

مسأله آپولونیوس

مسأله ترسیم دیگری که از دیدگاه جبری خیلی ساده است، مسأله معروف «تماسها»ی آپولونیوس است. در بحث حاضر ضرورتی ندارد که روش خیلی زیبایی برای ترسیم پیدا کنیم. چیزی که در اینجا اهمیت دارد این است که علی‌الاصول می‌توان این مسأله را فقط به وسیله خط‌کش و پرگار حل کرد.

فرض کنیم مرکزهای سه دایره مفروض دارای مختصات $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ و شعاعهای آنها، به ترتیب، r_1, r_2, r_3 باشند. مرکز و شعاع دایره مطلوب را به ترتیب با (x, y) و r نشان می‌دهیم. حال برای به دست آوردن شرط اینکه دایره مطلوب بر سه دایره مفروض مماس باشد، توجه می‌کنیم که فاصله بین مرکزهای دو دایره مماس برابر است با مجموع یا تفاضل شعاعها، برحسب اینکه دایره‌ها مماس خارجی باشند یا داخلی. از اینجا، معادله‌های

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \quad (1)$$

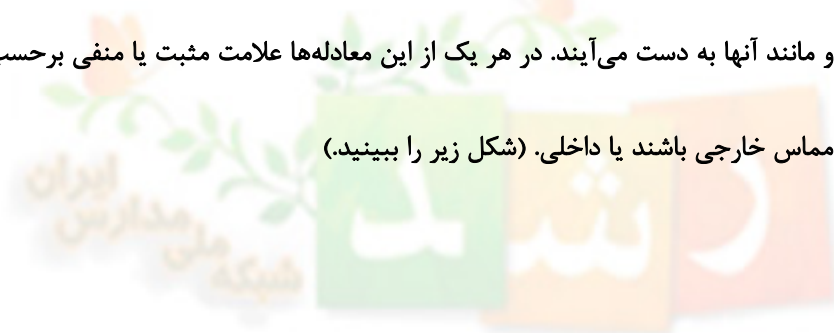
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0 \quad (2)$$

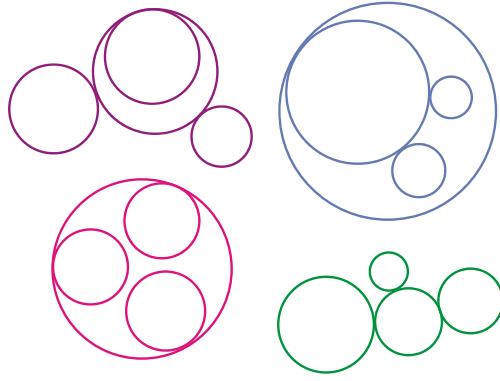
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0 \quad (3)$$

یا

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0 \quad (1 - الف)$$

و مانند آنها به دست می‌آیند. در هر یک از این معادله‌ها علامت مثبت یا منفی برحسب این تعیین می‌شود که دایره‌ها مماس خارجی باشند یا داخلی. (شکل زیر را ببینید.)





دایره‌های آپولونیوس

معادله‌های (۱) و (۲) و (۳) سه معادله درجه دوم برحسب سه مجهول x و y و z هستند با این ویژگی که جمله‌های درجه دوم در سه معادله یکسان هستند و این موضوع از صورت بسط یافته (۱) یعنی (۱ - الف) پیداست. از اینجا، با کم کردن (۲) از (۱) معادله‌ای خطی برحسب x ، y و z به دست می‌آوریم:

$$ax + by + cz = d \quad (۴)$$

که در آن، $a = 2(x_2 - x_1)$ و غیره. به همین نحو، با کم کردن (۳) از (۱) معادله خطی دیگری به دست می‌آوریم

$$a'x + b'y + c'r = d' \quad (۵)$$

با حل (۴) و (۵) نسبت به x و y برحسب r و سپس جایگذاری در (۱) معادله درجه دومی برحسب r به دست می‌آوریم که با عملهای گویا و گرفتن ریشه دوم قابل حل است. این معادله در حالت کلی دو جواب دارد که فقط یکی از آنها مثبت است. پس از یافتن r از این معادله، x و y را از دو معادله خطی (۴) و (۵) به دست می‌آوریم. دایره به مرکز (x, y) و شعاع r ، مماس بر سه دایره مفروض خواهد بود. در تمام این فرایندها فقط از عملهای گویا و استخراج ریشه دوم استفاده کرده‌ایم. نتیجه می‌گیریم که x ، y و r را می‌توان فقط با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

در حالت کلی هشت جواب برای مسأله آپولونیوس وجود دارد که متناظر با $2 \times 2 \times 2 = 8$ ترکیب ممکن علامتهای + و - در معادله‌های (۱)، (۲)، و (۳) هستند، و هر یک از این ترکیبها نیز مربوط است به یکی از حالت‌های ممکن دایره مطلوب، از لحاظ مماس خارج یا داخل بودن با هر یک از سه دایره مفروض. ممکن است روش جبری ما عملاً مقادیری حقیقی برای x ، y و r به دست ندهد. این حالت مثلاً وقتی پیش می‌آید که سه دایره مفروض هم‌مرکز باشند و بنابراین هیچ جوابی برای این مسأله هندسی وجود نداشته باشد. همچنین باید انتظار جوابهای «تباهیده» را هم داشته باشیم؛ مثلاً وقتی سه دایره مفروض تباهیده شده به صورت سه نقطه روی یک خط در می‌آیند، دایره آپولونیوس نیز تباهیده شده به شکل این خط در می‌آید.

