رابطه ترتیبی در هیات اعداد مختلط

هموواره می‌توانیم اندازه دو عدد حقیقی را با هم مقایسه کنیم. یعنی در دو عدد مفروض $a,b \in \mathbb{R}$، یا $a > b$، یا $a = b$ و یا $b > a$. اما آیا می‌توان این قضیه را برای اعداد مختلط هم تعمیم داد؟ برای پاسخگویی به این سوال ابتدا رابطه ترتیبی در R را دوباره بررسی می‌کنیم.

P_1. (سه حالتی) به ازای هر عدد $(a \in R)$ فقط و فقط یکی از سه رابطه زیر برقرار است

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

به ازای جمیع مقادیر $a,b \in \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم:

$a > b$ ، اگر و فقط اگر $a - b > 0$

در این صورت P_1 هم ارز است با این حکم که به ازای جمیع مقادیر $a,b \in \mathbb{R}$ فقط و فقط یکی از سه رابطه زیر برقرار است

$$a > b, \quad a = b, \quad b > a$$

علاوه بر این رابطه ترتیبی در $\mathbb{R}$ در احکام زیرین صدق می نماید.

P_2. $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$

P_3. $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$

از اینجا نتیجه می‌شود که همه ویژگیهای رابطه ترتیبی در $\mathbb{R}$ مانند:

$a>b, b>c \Rightarrow a>c$

$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$

از قطعی بودن اصلهای موضوع P_3, P_2, P_1 نتیجه می‌شوند. به عبارت دیگر یک رابطه ترتیبی فقط هنگامی مفید واقع می‌شود که هر سه اصل موضوع P_3, P_2, P_1 برقرار باشند.

قضیه ۱. رابطه ترتیبی در $\mathbb{R}$ را می توان برای $\mathbb{C}$ چنان تعمیم داد که P_2, P_1 در آن برقرار باشد، ولی برقراری P_3 در آن ممکن نیست.

برهان. به ازای $\alpha = a+ib$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \text{یا} \\ a=0, b>0 \end{cases}$$

P_1. به ازای هر عدد مختلط $\alpha = a+ib$ ، $(a, b \in \mathbb{R})$، فقط باید یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$a>0$ و $a=0$ و $-a>0$

الف. اگر $a>0 \Rightarrow \alpha>0$

ب. اگر $-a>0 \Rightarrow -\alpha>0$

ج. اگر $a=0 \begin{cases} b>0 \Rightarrow \alpha>0 \\ b=0 \Rightarrow \alpha=0 \\ -b>0 \Rightarrow -\alpha>0 \end{cases}$

پس ثابت کردیم که به ازای هر مقدار $\alpha \in$ £ فقط و فقط یکی از احکام زیر برقرار است:

$-\alpha > 0$ و $\alpha = 0$ و $\alpha > 0$

P_2. فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ و $\alpha' > 0$ و

$\alpha = a + ib$ $\qquad \alpha' = a' + ib'$ $\qquad (a, b, a', b' \in$ ¡ $)$

پس

$a > 0$ **یا** $\{a = 0, b > 0\}$

$a' > 0$ **یا** $\{a' = 0, b' > 0\}$

باید همه ترکیبهای این حالتها را بررسی کنیم

الف. $a > 0, a' > 0 \Rightarrow a + a' > 0 \Rightarrow \alpha + \alpha' > 0$

ب. $a > 0, \{a' = 0, b' > 0\} \Rightarrow a + a' > 0 \Rightarrow \alpha + \alpha' > 0$

ج. $a' > 0, \{a = 0, b > 0\} \Rightarrow a + a' > 0 \Rightarrow \alpha + \alpha' > 0$

د. **بالاخره** $\{b > 0, a = 0\}$ **و** $\{b' > 0, a' = 0\}$ **، در این صورت** $a + a' = 0$ **و** $b + b' = 0$ **و لذا** $\alpha + \alpha' > 0$

P_3. فرض می‌کنیم رابطه ترتیبی در ¡ را برای £ چنان بسط داده باشیم که اصل P_3 رامحفوظ داشته باشد. بنابراین، چون $i \neq 0$،به موجب P_1 باید داشته باشیم: $i > 0$ یا $-i > 0$. اگر $i > 0$، بنابر P_3 باید داشته باشیم $i \cdot i > 0$ و این به معنی $-1 > 0$ و این ممتنع است. همین طور اگر $-i > 0$ ، باز بنا بر P_3 باید داشته باشیم $(-i) \cdot (-i) > 0$ که مجدداً به نتیجه ممتنع $-1 > 0$ می‌رسیم.

توجه. در عمل به راههای زیادی می‌توان رابطه ترتیبی در C را چنان تعریف نمود که P_1 و P_2 برقرار باشند. در اینجا ما راه ترتیب الفبایی قاموسی را اختیار نمودیم. در نتیجه برای اعداد غیر حقیقی (مختلط) نامساویهای نظیر $>$ یا $\geq$ را به کار نخواهیم برد.

حل. فرض می‌کنیم $\varphi = \arg(12+5i) = \arg 5/12$، چون $|12+5i| = 13$، اگر قرار دهیم $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$، آنگاه

$$r^5(\cos 5\theta + i\ \sin 5\theta) = 13(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$$

$$\therefore r = \sqrt[5]{13},\quad \theta = \frac{\varphi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\quad (k = 0,1,2,3,4)$$

در این صورت این ۵ ریشه راسهای یک پنج ضلعی منتظم محاط در دایره ای به مرکز مبدا مختصات هستند که یک راس آن در نقطه $\sqrt[5]{13}(\cos\varphi/5 + i\ \sin\varphi/5)$ واقع است.

مثال۵. فرض کنید $z = \cos 2\pi/5 + i\ \sin 2\pi/5$ پس، $z^5 = 1$ و $z \neq 1$ داریم

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

از تقسیم دو طرف بر $z^2\ (z^2 \neq 0)$، خواهیم داشت

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

یعنی

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

اما $z + \frac{1}{z} = 2\cos 2\pi/5$، پس خواهیم داشت

$$4cos^2\frac{2\pi}{5}+2cos\frac{2\pi}{5}-1=0 \quad \therefore cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

ولی $cos2\pi/5>0$، پس

$$cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

این نتیجه می‌رساند که یک پنج ضلعی منتظم را می توان با یک ستاره و پرگار ساخت.

آزمون. **مقدار دیگر $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ از کجا می آید؟ آیا اساساً این یک عدد بی معنی است که باید دور انداخت؟**