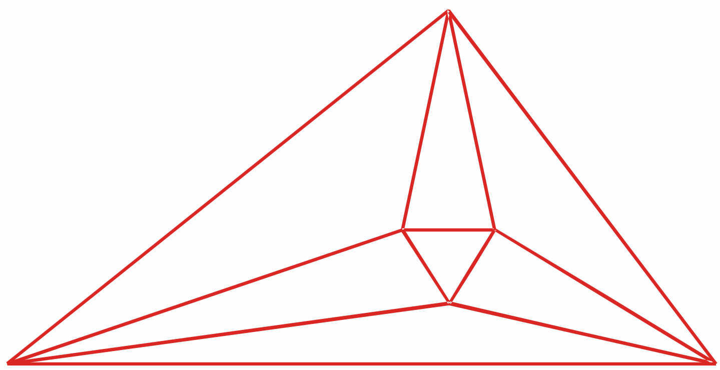
قضیه مورلی

قضیه زیر را فرانک مورلی (۱۸۶۰ – ۱۹۳۴) در اوایل این سده کشف کرده و مطمئناً یکی از زیباترین قضایای ریاضی است.

قضیه ۱. (مورلی). نقاط تلاقی خطوط مجاور به هر ضلع از خطوطی که هر زاویه مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنند، راسهای یک مثلث متساوی الاضلاع اند.



شکل۱

پیش از شروع به اثبات این قضیه به لم زیر نیاز داریم:

لم۱. فرض کنید t_4, t_3, t_2, t_1 چهار نقطه بر دایره نه نقطه باشند. پس (امتداد) وترهای واصل بین نقاط t_2, t_1 و نیز t_4, t_3 در نقطه

$$z=\frac{\bar{t}_1+\bar{t}_2-\bar{t}_3-\bar{t}_4}{\bar{t}_1\bar{t}_2-\bar{t}_3\bar{t}_4}$$

یکدیگر را قطع می کنند.

برهان. می‌دانیم معادلات خطوطی که از نقاط t_2, t_1 و نیز از نقاط t_4, t_3 می‌گذرند به ترتیب عبارت اند از :

$$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2, \qquad z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4,$$

پس فصل مشترک این دو خط نقطه زیر خواهد شد

$$z = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \bar{t}_3 - \bar{t}_4}{\bar{t}_1 \bar{t}_2 - \bar{t}_3 \bar{t}_4}$$

برهان قضیه. بی‌آنکه خللی در کلیت وارد آید، می توان فرض کرد که ΔABC در دایره واحد محاط شده و راس A از آن در نقطه ۱ است. فرض می کنیم

$$\angle AOB = 3\gamma \quad \left(0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\angle AOC = 3\beta \quad \left(-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0\right),$$

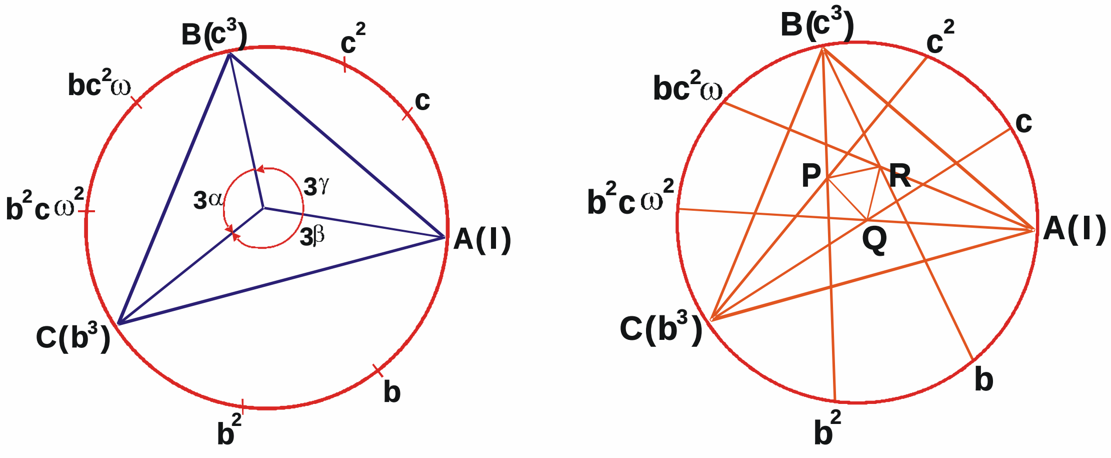
$$\angle BOC = 3\alpha \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0\right).$$

پس شناسه هایی که کمان $\overset{\frown}{BC}$ را (که حاوی نقطه A نیست) به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند عبارت اند از

$$\alpha + 3\gamma = \beta + 2\gamma + \frac{2\pi}{3}$$

و

$$2\alpha + 3\gamma = 2\beta + \gamma + \frac{4\pi}{3}$$



شکل۲

بنابراین اگر نقاطی که $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{AB}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند به ترتیب c^2, c و نیز $b^2 .b$، بگیریم، مقادیرنقاط b^3, c^3, C, B خواهند شد،ونقاطی که $\overset{\frown}{BC}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم میکنند با b^2cw^2, bc^2w (که در آن $w^2+w+1=0$) مشخص می شوند.

فرض می کنیم $R(v), Q(\mu), P(\lambda)$ به ترتیب نقاط تلاقی ثلث سازهای زوایای B و C, C و A, A و B باشند. پس بنابر لم فوق

$$\lambda = \frac{b^{-2}+c^{-3}-b^{-3}-c^{-2}}{b^{-2}c^{-2}-b^{-3}c^{-2}} = \frac{bc^3+b^3-c^3-b^3c}{b-c}$$

$$= \frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)-bc(b^2-c^2)}{b-c} = (b^2+bc+c^2)-bc(b+c)$$

$$\mu = \frac{1+b^{-2}c^{-1}w^{-2}-b^{-3}-c^{-1}}{b^{-2}c^{-1}w^{-2}-b^{-3}c^{-1}} = \frac{b^3c+bw-c-b^3}{bw-1}$$

$$= \frac{c(b^3-1)-b(b^2-w)}{w(b-w^2)} = w^2\{(b^2+bw^2-w)-b(b+w^2)\},$$

$$v=\frac{1+b^{-1}c^{-2}w^{-1}-b^{-1}-c^{-3}}{b^{-1}c^{-2}w^{-1}-b^{-1}c^{-3}}=\frac{bc^3+cw^2-c^3-b}{cw^2-1}$$

$$=\frac{b\left(c^3-1\right)-c\left(c^2-w^2\right)}{w^2\left(c-w\right)}=w\left\{b\left(c^2+cw+w^2\right)-c\left(c+w\right)\right\}.$$

$$\therefore \lambda+w\mu+w^2v=b^2+bc+c^2-b^2c-bc^2$$

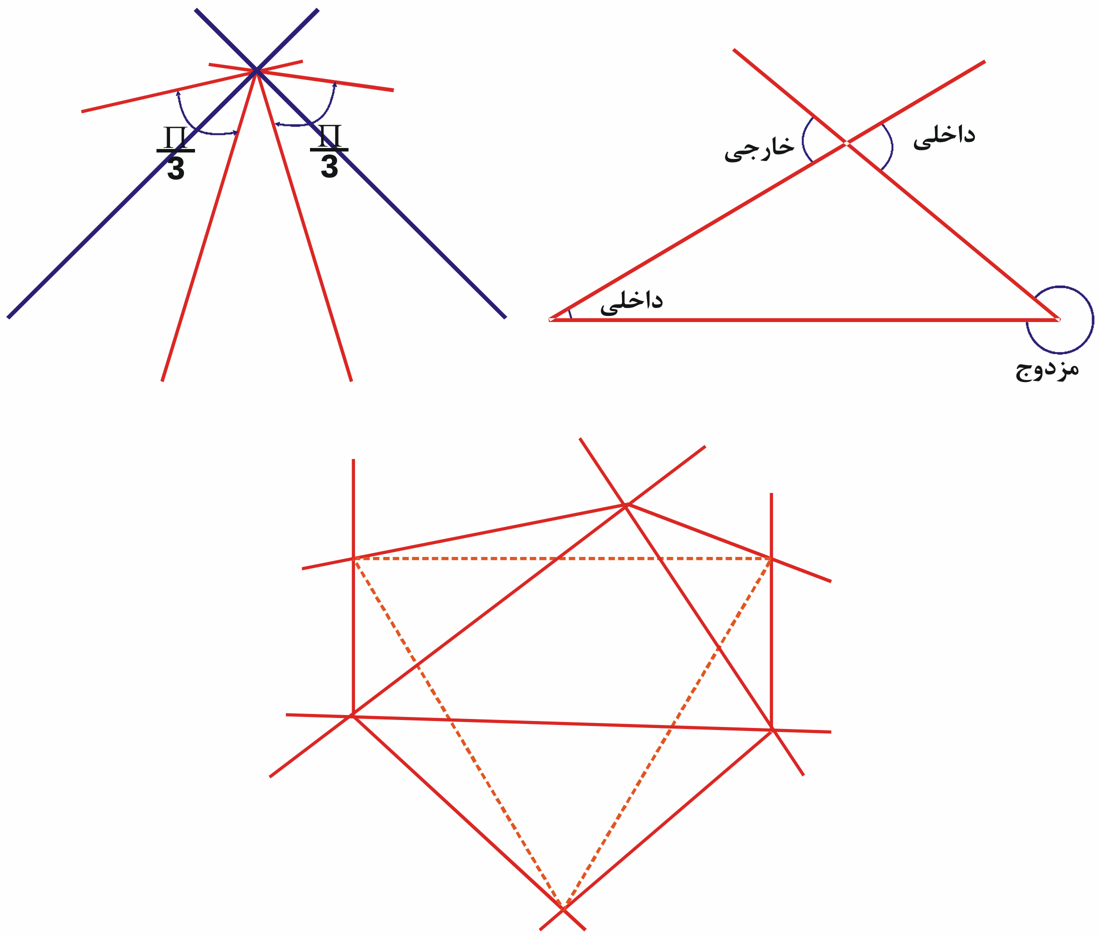
$$+b^2c+bcw^2+cw-b^2-bw^2$$

$$+bc^2+bcw+bw^2-c^2-cw$$

$$=0,$$

بنابراین به آنچه که می‌خواستیم دست یافتیم.

به خوبی می‌دانیم که اگر به جای ثلث سازهای زوایای داخلی، ثلث سازهای زوایای خارجی گذاشته شوند، قضیه مولی باز هم معتبر می‌ماند. چگونه می توان برهان قضیه را تغییر داد تا شامل این حالت شود؟ بدین منظور ابتدا ملاحظه می‌کنیم که ثلث سازهای داخلی و خارجی یک زاویه، با هم زاویه $\pi/3$ می‌سازند. چون زاویه مرکزی دو برابر زاویه محاطی است، نقطه P (که فصل مشترک خطوط ماربر نقاط c^2, b^3 و b^2, c^2 است) فصل مشترک خطوط ماربر نقاط $c^2 w, b^3$ و $b^2 w^2, c^3$ می‌شود؛



شکل۳

نقطه Q (که فصل مشترک خطوط ماربر نقاط c, b^3 و $1, b^2cw^2$ است) فصل مشترک خطوط ماربر نقاط $b^3, c\omega^2$ و $1, b^2c$ می شود; در صورتی که نقطه ی R (که فصل مشترک خطوط مار نقاط c^3, b و $1, bc^2\omega$ است) فصل مشترک خطوط مار بر زوج نقاط $c^3, b\omega$ و $1, bc^2$ خواهد شد.

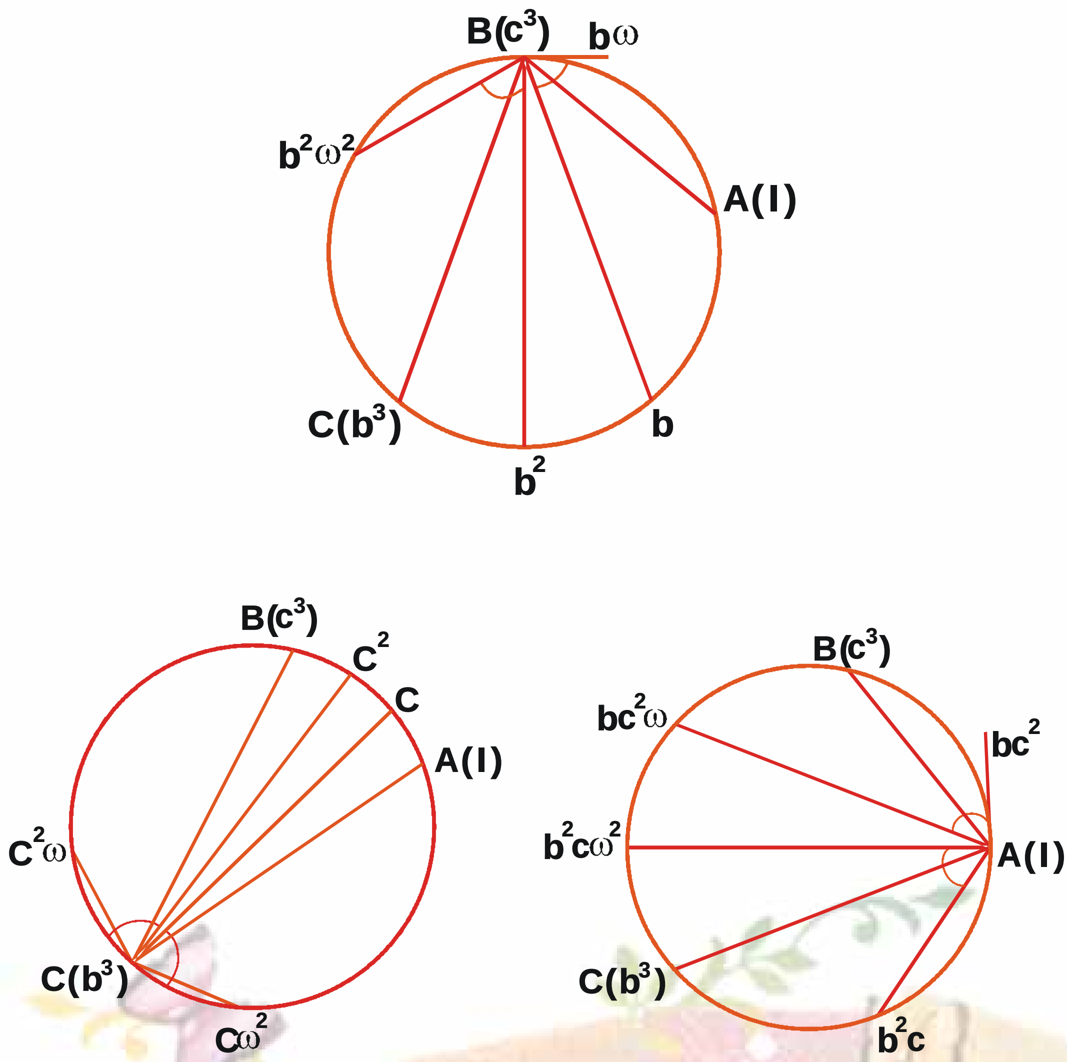
اما این امر برابر است با گذاردن bw به جای b, cw^2 به جای c در برهان اولیه، روشن است که با این تبدیل، محاسبه اولیه معتبر خواهد ماند. از این رو، حالت ثلث سازهای زوایای خارجی بدون زحمت اضافی ثابت می‌شود.

اما آیا تبدیلهای دیگری نیز وجود دارند؟ برای پی گیری این پرسش تبدیلهای :

$T_b(b)=bw,\quad T_b(c)=c$؛ $\quad T_c(b)=b,\quad T_c(c)=cw$؛

را وارد می کنیم. یعنی b, T_b را به bw بدل می کند ولی c را بدون نگه می‌دارد. در صورتی که b, T_c را تغییر نمی‌دهد و c را به cw بدل می‌کند. به عنوان مثال:

$$T_bT_c^2(b)=bw,\qquad T_bT_c^2(c)=cw^2$$

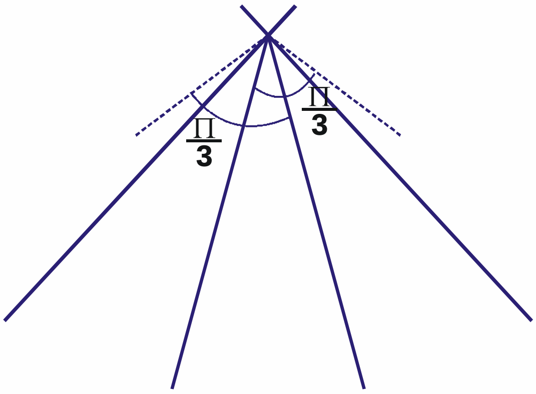


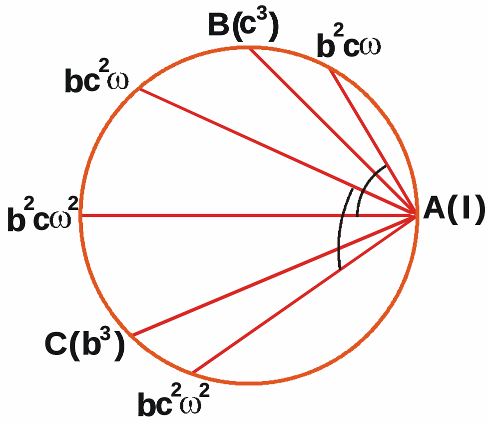
شکل۴

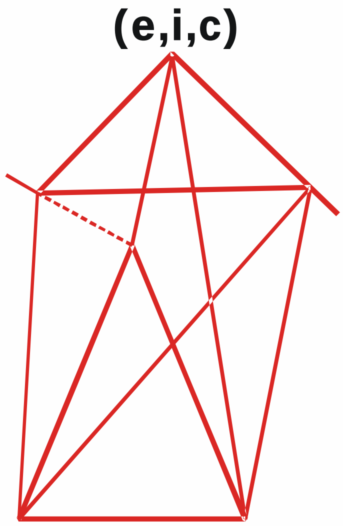
از این رو در حالت ثلث سازهای زوایای خارجی، صرفاً با استفاده از تبدیل $T_bT_c^2\left(=T_c^2T_b\right)$ نتیجه حاصل می‌شود. ولی روشن است که برهان اولیه، تحت تبدیلهای دیگر مثلاً $T_b^2T_c\left(=T_cT_b^2\right)$ نیز معتبر است. معنی هندسی استفاده از تبدیل $T_b^2T_c$، یعنی گذاشتن bw^2 به جای cw, b به جای c، چیست؟ به آسانی دیده می‌شود که این عمل دقیقاً عمل تعویض همه ثلث سازهای زاویه های داخلی با مزدوج آنهاست. از این رو قضیه مورلی در این حالت نیز درست است.

چون $T_c^3 =$ تبدیل همانی $= T_b^3$، ۹حالت زیر حاصل می شود که در آن مثلاً (i,e,c)، معرف گرفتن ثلث سازهای داخلی، خارجی و مزدوج راسهای C, B, A به ترتیب است.

	I	T_b	T_b^2
I	(i,i,i)	(c,e,i)	(e,c,i)
T_c	(e,i,c)	(i,e,c)	(c,c,c)
T_c^2	(c,i,e)	(e,e,e)	(i,c,e)







شکل۵

در عمل می‌توان، کار دیگری کرد. در ۹ حالت بالا، هر یک از سه راس مثلث را ثابت نگه داشته‌ایم، ولی آنچه را که نیاز داریم، ثابت نگاه نداشتن خود مثلث است. لذا تبدیل S را وارد می کنیم.

$S(b)=c, \qquad S(c)=b.$

به عبارت دیگر، S نقشهای c,b را با هم عوض می‌کند. تبدیل S ممکن است هـیچ اثـری روی ثلث سازهای راسهای C,B نداشته باشد (فقط نقشها را عوض می کند) ولی ثلث سازهای زاویه داخلی

راس A را با مزدوج ثلث سازهای زاویه در راس A عوض می کند. چون S^2 تبدیل همانی است، دوباره ۹ حالت خواهیم داشت که در جدول زیر آمده است.

	I	T_b	T_b^2
I	(c,i,i)	(i,i,c)	(e,i,e)
T_c	(e,e,i)	(c,e,c)	(i,e,e)
T_c^2	(i,c,i)	(e,c,c)	(c,c,e)

مثلاً

$$ST_b(b)=cw, \qquad ST_b(c)=b؛$$

$$ST_b^2T_c(b)=cw^2, \qquad ST_b^2T_c(c)=bw,$$

که به ترتیب به نوعهای $(i,e,e),(i,i,c)$ منجر می‌شود.

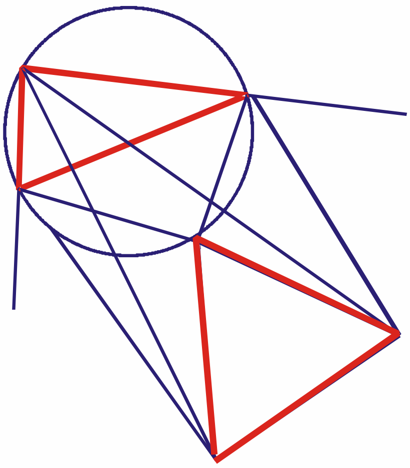
به طور خلاصه داریم:

۱. یک جایگشت برای هر یک از $(c,c,c),(e,e,e),(i,i,i)$؛

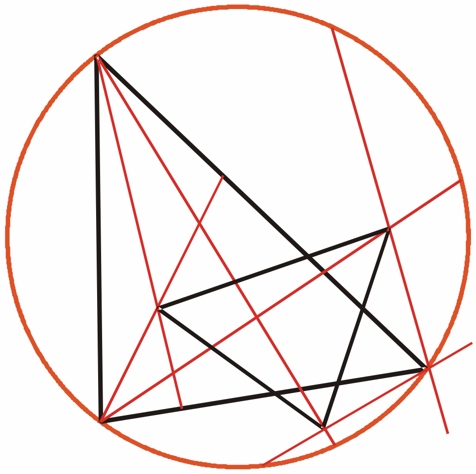
۲. شش جایگشت از (i,e,c)؛

۳. سه جایگشت برای هر یک از $(c,i,i),(e,e,e),(i,i,i)$؛

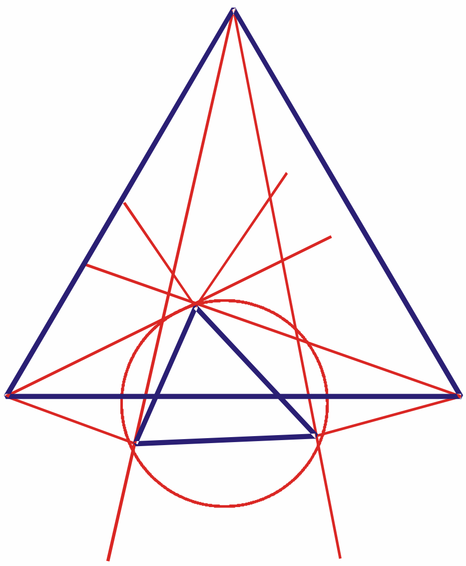
پس کلاً ۱۸ مثلث متساوی الاضلاع داریم با ۷ نوع مختلف؛



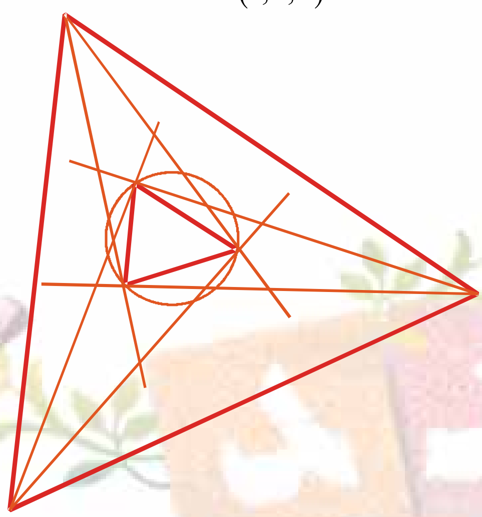
(e, i, e)



(c, i, i)



(c, e, c)



(c, c, c)

حالتهایی مانند $(c,e,e),(e,i,i),(i,c,c)$ که آورده نشده اند مثلثهای متساوی الاضلاع نمی‌دهند.

شایان ذکر است که برای رسم این ۱۸ مثلث متساوی الاضلاع لازم است ۱۸ ثلث ساز زاویه رسم شود و هر یک از این ۱۸ ثلث ساز دقیقاً از ۳ راس (از ۱۸ مثلث متساوی الاضلاع)می گذرد، و هر یک از این ۲۷ راس دقیقاً دو بار مورد استفاده واقع شود.