطه هم خط اند (شکل ۲۴ ب) . اگر درشش ضلعی انطباق راس های F و E ، C و B ، را فرض کنیم ،بلافاصله می بینیم که نقطه تلاقی مماسهای بر دایره در راس های E و B از یک چهار ضلعی محاطی $ABDE$ با نقاط تلاقی اضلاع مقابل بـر یک خط واقع اند . روشن است که نقطه تلاقی مماس های مرسوم بر دایره در نقاط A و D نیز بر همان خـط قـرار دارد (شکل ۲۴ج) .



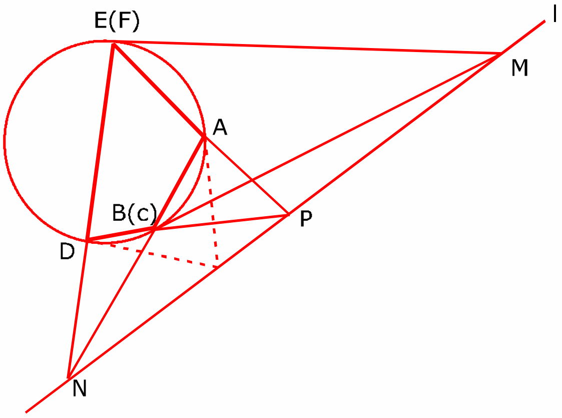
شکل۲۴(الف)



شکل۲۴(ب)



شکل۲۴(د)



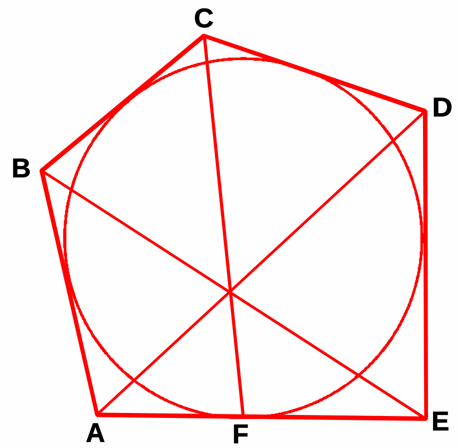
شکل۲۴(ج)

بالاخره فرض منطبق بودن راس های A و B، C و D ، E و F ، از یک شش ضلعی نتیجه مـی دهـد کـه : نقـاط تلاقی ضلع های مثلث ACE با مماس های مرسوم بر دایره محیطی آن در راس های مقابل ، هم خط اند (شـکل ۲۴ د) .

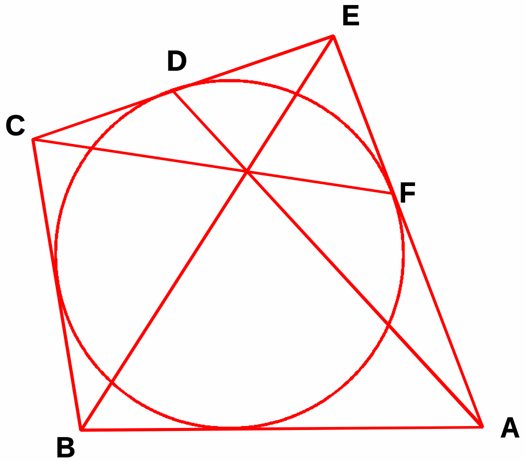
می توانستیم همه این قضایا را حالت های خاص قضیه پاسکال تلقی کنیم ، که در آنها طول های یک یا چند ضلـع صـفر شده اند و همه آنها را به روش قضیه پاسکال ثابت کنیم (ودر برخی موارد برهان بسیار ساده است) .

به همین طریق ممکن است تعدادی قضیه تازه از قضیه بریانشن استخراج کنیم . بدین منظور کافی ا ست که فقط فرض کنیم شش ضلعی محیطی یک یا چند زاویه 180^0 دارد . شکل های ۲۵ الف – د احکام چندی را به ذهن القا می‌کنند

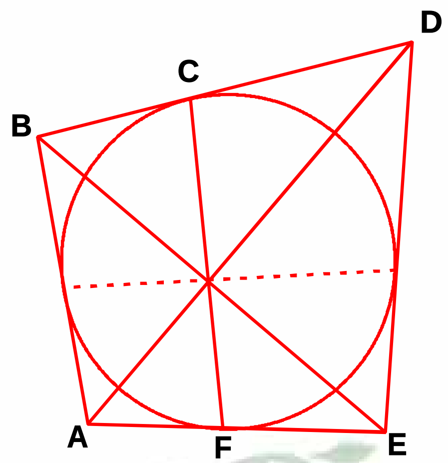
که بیان آنها را به عهده خواننده می گذاریم . (توجه دارید که قضیه های مندرج در شکل های ۲۵ ج و ۶۲۵ د بـا قـضیه های مسئله های ۱(الف) و ۲ (الف) یکی هستند.)



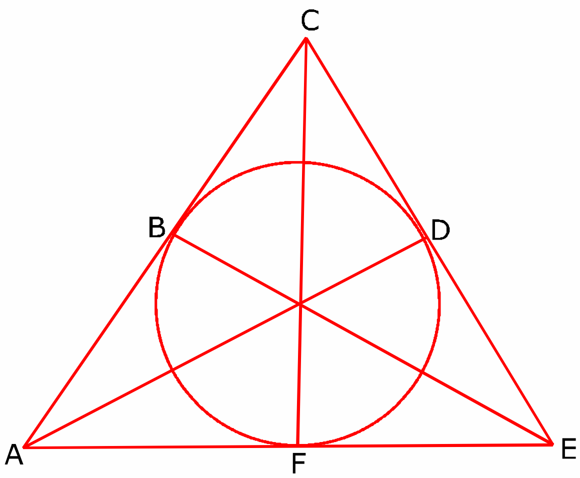
شکل۲۵(الف)



شکل۲۵(ب)



شکل۵(ج)



شکل۲۵(د)