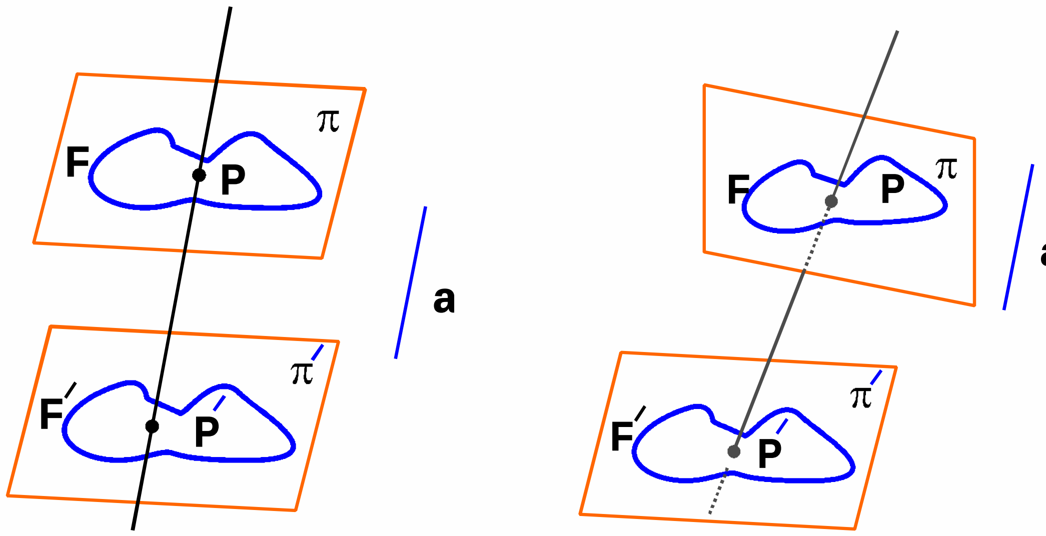
تصویر موازی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیل های آفین صفحه

گیریم π و π' دو صفحه متمایز (موازی یا متقاطع) باشند . منظور از تصویر موازی π بر π' در امتداد a نگاشتی است از π بر π' که به هر نقطه p از π، یک نقطه p' از π' را به گونه ای مربوط کند که خط pp' به موازات a باشد. (شکل ۱(الف) و(ب)) این نگاشت هر شکل F از صفحه π را به شکلی مانند F' در π' بدل می کند . نگاره (سایه) یک پنجره بر کف اطاق ، بر اثر تابش نور خورشید می تواند به عنوان نتیجه یک تصویر موازی انگاشته شود.



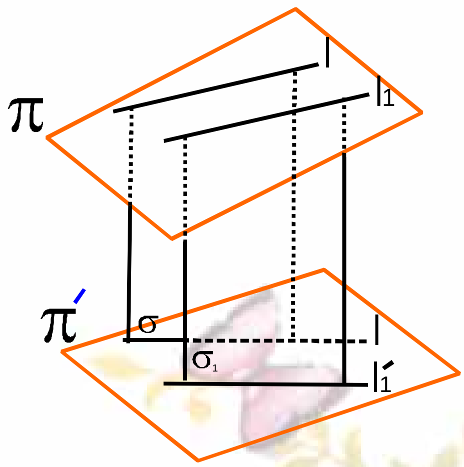
شکل۱(ب) شکل۱(الف)

هرگاه صفحات π و π' موازی باشند ، تصویر موازی ، یک شکل واقع در صفحه π را به شکلی قابل انطباق با آن در π' بدل می کند (در این حال تصویر موازی به یک انتقال در امتداد خط a در فضا بدل می شود ؛ شکل ۱ (الف)) . اگر صفحات π و π' موازی نباشند ، تصویر موازی ، شکل اصلی شکل ها را بیقواره می کند (شکل ۱ (ب) ؛ توجه خواننده را به بیقوارگی سایه های اجسام به هنگام طلوع و غروب خوشید جلب می کنیم.)

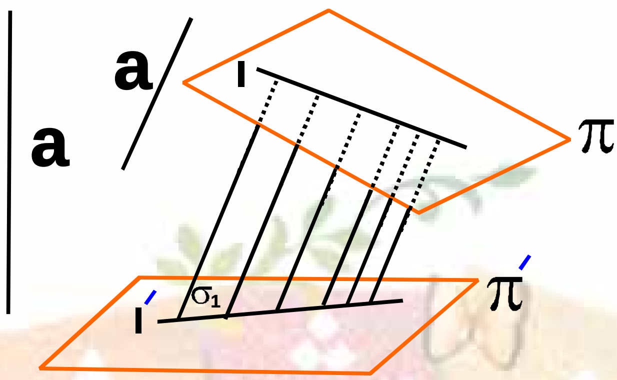
اغلب می توان با انتخاب تصویر موازی مناسب و در نظر گرفتن نگاره پیکربندیها بر اثر آن ، حل مسائل هندسی را ساده کرد . این بخش به این تکنیک حل مسائل تخصیص داده شده است . ولی ،ابتدا باید ویژگی های بنیادی تصویر موازی را بررسی کنیم.

الف. در تصویر موازی ، خطوط صفحه π بر خطوط صفحه π' نگاشته می شوند . زیرا خطوط موازی با a که از نقاط یک خط l از صفحه π رسم شوند، یک صفحه σ (مار بر l و موازی با a) تشکیل می دهند . در نتیجه نگاره l بر اثر تصویر موازی ، خط l' فصل مشترک صفحه σ با π' خواهد بود (شکل۲) . به عکس ، هرخط در π' نگاره خطی از صفحه π است.

ب. در تصویر موازی ، خطوط موازی به خطوط موازی بدل می شوند . زیرا هرگاه l و l' دو خط موازی واقع در صفحه π باشند، صفحات σ و σ_1 موازی با a و مار بر l و l' موازی اند. در نتیجه l و l'، فصل مشترکهای σ و σ_1 با π' ، موازی می شوند (شکل۳) .



شکل۳



شکل۲

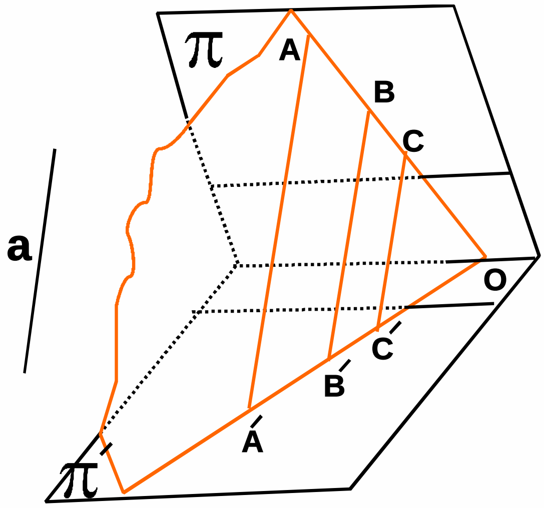
ج. در تصویر موازی ، نسبت طول های دو پاره خط هم خط محفوظ می ماند . این ، نتیجه بلافصل این قضیه

است که : خطوط موازی ، از اضلاع یک زاویه پاره خط های متناسب جدا می کنند . (← شکل ۴(الف) ؛ که $AB/BC = A'B'/B'C'$)

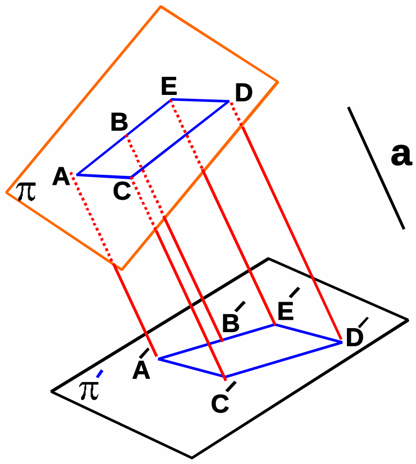
در تصویر موازی ، نسبت طول های دو پاره خط واقع بر دو خط موازی نیز محفوظ می ماند . زیرا فرض می کنیم AB و CD دو پاره خط در صفحه π باشند به طوری که $AB \| CD$ ، و فرض می کنیم E نقطه ای باشد بر AB چنانکه $ED \| AC$ (شکل ۴ب) . یک تصویر موازی متوازی الاضلاع $ACDE$ را به متوازی الاضلاع $A'C'D'E'$ بدل می کند . (زیرا پاره خط AB به پاره خط $A'B'$ ، و خطوط موازی به خطوط موازی بدل می شوند) . لذا (با توجه به اینکه در تصویر موازی نسبت طول های دو پاره خط همخط محفوظ می ماند) می بینیم که

$$\frac{CD}{AB} = \frac{AE}{AB} = \frac{A'E'}{A'B'} = \frac{C'D'}{A'B'}$$

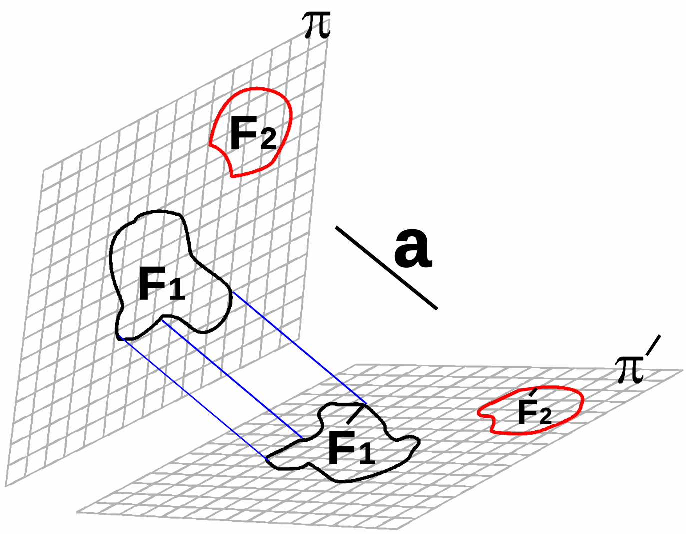
د. **در تصویر موازی ، نسبت بین مساحت های دو شکل مسطح محفوظ می ماند . برای اثبات این حکم ، در صفحه π شبکه ای از مربع های قابل انطباق با هم رسم می کنیم . ویژگی های (ب) و (ج) ایجاب می کند که تصویر موازی ، این شبکه از مربع ها را به شبکه ای از متوازی الاضلاع های قابل انطباق با هم، واقع در π' بدل می کند(شکل۵).**



شکل۴(الف)



شکل۴(ب)



شکل۵

گیریم F_1 و F_2 دو شکل در π و F'_1 و F'_2 نگاره های آنها در π' براثر یک تصویر موازی باشند . اگرمربع های شبکه به قدر کافی ریز باشند ، تفاوت نسبت تعداد مربع های داخل F_1 به تعداد مربع های داخل F_2 با نسبت S_1 / S_2 ی مساحت های شکل های F_1 و F_2 از هر عدد دلخواهی کوچکتر است * و نیز تفاوت نسبت تعداد متوازی الاضلاع های داخل F'_1 به تعداد متوازی الاضلاع های داخل F'_2 با نسبت S'_1 / S'_2 ی مساحت های F'_1 و F'_2 از هرعدد دلخواهی

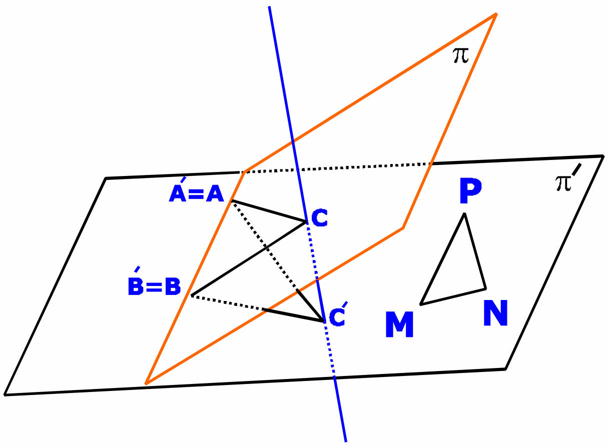
* S_1 / S_2 حد نسبت تعداد مربع های F_1 است به تعداد مربع های F_2 وقتی ضلع یک مربع در شبکه بی نهایت کوچک شود .

کوچکتر است . چون تعداد مربع های F_1 با تعداد متوازی الاضلاع های F_1' برابر است و تعداد مربـع هـای F_2 بـا تعـداد متوازی الاضلاع های F_2' ، در نتیجه $S_1 / S_2 = S_1' / S_2'$ ، و حکم ثابت می شود .

اکنون به اثبات قضیه بنیادی تصاویر موازی می پردازیم .

قضیه ۱ . گیریم A و B و C سه نقطه نا هم خط در یک صفحه π باشند و M و N و P سه نقطه نا هـم خـط در یک صفحه π' ، صفحات π و π' را می توان در فضا چنان قرار داد که برا ثر تصویری موازی از π بر π' ، مثلث ABC بـه مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث MNP بدل شود .

صفحات π و π' را چنان قرار می دهیم که فصل مشترک آنها بر AB قرار گیرد. حال در صفحه π' یک نقطـه C' طوری اختیار می کنیم که $\Delta ABC' \sim \Delta MNP$. لذا تصویر موازی مطلوب با خط CC' مشخص خواهد شد (شکل۶).



شکل ۶

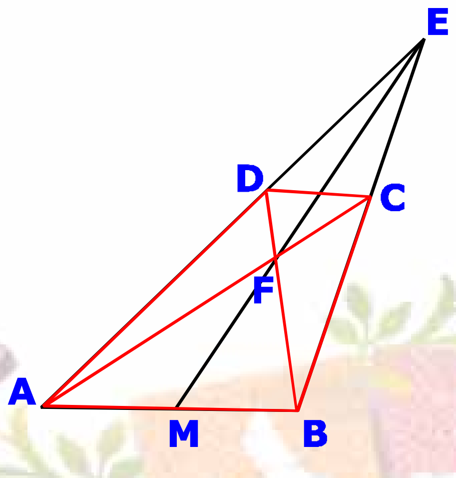
۱. ثابت کنید که سه میانه مثلث متقارب اند (یعنی هر سه در یک نقطه یکدیگر را می برند.)

حل. فرض می کنیم ABC مثلثی دلخواه در صفحه π باشد . برا ثر یک تصویر موازی مناسب π بر یک صفحه π' ، نگاره مثلث ABC یک مثلث متوازی الاضلاع $A'B'C'$ خواهد شد . به موجب ویژگی (ج) از تصویر موازی ، نگـاره هـای وسط های اضلاع مثلث ABC وسط های اضلاع مثلث $A'B'C'$ خواهند شد . چون مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع است

، میانه ها نیمساز های مثلث اند و لذا در یک نقطه ، مرکز دایره محاطی داخلی ، متلاقی اند . پس میانه های مثلث اصلی ABC متقارب اند .

۲. ثابت کنید که خط واصل بین نقطه تلاقی امتدادهای ساق های ذوزنقه و نقطه تلاقی قطرهای آن ، قاعده ذوزنقه را نصف میکند .

حل. فرض می کنیم $ABCD$ یک ذوزنقه باشد ، E نقطه تقاطع (امتدادهای) ساق هـای آن ، و F نقطـه تلاقـی قطرهای آن . بر اثر یک تصویر موازی مناسب صفحه πی ذوزنقه بریک صفحه π' ، نگاره مثلـث ABE مثلـث متـساوی الساقین $A'B'E'$ می شود . در عین حال به موجب ویژگی (ب) ی تصویر موازی ، ذوزنقه $ABCD$ به ذوزنقـه $A'B'C'D'$ بدل می شود (مطابق شکل ۷) . روشن است که $E'F'$ نگاره خط EF محور تقارن مثلث متساوی الساقین $A'B'E'$ است ، و لذا قاعده های $A'B'$ و $C'D'$ از ذوزنقه $A'B'C'D'$ را نصف می کند . به موجب ویژگی (ج) مربوط به تصویر موازی ، این مطلب را ایجاب می کند که خط EF قاعده های AB و CD از ذوزنقه اصلی $ABCD$ را نصف کند.

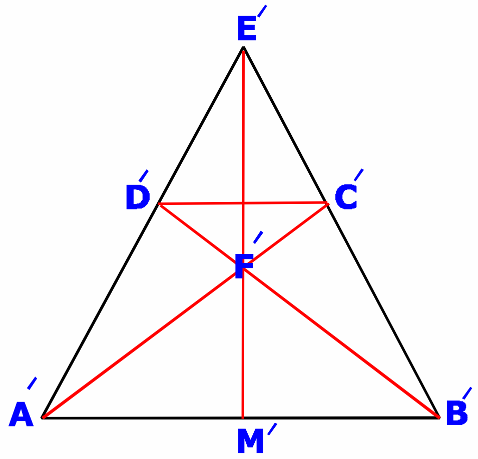


شکل۷(الف)

یادآور می شویم که بدین طریق می توانیم عکس قضیه بالا را هم ثابت کنیم ، هرگاه یک نقطه F از میانـه EM از

مثلث ABE را به راسهای A و B وصل کنیم تا اضلاع مثلث را در نقطه های D و C ببرند ، خط CD موازی AB است

(شکل ۷ ب نشان می دهد که وقتی مثلث ABE متساوی الساقین باشد ، CD موازی AB می شود).



شکل ۷(ب)

۳. فرض کنیم l و l_1 دو خط موازی در یک صفحه باشند .

الف. تنها با استفاده از ستاره ، پاره خط AB واقع بر l به دو قطعه مساوی تقسیم کنید.

ب. با استفاده از ستاره تنها، از نقطه مفروض خطی M به موازات l و l_1 رسم کنید.

حل .

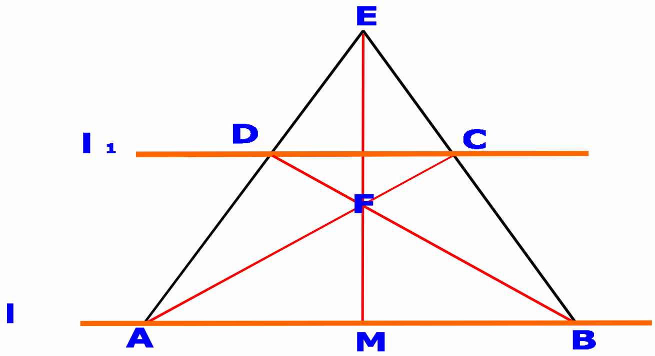
الف. در صفحه یک نقطه E را ناواقع بر l یا l_1 می گیریم و انرا به نقطه های A و B واقع بر l وصل می کنیم . گیریم C و D نقطه های تلاقی خط های EA و EB با خط l_1 باشند و F نقطه تلاقی خط های AC و BD (شکل ۸الف) . خط EF پاره خط AB را نصف می کند .(← مسئله ۲).

ب. دو نقطه A و B را بر l انتخاب ، و نقطه G وسط پاره خط AB را پیدا می کنیم (← قسمت (الف)) .

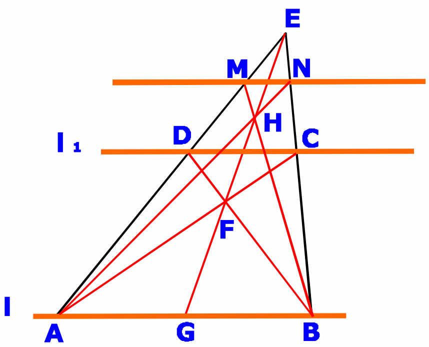
گیریم E نقطه ای بر خط AM باشد ، H نقطه تلاقی خط های EG و BM، و N نقطه تلاقی خط

های AH و BE (شکل ۸ ب) باشند . خط MN موازی مطلوب با l اســت ($\leftarrow$ توضــیح پــس از جــواب مسئله ۲).

[در ترسیم فوق ، مناسب است که برای پیدا کردن وسط AB و رسم خط موازی با l ،از همان مثلث ABE استفاده شود]



شکل۸(الف)



شکل۸(ب)

۴. گیریم سه نقطه M و N و P به ترتیب بر ضلعهای AB و BC و AC از مثلث ABC باشــند بــه قــسمی کــه $AM/MB = BN/NC = CP/PA$. نشان دهید که :

الف. نقطه تلاقی میانه های ΔMNP بر نقطه تلاقی میانه های ΔABC منطبق است .

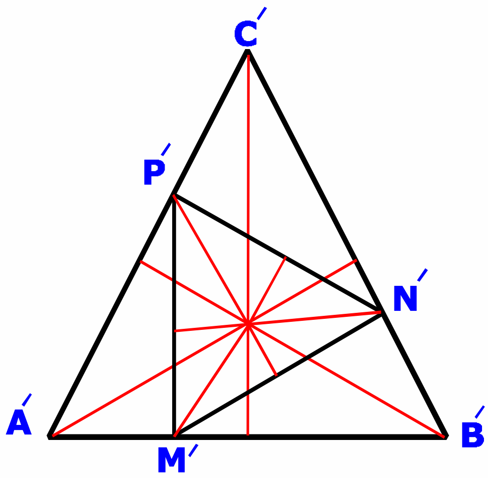
ب. نقطه تلاقی میانه های مثلث حاصل از خطوط AN و BP و CM بر نقطه تلاقی میانه های ΔABC منطبــق است .

حل .

الف. یک تصویر موازی مناسب ، مثلث ABC را بر مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ در یــک صــفحه π' مــی نگارد و نیز به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی ، این نگاشت نقــاط M و N و P را بــه نقــاط M' و N' و P' بدل می کند به طوری کــه $A'M'/M'B = B'N'/N'C' = C'P'/P'A'$ (مطــابق شــکل۹)

دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویه 120^0 ، اضلاع $A'B'$ و $B'C'$ و $C'A'$ را به ترتیب به اضلاع $B'C'$ و $C'A'$ و $A'B'$ بدل می کند ، و نقاط M' و N' و P' را به ترتیب به نقاط N' و P' و M' .

بنابراین دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویه 120^0 ، مثلث $M'N'P'$ را به خودش بدل می کند ؛ اما این بدین معنی است که مثلث اخیر متساوی الاضلاع است و مرکزش بر مرکز $\Delta A'B'C'$ منطبق است .



شکل۹

به عبارت دیگر ، نقطه تلاقی میانه های $\Delta M'N'P'$ بر نقطه تلاقی میانه های $\Delta A'B'C'$ منطبق است .

چون یک تصویر موازی یک مثلث را به میانه های نگاره اش بدل می کند ، نقطه تلاقی میانه های ΔMNP بر نقطه تلاقی میانه های ΔABC منطبق می شود .

ب. برهان مشابه با حل قسمت (الف).

۵. مثلث ABC داده شده است . نقطه M رادر داخل مثلث ABC چنان پیدا کنید که مثلث های ABM و BCM و CAM مساحت های مساوی داشته باشند .

حل. اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد ، روشن است که نقطه مطلوب M باید ازاضلاع ΔABC به یک فاصله باشد ؛ یعنی M مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC ، یا به گونه دیگر نقطه تلاقی میانه های مثلث ABC باشد. ازآنجا نتیجه می شود که در یک مثلث دلخواه ABC نقطه مطلوب M باید بر نقطه تلاقی میانه های آن منطبق باشد

۶. نقطه های A_1 و B_1 و C_1 به ترتیب بر ضلع های BC و CA و AB از یک مثلث ABC واقع اند به طوری که

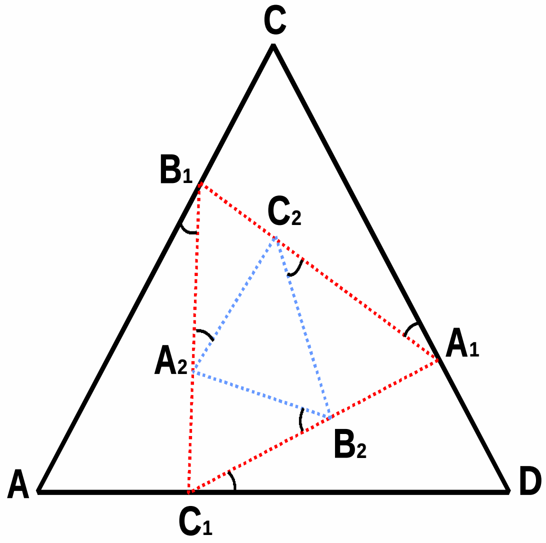
$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=K$$

به علاوه نقطه های A_2 و B_2 و C_2 به ترتیب بر اضلاع B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ واقع اند به طوری که

$$\frac{C_1A_2}{A_2B_1}=\frac{A_1B_2}{B_2C_1}=\frac{B_1C_2}{C_2A_1}=K$$

نشان دهید که مثلث $A_2B_2C_2$ با مثلث ABC متشابه است .

حل. اگر ABC مثلثی متساوی الاضلاع باشد (مطابق شکل۱۰)، اضلاع مثلث های ABC و $A_2B_2C_2$ موازی اند (چرا؟) ، یعنی این مثلث ها متجانس اند. از آنجا نتیجه می شود که در حالت کلی مثلث های ABC و $A_2B_2C_2$ مجانس یکدیگر و بنابراین متشابه اند.



شکل۱۰

۷. نقطه های K و L و M بر اضلاع مثلث ABC به مساحت ۱ واقع اند چنانکه این اضلاع را به نسبت های مفروض k_1 و k_2 و k_3 تقسیم می کنند . نشان دهید که مساحت مثلث KLM فقط به اعداد k_1 و k_2 و k_3 بستگی دارد و نه به این که کدام ضلع به چه نسبتی تقسیم شده است .

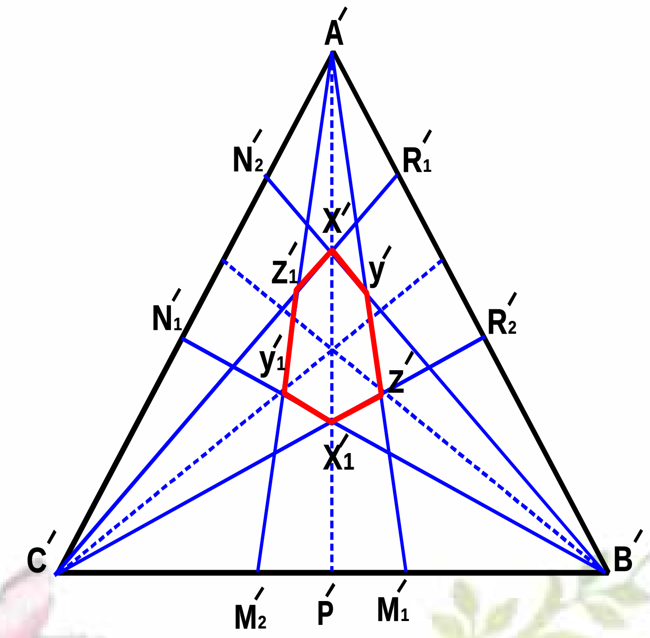
حل. معلوم است که قضیه برای یک مثلث متساوی الاضلاع درست است . از اینجا نتیجه می شود که برای یک مثلث دلخواه نیز درست است . (← مثلا حل مسئله ۱) .

۸. از هر یک از رئوس ΔABC دو خط چنان رسم می کنیم که ضلع رو به رو را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند . این شش خط یک شش ضلعی پدید می اورند . ثابت کنید قطرهایی که از راس های رو به رو ازاین شش ضلعی را به هم وصل می کنند در یک نقطه متقارب اند .

حل. کافی است که حکم خود را برای یک مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ ثابت کنیم (← راه حل های مسائل ۱و۴) . چون

$$A'R_1' = \frac{1}{3}(A'B') \text{ و } A'N_2' = \frac{1}{3}A'C'$$

(شکل۱۱) ، پس خط های $C'R_1'$ و $B'N_2'$ نسبت به محور تقارن $A'P'$ از $\Delta A'B'C'$ قرینه هستند، و بنابراین X' نقطه تقاطع این خط ها ، بر $A'P'$ قرار دارد . و نیز از تساوی های $B'R_2' = (1/3)B'A'$ و $C'N_1' = (1/3)C'A'$ نتیجه می گیریم که X_1' ، نقطه تقاطع خط های $B'N_1'$ و $C'R_2'$ هم بر آن محور قرار دارد . لذا قطر $X'X_1'$ از شش ضلعی ما بر محور تقارن $A'P'$ از مثلث $A'B'C'$ منطبق است . به همین طریق ثابت می کنیم که قطرهای $Y'Y_1'$ و $Z'Z_1'$ از شش ضلعی ما بر دو محور تقارن دیگر مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ منطبق اند . اما در آن صورت سه قطر مورد نظر بایستی در یک نقطه ، مرکز مثلث متساوی الاضلاع ، متلاقی باشند . از آنجا نتیجه می شود که قطرهای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 شش ضلعی در یک نقطه متلاقی اند .

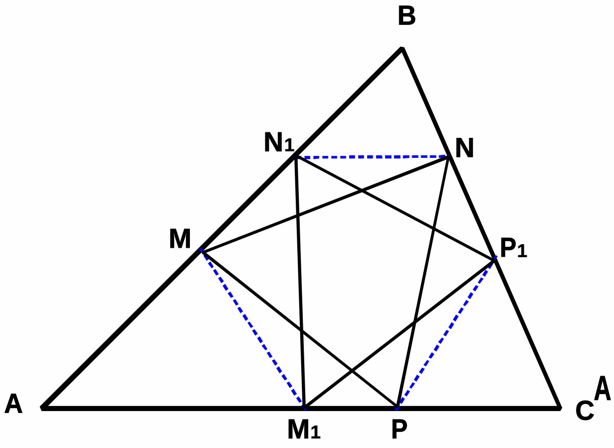


شکل۱۱

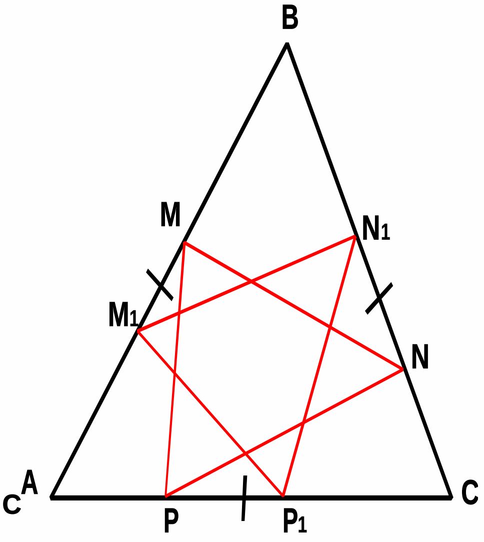
توجه. راه حل ما نشان می دهد که خط های XX_1 و YY_1 و ZZ_1 میانه های مثلث ABC هستند و نقطه تقاطع آنها نقطه تقاطع میانه هاست .

۹.نقطه های M و N و P به ترتیب بر اضلاع AB و BC و AC از مثلث ABC واقع اند ، نشان دهید که

الف. هر گاه M_1 و N_1 و P_1 به ترتیب قرینه های M و N و P نسبت به وسط های اضلاع AB و BC و AC باشند (شکل ۱۲الف) ، مثلث های MNP و $M_1N_1P_1$



شکل۱۲(الف)



شکل۱۲(ب)

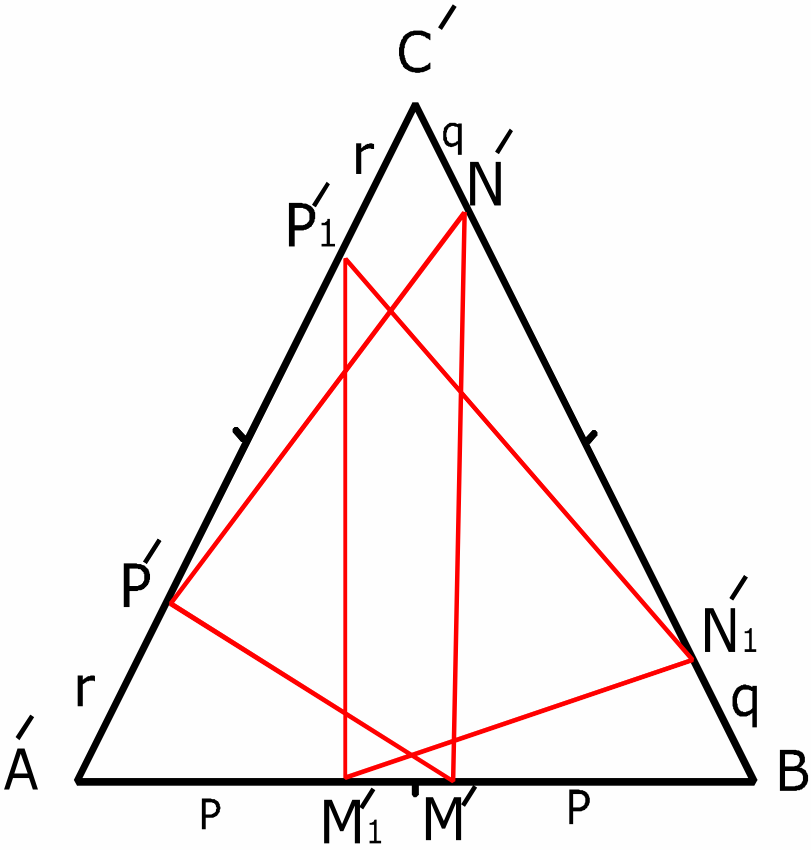
مساحت های مساوی دارند (به ویژه ،اگر نقطه هـای M و N و P هـم خـط باشـند ، نقطـه هـای M_1 و N_1 و P_1 نیز هم خط اند.)

ب. اگر M_1 و N_1 و P_1 به ترتیب بر اضلاع AC و BA و CB از مثلث ABC چنان باشند کـه $MM_1 \| BC$ و $NN_1 \| CA$ و $PP_1 \| AB$ (شکل ۱۲ب) ،مثلث های MNP و $M_1N_1P_1$ مساحت های مساوی دارند (بـه ویژه هر گاه نقطه های M و N و P هم خط باشند ، نقطه های M_1 و N_1 و P_1 نیز ، هم خط اند).

حل .

الف. به موجب ویژگی های (ج) و (د) از تصویر مـوازی ، کـافی اسـت قـضیه را بـرای یـک مثلـث متـساوی الاضلاع $A'B'C'$ ثابت کنیم (شکل ۱۳الف. ر. ک . راه حل های مسائل ۱و۴) . فرض می کنـیم P معـرف

اندازه پاره خط های $B'M'$ و $A'M'_1$ ، r معرف اندازه پاره خطهای $A'P'$ و $C'P'_1$; q اندازه پاره خطهای $C'N'$ و $B'N'_1$ و a اندازه یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ باشد. مساحت ΔXYZ را با S_{XYZ} نشان می دهیم.پس



شکل ۱۳(الف)

$$S_{A'B'C'} - S_{M'N'P'} = S_{A'P'M'} + S_{B'M'N'} + S_{C'N'P'}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 60^{0} [r(a-p) + p(a-q) + q(a-r)]$$

$$= \frac{1}{2} \sin 60^{0} [a(p+q+r) - (pq+qr+rp)]$$

و

$$S_{A'B'C'} - S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{A'P_1'M_1'} + S_{B'M_1'N_1'} + S_{C'N_1'P_1'}$$

$$= \frac{1}{2} sin 60^0 [(a-r)p + (a-p)q + (a-q)r]$$

$$= \frac{1}{2} sin 60^0 [a(p+q+r) - (pq+qr+rp)].$$

و بنابراین

$$S_{M'N'P'} = S_{M_1'N_1'P_1'}$$

ب. عیناً نظیر قسمت (الف) ، کافی است حکم را برای مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ (شکل ۱۳ب) اثبات کنیم . چون $M'M_1' \| B'C'$ و $N'N_1' \| C'A'$ و $P'P_1' \| A'B'$ ، از اینجا نتیجه می شود

$$A'M' = A'M_1', B'N' = B'N_1', C'P' = C'P_1'$$

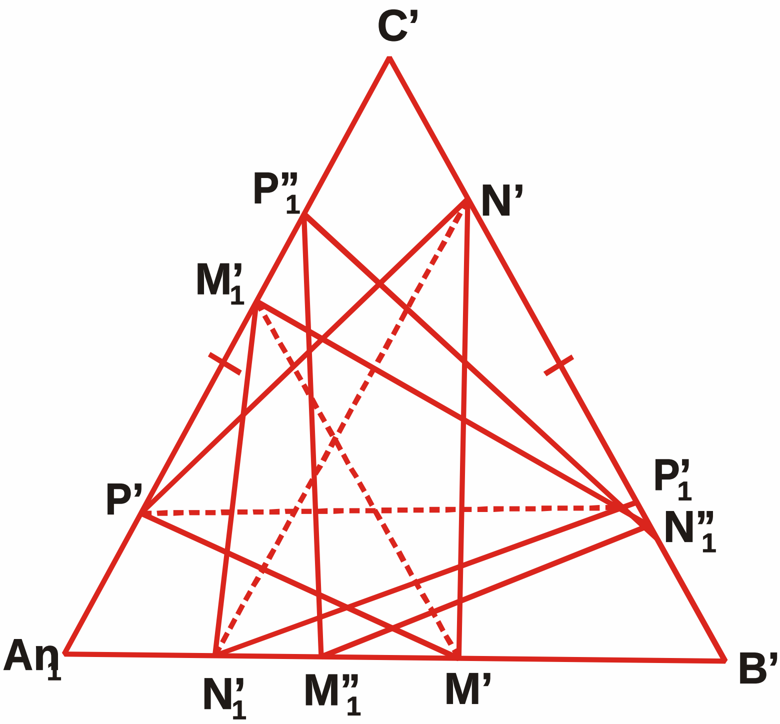
مثلث $A'B'C'$ را در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت حول خودش به زاویه 120^0 دوران می دهیم . این دوران $\Delta A'B'C'$ را به خودش بدل می کند و به موجب تساوی های بالا این دوران $\Delta M_1'N_1'P_1'$ را به $\Delta M_1''N_1''P_1''$ بدل می کند که راس های آن قرینه های راس های $\Delta M'N'P'$ نسبت به وسط های اضلاع هستند . این واقعیت و نتیجه ای که در قسمت (الف) در بالا استخراج کردیم ایجاب می کند که داشته باشیم :

$$S_{M_1''N_1''P_1''} = S_{M'N'P'}$$

و لذا

$$S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{M'N'P'}$$

تساوی مساحت های مثلث های $M'N'P'$ و $M_1'N_1'P_1'$ از راه محاسبه مستقیم ، مانند راه حل قسمت (الف) ، می‌توانیم به آسانی ثابت کنیم .



شکل ۱۳ ب

۱۰ . نقطه های M و N و P و M_1 و N_1 و P_1 مانند مسئله ۹(الف) انتخاب شده اند . نشان دهید که مساحت مثلثی به اضلاع AN و BP و CM با مساحت مثلثی با اضلاع AN_1 و BP_1 و CM_1 برابر است . (به ویژه هرگاه خطوط AN و BP و CM متقارب باشند ،خطوط AN_1 و BP_1 و CM_1 نیز متقارب اند.)

حل. راه حل این مسئله شبیه راه حل مسئله ۹ (الف) است . و به عهده خواننده گذاشته می شود .

۱۱.

الف. خط l بر M ،نقطه تلاقی سه میانه مثلث ABC ، می گذرد و ضلع های آن را در نقاط R و S و T می برد (R و S در یک طرف M قرار دارند .) نشان دهید :

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

ب. خط l بر راس M از متوازی الاضلاع $MNPQ$ می گذرد و خط هـای NP و PQ و NQ را بـه ترتیـب در نقاط R و S و T می برد . نشان دهید که

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

حل.

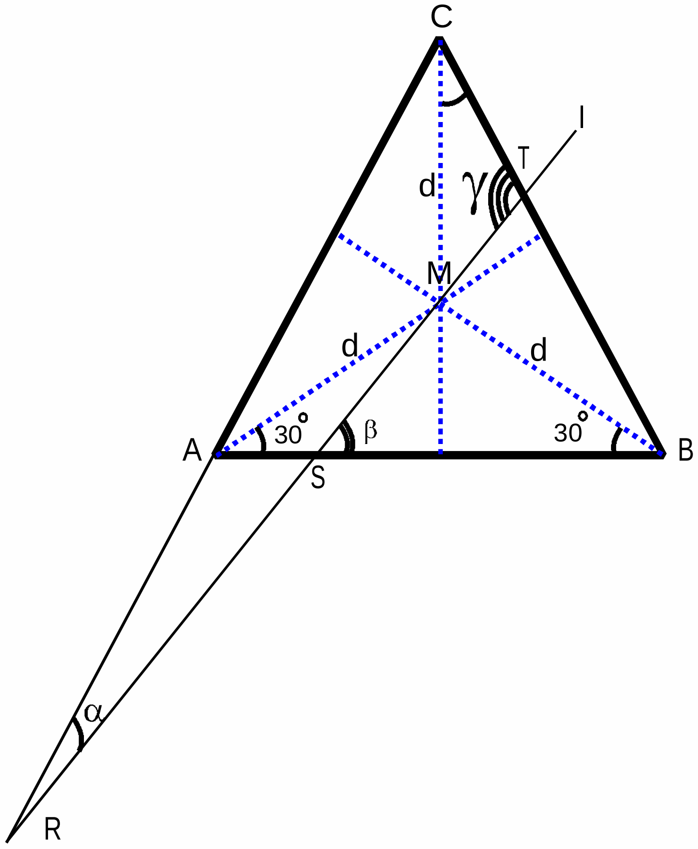
الف. فرض می کنیم ABC مثلثی متساوی الاضلاع باشد . شکل الف را درنظر می گیریم . با استفاده از قـانون سینوس ها در مثلث های AMR و BMS و CMT (وبا توجه به اینکه d برابر ۲/۳ میانه ΔABC اسـت) می بینیم که

$$\frac{d}{MR}=\frac{\sin\alpha}{\sin 150^{0}}=2\sin\alpha, \qquad \frac{d}{MS}=\frac{\sin\beta}{\sin 30^{0}=2\sin\beta}$$

$$\frac{d}{MT}=\frac{\sin\gamma}{\sin 30^{0}}=2\sin\gamma$$

لذا

$$\frac{1}{MT}=\frac{2}{d}\sin\gamma \text{ و } \frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{2}{d}(\sin\alpha+\sin\beta)$$



شکل۱۳(الف)

روشن است که $\alpha = 120^0 - \gamma$ **و** $\beta = \gamma - 60^0$ **. بنابراین**

$$sin\alpha + sin\beta = sin(120^0 - \gamma) + sin(\gamma - 60^0)$$

$$= sin(120^0 - \gamma) - sin(120^0 + \gamma)$$

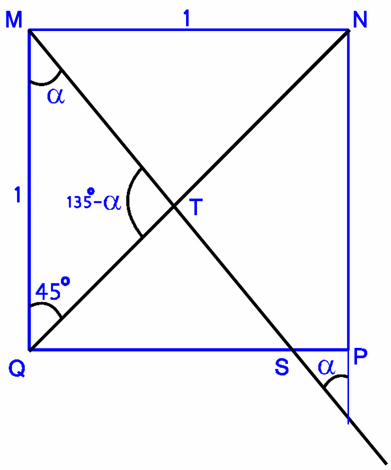
$$= -2cos120^0 sin\gamma = sin\lambda$$

یعنی در یک مثلث متساوی الاضلاع ABC **داریم** $1/MR + 1/MS = 1/MT$.

برای اینکه ببینیم آیا این رابطه برای یک مثلث دلخواه ABC **صحیح است یا نه ، ملاحظه می کنیم که رابطه اخیر با رابطه** $MT/MR + MT/MS = 1$ **، هم ارز است و همواره می توان مثلث متساوی الاضلاعی را به وسیله یک تصویر موازی خاص و مشابهت به هر مثلث قبلا مشخص شده ای بدل کرد .**

با استدلالی مشابه می توان نشان داد که هرگاه به جای M ، مثلا ، نقطه N وسط میانه AD را بگذاریم ، رابطه فوق به رابطه مشابهی با $1/MX$ (X معرف نقطه سه گانه R و S و T مربوط به ضلع BC از مثلث ABC است) بدل می شود که به جای آن $2/NX$ (و به جای $1/MY$ و $1/MZ$ مقادیر $1/NY$ و $1/NZ$) نهاده شده است .

ب. فرض می کنیم متوازی الاضلاع $MNPQ$ یک مربع واحد (شکل ب) باشد . پس در مثلث های MRN و MSQ و MTQ داریم



شکل ۱۳(ب)

پس

$$\frac{1}{MT}=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}$$

یعنی برای یک مربع $MNPQ$ داریم

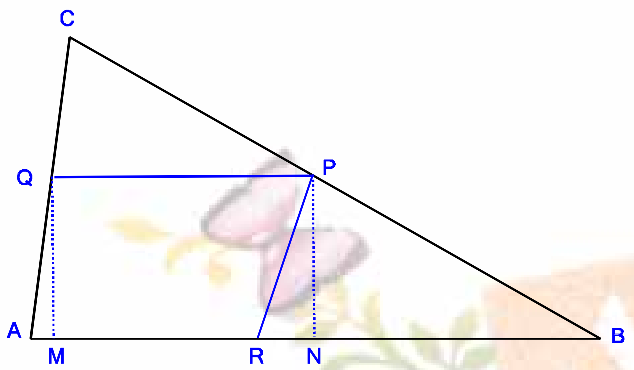
$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{1}{MT}$$

برای اینکه درستی این رابطه را برای یک متوازی الاضلاع دلخواه ببینیم ، ملاحظه می کنیم که این رابطه

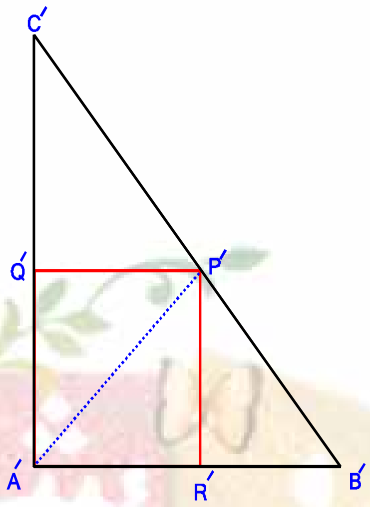
با رابطه $MT/MR+MT/MS=1$ هم ارز است و همواره می توان هر متوازی الاضلاع $ABCD$ را بـر اثر یک تصویر موازی مناسب به یک مربه بدل کرد (برای این کار کافی است ΔABC را به یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین بدل کنیم .)

۱۲. در مثلث ABC مستطیلی به مساحت σ محاط کنید که دو راس آن بر ضلع AB واقع باشند و دو راس دیگـر بر اضلاع CA و CB.

حل. مسئله ما با مسئله زیر هم ارز است : متوازی الاضلاع $ARPQ$ بـه مـساحت معـین σ را در مثلـث مفـروض ABC محاط کنید به طوری که هر دو شکل در یـک راس A مـشترک باشـند و راسـهای دیگـر متـوازی الاضـلاع بـر اضلاع AC و BC و AB ی مثلث قرار داشته باشند.این مسئله بلافاصله از شکل ۱۴الف نتیجه می شود ، که در آن متوازی الاضلاع $ARPQ$ و مستطیل $MNPQ$ دیده می شوند که مساحت های مساوی دارند(زیرا هر دو در قاعده PQ و ارتفاع QM مشترک اند .)



شکل۱۴(الف)



شکل۱۴(ب)

به عبارت دیگر اگربتوانیم متوازی الاضلاع $ARPQ$ را رسم کنیم ، آنگاه می توانیم مستطیل $MNPQ$ را نیز بسازیم .

اگر یک تصویر موازی ، ΔABC ازصفحه π را بر یک مثلث $A'B'C'$ از صفحه π' بنگارد ،آنگاه متوازی الاضلاع $ARPQ$ محاط در مثلث ABC بر یک متوازی الاضلاع $A'R'P'Q'$ محاط در یک مثلث $A'B'C'$ نگاشته می شود .[به همین دلیل است که مارسم مستطی $MNPQ$ را با رسم متوازی الاضلاع $ARPQ$ معاوضه کردیم : یک تصویر موازی در حالت کلی ، یک مستطیل را بر یک مستطیل نمی نگارد ، و این امر استفاده از یک تصویر موازی را برای حل مسئله اصلی دشوار می سازد.] فرض می کنیم که متوازی الاضلاع $ARPQ$ محاط شده باشد . مثلث ABC را بر اثر یک تصویر موازی مناسب بر یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $A'B'C'$ می نگاریم . (شکل ۱۴ ب) . می توانیم فرض کنیم که مثلث های ABC و $A'B'C'$ یک مساحت دارند (این کار را همواره می توان با استفاده از یک تشابه مناسب برای نگاره ΔABC انجام داد)؛ پس متوازی الاضلاع $ARPQ$ و $A'R'P'Q'$ (که البته ، چهارضلعی دومی یک مستطیل است) یک مساحت دارند . اگر S مساحت ΔABC باشد، آنگاه مساحت مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقین $B'R'P'$ و $C'P'Q'$ σ برابراست با $S-\sigma$. چون

$$S_{C'P'Q'}=\frac{1}{2}Q'P'^2 \text{ و } S_{B'R'P'}=\frac{1}{2}R'P'^2$$

پس خواهیم داشت :

$$P'P'^2+Q'P'^2=2(S-\sigma)$$

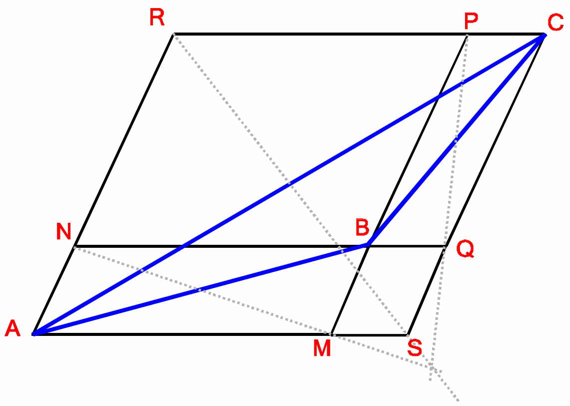
یا چون $P'P'^2+Q'P'^2$ برابر مربع قطر $A'P'$ از مستطیل $A'R'P'Q'$ است ، خواهیم داشت $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$.

این تحلیل ، ترسیم زیرراز مستطیل $MNPQ$ به ذهن متبادر می سازد : مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $A'B'C'$ با مساحت S ، مساوی مساحت مثلث مفروض ABC ، را رسم می کنیم (ضلع $A'B'$ در این مثلث برابر

واسطه هندسی قاعده وارتفاع ΔABC است .) سپس ، بر وتر $B'C'$ نقطه P' را چنان انتخاب می کنیم که $A'P' = \sqrt{2(S-\sigma)}$. بالاخره ضلع BC از مثلث مفروض ABC را به نسبت $BP / PC = B'P' / P'C'$ تقسیم می کنیم (ویژگی (ج) از تصویر موازی) . مستطیل $MNPQ$ (با راس Q بر ضلع AC و راس های M و N بر ضلع AB) مستطیل مطلوب است .

مسئله ممکن است یک یا دو جواب داشته باشد ، یا اصلاً جوابی نداشته باشد .

۱۳. اضلاع مثلث ABC قطرهای سه متوازی الاضلاعی هستند که ضلع های آنها بر یک امتدادند (شکل ۱۵) . نشان دهید که قطرهای دیگر این متوازی الاضلاع ها متقارب اند.



شکل۱۵

حل. گیریم π صفحه شکل ۱۵ باشد . گوییم که π می تواند بر اثر یک تصویر موازی بر صفحه π' نگاشته می شود به طوری که زاویه های AMN و ARS در شکل ۱۵ به زاویه های مساوی $A'M'N'$ و $A'R'S'$ بدل شوند و $R'A'M'$ قائمه باشد . در واقع ، برای اینکه نگاره های مثلث های $A'M'N'$ و $A'R'S'$ (مشترک در زاویه A') متشابه باشند (یعنی برای اینکه $< A'M'N' =< A'R'S'$) کافی است که اضلاع آنها متناسب باشند .

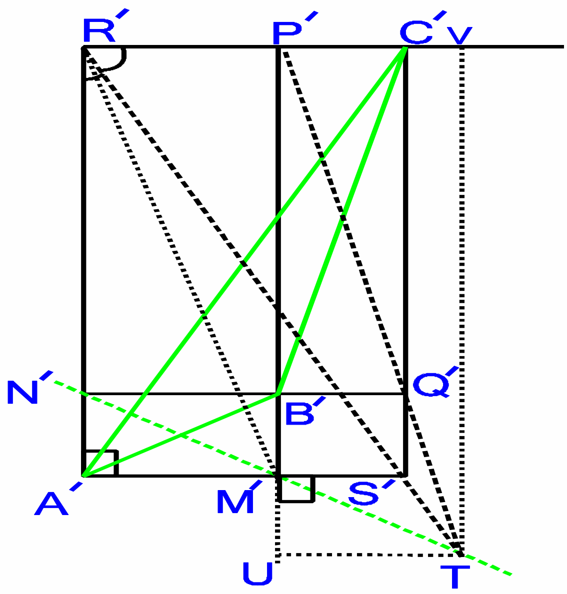
$$\frac{A'M'}{A'N'}=\frac{A'R'}{A'S'} \qquad (*)$$

چون نسبت های

$$\frac{A'N'}{A'R'}=\frac{AN}{AR}=\beta \quad \text{و} \quad \frac{A'S'}{A'M'}=\frac{AS}{AM}=\alpha$$

معلوم اند ، شرط کافی(*) با

$$\frac{A'M'}{\beta A'R'}=\frac{A'R'}{\alpha A'M'} \quad \text{یا} \quad \frac{A'M'}{A'R'}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$



شکل۱۵

هم ارز است. می توانیم ΔAMR را بر یک مثلث $A'M'R'$ تصویر کنیم چنانکه $A'M'/A'R'=\sqrt{\beta/\alpha}$ ، و $R'A'M'$ یک زاویه قائمه باشد ؛ و در نتیجه حکم ما ثابت می شود . این مطلب ما را به شکل ۱۵ می کشاند که باید ثابت کنیم T ، نقطه تلاقی $M'N'$ و $R'S'$ ، بر $P'Q'$ قرار دارد . این کار را بعداً انجام خواهیم داد .

از تشابه مثلث های $M'S'T$ و $R'N'T$ (که زاویه های مساوی دارند) به تساوی $M'T/R'T=M'S'/R'N'$

می‌رسیم و از تشابه مثلث های TUM' و TVR' ، که U و V پاهای عمودهای مرسوم از T بر $P'M'$ و $P'R'$ هستند، (در این مثلث های قائم الزاویه $< TM'U = 90^0 - < TM'S' = 90^0 - < TR'N' =< TR'V$) خواهیم داشت $TU / TV = M'T / R'T$. بنابراین

$$\frac{TU}{TV} = \frac{M'T}{R'T} = \frac{M'S'}{R'N'} = \frac{Q'B'}{Q'C'}$$

که تساوی $TU / TV = Q'B' / Q'C'$ ثابت می کند T بر خط $P'Q'$ قرار دارد .

۱۵.

الف. نقطه های A_1 و B_1 و C_1 و D_1 به ترتیب بر اضلاع CD و DA و AB و BC از متوازی الاضلاع $ABCD$ چنان واقع اند که

$$\frac{CA_1}{CD} = \frac{DB_1}{DA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BD_1}{BC} = \frac{1}{3}$$

نشان دهید که مساحت چهار ضلعی حاصل از خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 برابر یک سیزدهم مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ است .

ب. نقطه های A_1 و B_1 و C_1 و D_1 به ترتیب بر اضلاع BC و CA و AB از مثلث ABC هستند چنانکه

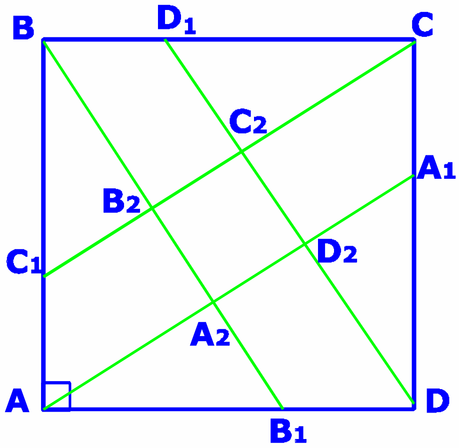
$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{3}$$

نشان دهید که مساحت مثلث حاصل از خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 برابر است با یک هفتم مساحت مثلث ABC .

حل.

الف. بدون تردید کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $ABCD$ یک مربع واحد باشد ($\leftarrow$ حل مسئله ۱۱(ب))

چهار ضلعی $A_2B_2C_2D_2$ که از چهار خط AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 تشکیل شده ($\leftarrow$ شکل ۱۶) یک مربع است . دلیل آن این است که ملاحظه می کنیم که یک دوران به زاویه 90^0 حول مرکز مربع ، نمودار را بر خودش منطبق می کند ، و همین ایجاب می کند که چهارضلعی $A_2B_2C_2D_2$ منــتظم باشــد . (در ضمن ؛ این امرایجاب می کند که اگر $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است $A_2B_2C_2D_2$ هم یک متــوازی الاضلاع باشد .) مثلث های قائم ازاویه ABB_1 و ABA_2



شکل۱۶

متشابه اند و نسبت تشابه آنها k ، برابر نسبت وترهای آنهاست :

$$k = \frac{BB_1}{AB} = \frac{\sqrt{1+(2/3)^2}}{1} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

چون

$$S_{ABB_1} = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

داریم

$$S_{ABA_2} = \frac{\frac{1}{3}}{k^2} = \frac{3}{13}$$

بنابراین

$$S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD} - S_{ABA_2} - S_{BCB_2} - S_{CDC_2} - S_{DAD_2}$$

$$= S_{ABCD} - 4S_{ABA_2} = 1 - \frac{12}{13} = \frac{1}{13}$$

یعنی

$$\frac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{13}$$

ب. راه حل اول . کافی است مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱ را در نظر بگیریم . مثلث $A_2B_2C_2$ (متشکل از خط های AA_1 و BB_1 و CC_1) متساوی الاضلاع است ، زیرا یک دوران ΔABC به زاویه 120^0 حول مرکزش ، $\Delta A_2B_2C_2$ را به خودش بدل می کند . برای یک مثلث متساوی الاضلاع ABC ، مثلث های CB_1C_2 و CAC_1 (رک . شکل ۱۷ ، که مطابق راه حل دوم تکمیل شده است) متشابه اند و k نسبت تشابه آنها برابر است با

$$k = \frac{CB_1}{CC_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{CK^2 + KC_1^2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{CA^2 - AK^2 + KC_1^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1 - (1/2)^2 + (1/6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

چون $S_{CAC_1} = \frac{1}{3} S_{ABC}$ ، پس داریم

$$S_{CB_1C_2} = \frac{1}{3} S_{ABC} . k^2 = \frac{1}{21} S_{ABC}$$

بنابراین

$$S_{A_2B_2C_2} = S_{ABC} - S_{CAC_1} - S_{ABA_1} - S_{BCB_1}$$

$$+S_{CB_1C_2} + S_{AC_1A_2} + S_{BA_1B_2}$$

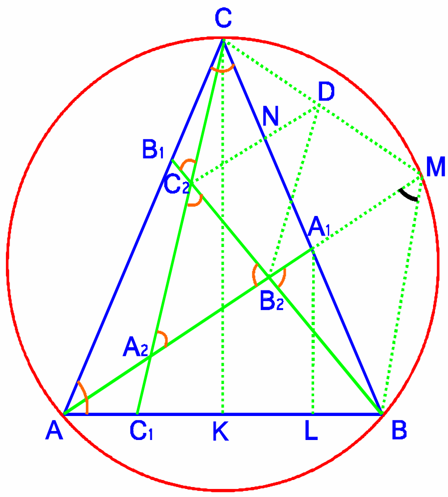
$$= S_{ABC} - 3S_{CAC_1} + 3S_{CB_1C_2}$$

$$= S_{ABC} - 3.\frac{1}{3}S_{ABC} + 3.\frac{1}{21}S_{ABC} = \frac{1}{7}S_{ABC}$$

یعنی

$$\frac{S_{A_2B_2C_3}}{S_{ABC}} = \frac{1}{7}$$

راه حل دوم . کافی است یک مثلث متساوی الاضلاع ABC در نظر بگیریم . چنانکه در راه حل اول نشان دادیم مثلث $A_2B_2C_2$ ، که از خط های AA_1 و BB_1 و CC_1 تشکیل می شود ، متساوی الاضلاع است . فرض می کنیم S دایره محیطی ΔABC باشد و M نقطه تلاقی S و AA_1 (شکل ۱۷) . تساوی $< BCA =< BMA$ (مقابل به یک کمان) ایجاب می کند که ΔBMB_2 هم متساوی الاضلاع باشد $(< BMB_2 =< BB_2M = 60^0)$ و $BM \| C_1C$. همچنین $BM = BB_2$ و $BB_2 = CC_2$ $(\Delta BB_2A_1 \cong \Delta CC_2B_1)$ ایجاب می کند که $BM = C_2C$ ، و لذا چهار ضلعی $BMCC_2$ متوازی الاضلاع باشد . حال از C_2 خطی به موازات MA_1 رسم می کنیم و نقطه تلاقی آن را با BC به N نشان می دهیم.



شکل ۱۷

چون $\Delta CC_2N \cong \Delta BMA_1$ ، از آنجا نتیجه می شود $BA_1 = NC$. این تساوی و این واقعیت که $BA_1 = (1/3)BC$ ، به ما اجازه می دهند که نتیجه بگیریم $BA_1 = A_1N = NC$.

برابری $B_1A_1 = A_1N$ ، برابری $BB_2 = B_2C_2$ را ایجاب می کند و بالاخره $\Delta BB_2M \cong \Delta A_2B_2C_2$.

اکنون می توانیم به آسانی مساحت $\Delta A_2B_2C_2$ را حساب کنیم . زیرا ، اگر B_2D میان خط متوازی الاضلاع $BMCC_2$ باشد، آنگاه

$$S_{B_2BM} = \frac{1}{2}S_{B_2BMD} = \frac{1}{4}S_{C_2BMC}$$

و چون $S_{BC_2C} = \frac{1}{2}S_{BMCC_2}$ ، پس

$$S_{A_2B_2C_2} = S_{B_2BM} = \frac{1}{2}S_{BC_2C}$$

اما

$$S_{ABC} = S_{BCC_2} + S_{CAA_2} + S_{ABB_2} + S_{A_2B_2C_2}$$

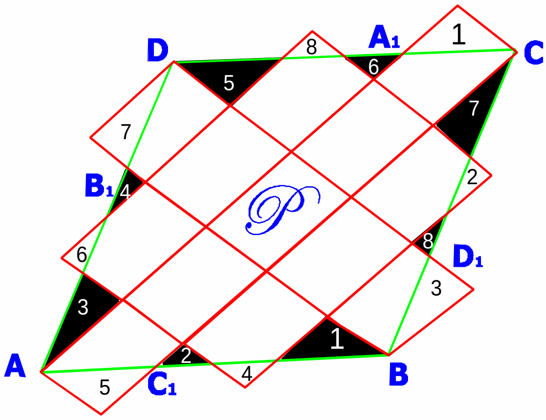
$$= 3S_{BCC_2} + S_{A_2B_2C_2} = 7S_{A_2B_2C_2}$$

ودر نتیجه

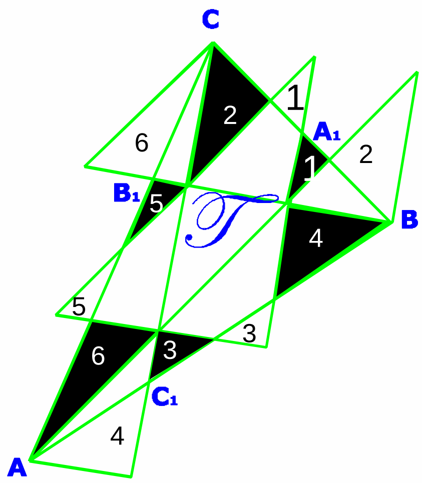
$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{7} S_{ABC}$$

که همین را می خواستیم ثابت کنیم .

یادداشت . ملاحظه می کنیم که رابطه های $BB_2 = B_2C_2$ ، $CC_2 = C_2A_2$ ، $AA_2 = A_2B_2$. که در مثلث متساوی الاضلاع صحیح است ، باید مشابه هایی در هر مثلث ABC داشته باشد .



(الف)



(ب)

۱۶. قضیه سوا را ثابت کنید. اگر نقطه های M و N و P به ترتیب بر اضلاع AB و BC و CA از مثلث ABC (ولی نه بر امتدادشان) واقع باشند ، و اگر

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

آنگاه خطوط AN و BP و CM متقارب اند.

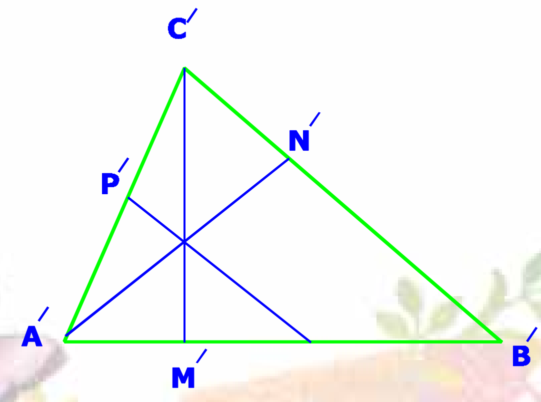
حل. در درس های هندسه دبیرستانی ثابت می کنند که در یک مثلث میانه ها ، ارتفاعات و نیمسازها ، سه تایی های متقارب تشکیل می دهند .

مسئله ما زمانی حل می شود که بتوانیم صفحه مثلث ABC را با یک تصویر موازی برصفحه دیگر بنگاریم به طوری که خط های AN و BP و CM به سه میانه ، سه نیمساز یا سه ارتفاع مثلث $A'B'C'$ ، نگاره مثلث ABC بدل شوند . روشن است که خط های AN و BP و CM نمی توانند به وسیله یک تصویر موازی بر میانه های یک مثلث نگاشته شوند ، مگر اینکه خود آنها میانه های ΔABC باشند . باز، همیشه ممکن نیست خط های AN و BP و CM را بر نیمساز های یک مثلث نگاشت . مانده است که نگاشت خط های AN و BP و CM را بر اثر تصویر موازی بر ارتفاعات یک مثلث ، امتحان کنیم .

ثابت می کنیم که هر گاه $A'N'$ و $B'P'$ و $C'M'$ ارتفاعات یک مثلث $A'B'C'$ باشند (شکل ۱۸الف) ، آنگاه

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1$$

چون از تشابه مثلث های قائم الزاویه $A'N'C'$ و $B'P'C'$ خواهیم داشت $C'P'/N'C'=a/b$ که $a=B'C'$ و $b=A'C'$. عیناً به همین طریق می توان نشان داد که $B'N'/M'B'=c/a$ و $A'M'/P'A'=b/c$ و $c=A'B'$. از ضرب این سه تساوی نتیجه می گیریم



شکل۱۸(الف)

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{A'M'}{P'A'}\cdot\frac{B'N'}{M'B'}\cdot\frac{C'P'}{N'C'}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

حال یک مثلث می سازیم چنانکه پاهای ارتفاعات آن N' و M' و P' ، اضلاع مثلث را به نسبت های مفروض زیر تقسیم کنند.

$$\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB},\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC},\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{CP}{PA}$$

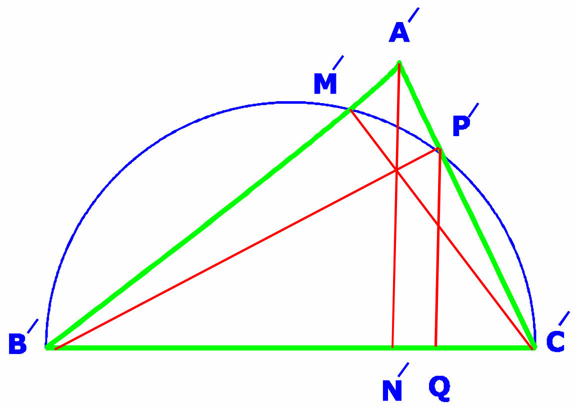
یک پاره خط دلخواه $B'C'$ را به نسبت $B'N'/N'C'=BN/NC$ تقسیم می کنیم . در N' عمودی بر $B'C'$ اخراج ، و سپس پاره خط $C'N'$ را به نسبت $C'Q/QN'=CP/PA$ تقسیم می کنیم . در Q عمودی بر $C'B'$ اخراج (شکل ۱۸ب) و فرض می کنیم P' نقطه تلاقی این عمود با نیم دایره به قطر $C'B'$ باشد و A' نقطه تلاقی $C'P'$ با عمود مرسوم بر $C'B'$ در N' . می گوییم $A'B'C'$ مثلث مطلوب است . زیرا $A'N'$ و $B'P'$ دو ارتفاع این مثلث هستند ، و اگر $C'M'$ سومین ارتفاع آن باشد ، چون داریم

$B'N'/N'C'=BN/NC$ و $C'P'/P'A'=C'Q/QN'=CP/PA$ و

$$\frac{A'M'}{M'B'}.\frac{B'N'}{N'C'}.\frac{C'P'}{P'A'}=1=\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}$$

آنگاه نتیجه می شود $A'M'/M'B'=AM/MB$.

حال ΔABC را به وسیله یک تصویر موازی بر روی مثلثی متشابه با $\Delta A'B'C'$ می نگاریم . به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی ، نقطه های N و P و M بر پاهای ارتفاعات نگاره ΔABC نگاشته می شوند ، و خط های AN و BP و CM بر ارتفاعات آن. چون سه ارتفاع یک مثلث متقارب اند ، پس خط های AN و BP و CM نیز متقارب خواهند شد .



شکل۱۸(ب)

یادداشت . اکنون به آسانی می توانیم بفهمیم عکس این گذاره را اثبات می کنیم : اگر سه خط که بر راسهای مثلثی می گذرند متقارب باشند ، آنگاه N و P و M ، نقاط تلاقی این خط ها با اضلاع ΔABC ، اضلاع را طوری تقسیم می کنند که

$$\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$$

زیرا فرض کنیم P_1 نقطه ای بر ضلع AC چنان باشد که

$$\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP_1}{P_1A}=1$$

لذا خط های AN و BP_1 و CM متقارب اند یعنی BP_1 از نقطه تلاقی AN و CM می گذرد . ولی این امر فقط زمانی ممکن است که BP_1 بر BP ، یعنی P بر P_1 منطبق باشد .

بدین ترتیب به قضیه زیر ، که اغلب قضیه سوا نامیده می شود می رسیم ، گیریم N و P و M نقاطی بر اضلاع ΔABC (نه بر امتدادشان) باشند . شرط لازم وکافی برای اینکه خط های AN و BP و CM متقارب باشند این است که داشته باشیم.

$$\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$$

تاکنون همواره فرض کرده ایم که دو صفحه πو π' متمایزند . به همین دلیل است که در این بخش از نگاشت های یک صفحه π بر یک صفحه π' صحبت کردیم ، نه از تبدیل های یک صفحه بر روی خودش.

حال تبدیلی از صفحه π بر خودش را در نظر می گیریم که از حرکت π در فضا و نگاشت آن بر اثر تصویری موازی بر وضعیت اول خود نتیجه می شود . این تبدیل را یک نگاشت موازی صفحه بر خودش می نامیم . هر طول پایی حالت خاصی از این تبدیل صفحه است . یک تصویر موازی صفحه بر خودش یک طول پایی است به شرطی که وضع جدید صفحه در فضا با وضع اولیه اش موازی باشد .

ویژگی (الف) از تصویر موازی ایجاب می کند که بر اثر تصویر موازی یک صفحه بر خودش خط به خط بدل شود . یک تبدیل یک به یک از صفحه بر خودش که خط را به خط بدل کند یک تبدیا آفین نامیده می شود . طول پایی ها و تشابهات یک صفحه ساده ترین مثال برای تبدیل آفین هستند . تصویر موازی یک صفحه بر خودش تبدیل آفینی کلی تر از طول پایی ها و تشابهات است . زیرا نیاز به حفظ نسبت طول های پاره خط ها ندارد و از این رو ، در حالت کلی ریخت یک شکل را دگرگون می کند .

ازاینجا نتیجه می شود که هر تبدیل آفین از یک صفحه اساساً یک تصویر موازی از آن صفحه است بر خودش . زیرا که قضیه زیر صادق است :

قضیه ۲. هر تبدیل آفین از یک صفحه می تواند بر اثر یک تصویر موازی از صفحه بر خودش و متعاقب آن یک تشابه تحقق یابد .

این قضیه نشان می دهد که مطالعه ویژگی های تبدیل آفین با مطالعه ویژگی های مشترک بین تصویر موازی یک صفحه بر خودش و تشابهات مترادف است ؛ به ویژه این امر ایجاب می کند که تبدیلهای آفین یک صفحه ویژگی های (ب) و(ج) و(د) را داشته باشند ، زیرا این ها ویژگی هایی هستند که بین تصاویر موازی یک صفحه بر خودش و تشابهات مشترک اند .و نیز قضیه ۲ ماهیت حاصلضرب دو یا چند تصویر موازی صفحه بر خودش را روشن می سازد ؛ یعنی نشان

می دهد یک چنین حاصلضربی مجدداً یک تصویر موازی صفحه بر خودش و احتمالاً متعاقب آن یک تشابه است (زیرا چنین حاصلضربی ، روشن است که یک تبدیل آفین از صفحه است .)

قضیه ۲ نتیجه ای از قضیه ۱ و قضیه زیر است :

قضیه ۳. یک تبدیل آفین منحصر به فرد از صفحه وجود دارد که ۳ نقطه نا هم خط A و B و C را به سه نقطه نا هم خط A' و B' و C' بدل می کند.

اگر قضیه ۳ را اثبات شده فرض کنیم ، قضیه ۲ بلافاصله آن نتیجه می شود زیرا ، چون فقط یک تبدیل آفین وجود دارد که مثلث مفروض ABC را به مثلث مفروض $A'B'C'$ بدل می کند ، این تبدیل باید با تصویر موازی صفحه بر خودش و تشابه بعدی که مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ بدل می کند منطبق باشد (این نکته که یک تصویر موازی و یک تشابه وجود دارد از قضیه ۱ نتیجه می شود). می ماند اثبات قضیه ۳ .

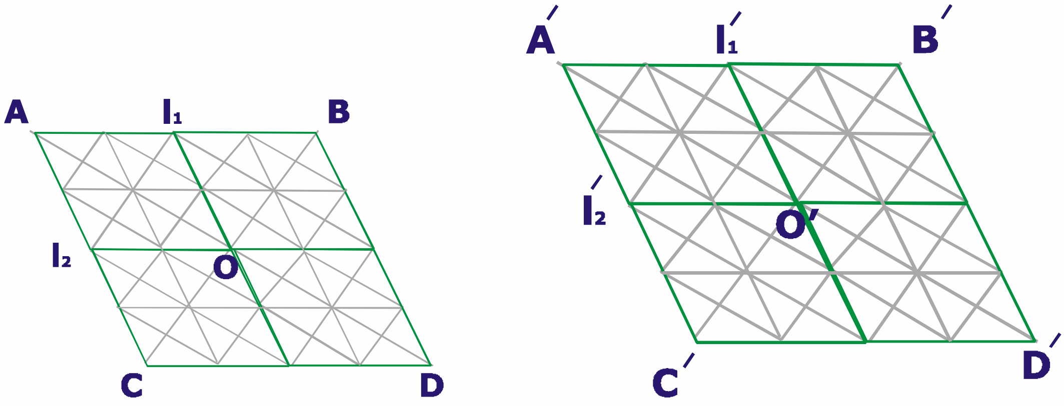
روش اثبات به قرار زیر است . فرض کنید که در یک تبدیل آفین ، سه نقطه A و B و C به سه نقطه مفروض A' و B' و C' بدل شده است . باید نشان دهیم که این تبدیل آفین ، M' نگاره یک نقطه دلخواه M از صفحه را مشخص می کند . ابتدا باید یک عده نقطه هایی را که نگاره هایشان می توانیم پیدا کنیم ، به دست آوریم ؛ سپس از این گونه نقطه ها بیشتر و بیشتر و باز هم بیشتر پیدا خواهیم کرد . بدین ترتیب در صفحه یک مجموعه چگال از نقطه ها به دست خواهیم آورد که نگاره های آنها بر اثر تبدیل آفین مورد نظر می توانیم بسازیم . از این رو به ازای هر نقطه M از صفحه نقطه هایی از این مجموعه به قدر دلخواه نزدیک به M وجود خواهند داشت . وانگهی می توانیم هر نقطه M را داخل یک چند ضلعی به دلخواه کوچک بگنجانیم که راس هایش متعلق به مجموعه نقطه هایی باشند که نگاره هایشان معین شده اند . در نتیجه هر چند ضلعی از این گونه به چند ضلعی معینی بدل ، و از آنجا نتیجه می شود که M' ، نگاره نقطه M هم معین می شود . و این همان چیزی است که به اثباتش پرداخته بودیم.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه باید مجموعه نقاط مذکور در بالا را بسازیم . از ویژگی زیر از تبدیل آفین

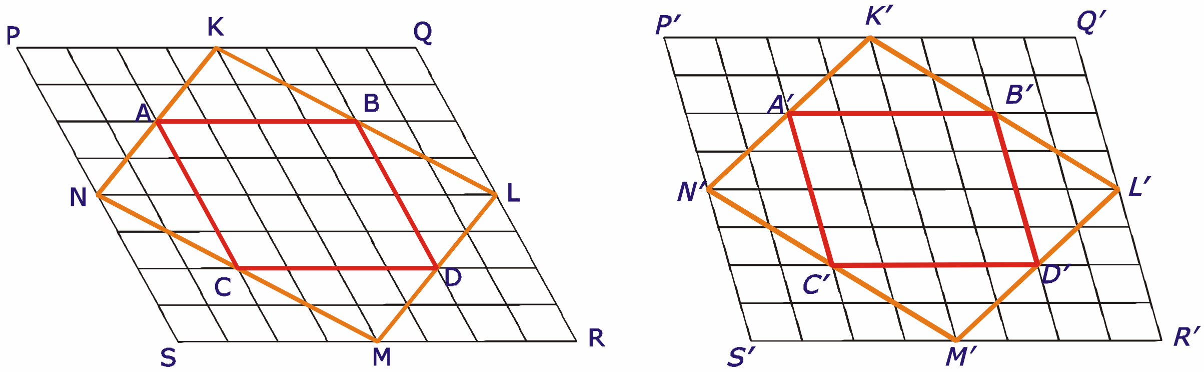
استفاده می کنیم : <u>یک تبدیل آفین خط های موازی را به خط های موازی بدل می کند</u> . اگر به عکس ، نگاره های دو خط موازی l و m دو خط متقاطع باشند، آنگاه پیشنگاره نقطه تلاقی آنها می باید به هر دو خط l و m متعلق باشد که غیر ممکن است .

گیریم l_1 معرف خط AB باشد و l_2 معرف خط AC . تبدیل ما l_1 رابه l'_1 بدل می کند که از نقطه های A' و B' می‌گذرد و l_2 رابه l'_2، که از نقطه های A' و C' می گذرد . فرض می کنیم خط CD بر C بگذرد .و با l_1 موازی باشد و خط BD بر B بگذرد و با l_2 موازی باشد (شکل الف) . چون در یک تبدیل آفین خط های موازی به خط های موازی بدل می شوند ، CD به خطی بدل می شود که از C' می گذرد و با l'_1 موازی است ، BD به خطی بدل می شود که از B' می‌گذرد و با l'_2 موازی است ، و D به نقطه تقاطع این دو خط D' بدل می شود . لذا متوازی الاضلاع $ABCD$ در شکل الف، به متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ بدل می شود ، و نقطه O محل تلاقی قطرهای AD و BC ازمتوازی الاضلاع $ABCD$ ، به نقطه O' محل تلاقی قطرهای $A'D'$ و $B'C'$ از $A'B'C'D'$. حال میان خط های چهار ضلعی $ABCD$ – خط هایی که از O به موازات l_1 و l_2 رسم می شوند – را در نظر می گیریم . نگاره های آنها خط هایی هستند که از O' به موازات l'_1 و l'_2 می گذرند، یعنی میان خط های $A'B'C'D'$ هستند . به عبارت دیگر نقطه های تلاقی میان خط ها $ABCD$ ی با l_1 و l_2 به نقطه های وسط اضلاع $A'B'C'D'$ بدل می شوند .

بعد با هر یک از چهار متوازی الاضلاعی که از میان خط های متوازی الاضلاع $ABCD$ پدید می آید همان گونه عمل می کنیم که با $ABCD$ عمل کردیم . با ادامه این عمل (شکل الف) یک شبکه متوازی الاضلاع در داخل $ABCD$ پدید می آید که تبدیل آفین مورد بحث آ نر ا به یک شبکه متوازی الاضلاع در داخل $A'B'C'D'$ بدل می کند ،و نقاط شبکه $ABCD$ را به نقاط شبکه متناظرش در $A'B'C'D'$ بدل می کند . با تکرار این عمل، به قدر کافی زیاد می توانیم اضلاع متوازی الاضلاع شبکه خود را به دلخواه کوچک ، و لذا شبکه را به دلخواه چگال کنیم .



شکل الف



شکل ب

حال از نقاط A و D خط هایی به موازات BC و از نقاط B و C خط هایی به موازات AD رسم می کنیم .نگاره های آنها بر اثر تبدیل آفین مورد بحث خط هایی هستند که از A' و D' به موازات $B'C'$ و از نقطه های B' و C' به موازات $A'D'$ رسم می شوند . بدین ترتیب یک متوازی الاضلاع $KLMN$ به دست می آوریم که مساحتش دو برابر مساحت $ABCD$ است. ، و نگاره آن متوازی الاضلاع معلوم $K'L'M'N'$ است . با تکرار این شیوه عمل ، یک متوازی الاضلاع $PQRS$ به دست می اوریم که مساحتش چهار برابر مساحت $ABCD$ است و اضلاعش با اضلاع $ABCD$ موازی اند (شکل ب) و نگاره اش متوازی الاضلاع $P'Q'R'S'$ است ، و غیره .

از ترکیب این دو شیوه عمل خود (رسم متوازی الاضلاع هایی بزرگتر و بزرگتر ، و متوازی الاضلاع هایی کوچکتر و

کوچکتر ، که نگاره ها در داخل آنها معلوم اند) می توانیم بر اثر تبدیل آفین خود یک مجموعه چگال از نقاط صـفحه بـا نگاره های معلوم به دست آوریم ، همان گونه که از آغاز شروع کرده بودیم.