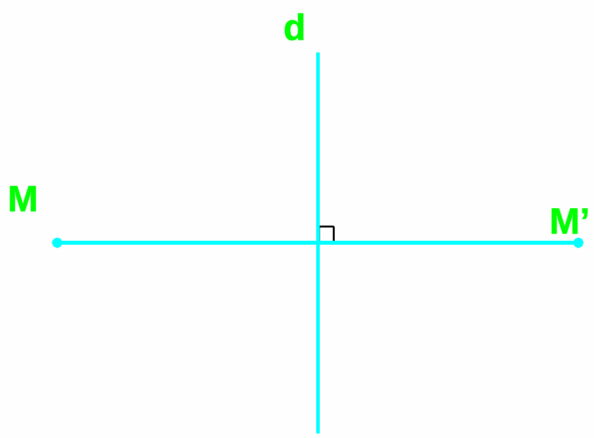
تقارن محوری

تعریف. تقارن محوری تبدیلی است که با خطی راست که محور تقارن نامیده می شود مشخص می شود . قرینه نقطه M نسبت به خط d نقطه M' است در صورتی که، خط d عمود منصف پاره خط MM' باشد .

هرگاه نقطه M' قرینه نقطه M نسبت به خط d باشد آن را با نماد $M' = S_d^{(M)}$ نشان می دهیم .هر نقطه که روی خط d باشد قرینه اش نسبت به خط d بر خودش منطبق است . در این تقارن خط d را محور تقارن مـی نـامیم و قرینه ، قرینه محوری است . ار تعریف بالا به سادگی نتیجه می شود که قرینه قرینه M نسبت به خط d بر خود M منطبق است ، یعنی :

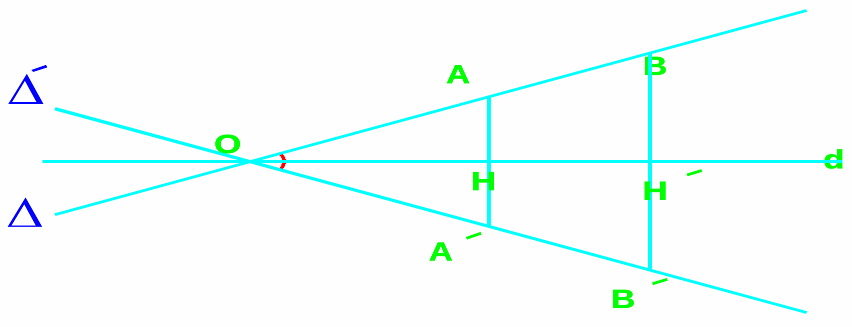
$$S_d S_d^{(M)} = M$$



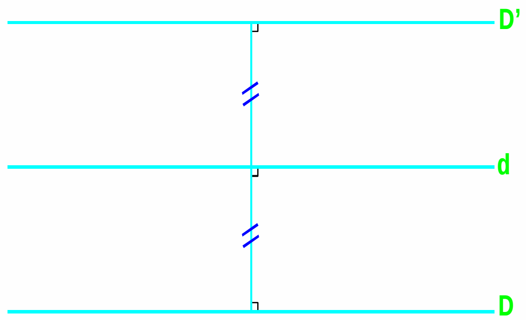
خواص تقارن محوری

خاصیت اول. در تقارن محوری قرینه هر خط راست که با محور تقارن متقاطع باشد خطی است راست که از نقطه تقاطع آن خط با محور تقارن می گذرد و زاویه ان با محور برابر است با زاویه همان خط با محور. اگر خط با محـور مـوازی

باشد قرینه آن نیز با محور موازی و خط و قرینه اش از محور به یک فاصله می باشند . (به شکل های الف و ب توجه کنید)



(الف)



(ب)

اثبات. اگر A' قرینه A نسبت به d باشد و از A' به محل تلاقی خط Δ با خط d وصل کنیم ، خط Δ' قرینه خط Δ نسبت به خط d است .

$$\overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OA'H} \Rightarrow \angle AOH = \angle A'OH = \alpha$$

اگر B نقطه ی دلخواهی از خط Δ باشد و از B بر خط d عمود کنیم تا امتداد آن خط Δ' را در B' قطع کند، از تساوی دو مثلث OBH' و $OB'H'$ (ز-ض-ز) نتیجه می شود که :

$BH' = B'H'$

یعنی $B' = S_d^{(B)}$ ، پس قرینه ی هر نقطه دلخواه خط Δ نسبت به خط d روی Δ' می افتد و هم چنین بر عکس ،

ثابت می شود که هر نقطه خط Δ قرینه یک نقطه خط Δ' نسبت به خط d است ، یعنی : $\Delta = S_d^{(\Delta')}$

نتیجه ۱. قرینه محوری هر پاره خط با ان مساوی است .

نتیجه ۲. قرینه محوری هر زاویه زاویه ای است مساوی با آن .

نتیجه ۳. تبدیل یافته هر شکل در تقارن محوری با آن شکل برابر است .

اما تساوی ، تساوی معکوس است . زیرا طرز قرار گرفتن زاویه ها و راس های نظیـر در دو شـکل هندسـی در دو جهت مختلف است .

خاصیت دوم. نتیجه ترکیب دو تقارن با محورهای موازی یک انتقال است .

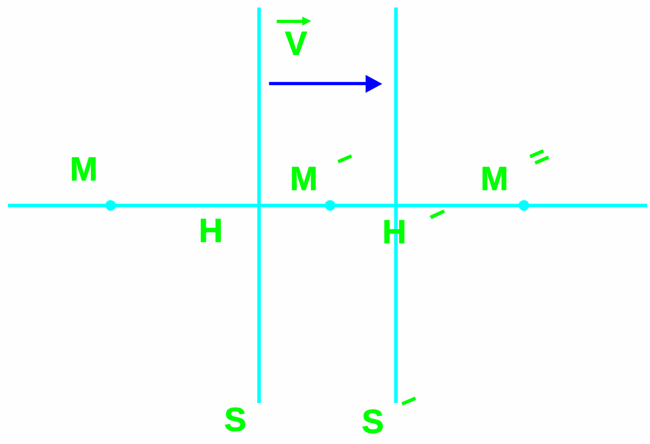
اثبات. با توجه به شکل داریم $S \| S'$ ، بنابراین :

$$\begin{cases} M' = S_S^M \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'} \\ M'' = S_{S'}^{M'} \Rightarrow \overrightarrow{M'H'} = \overrightarrow{H'M''} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} = 2\overrightarrow{HH'} = 2\vec{V}$$

پس می توان نوشت :

$$M'' = T_{2\overrightarrow{HH'}} M \Rightarrow S_{S'O} S_S = T_{2\overrightarrow{HH'}} \text{ یا } S_{SO} S_{S'} = T_{2\overrightarrow{H'H}}$$

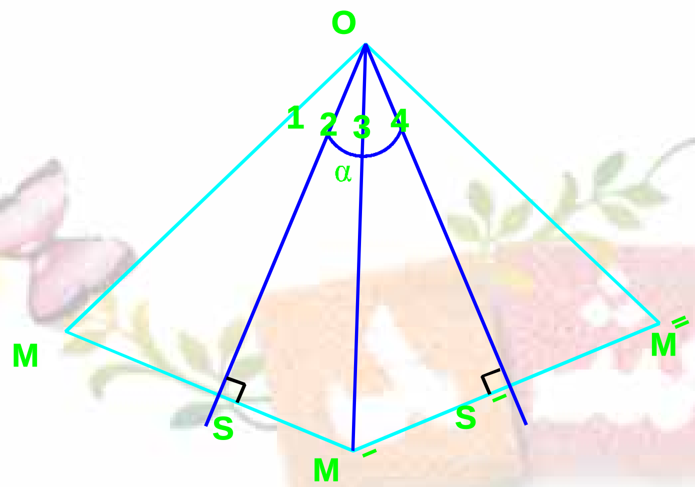


خاصیت سوم. نتیجه ترکیب دو تقارن محوری با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکـز دوران همـان محـل برخورد محورها و زاویه ی دوران دو برابر زاویه ی بین دو محور می باشد .

اثبات.

$$\begin{cases} M' = S_S^{M} \Rightarrow OM = OM', \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ M'' = S_S^{M'} \Rightarrow OM' = OM'', \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \end{cases}$$

$$OM = OM'', M\hat{O}M'' = 2\alpha \Rightarrow M'' = R_O^{2\alpha} M \Rightarrow S_{S'O} S_S = R_O^{2\alpha}$$



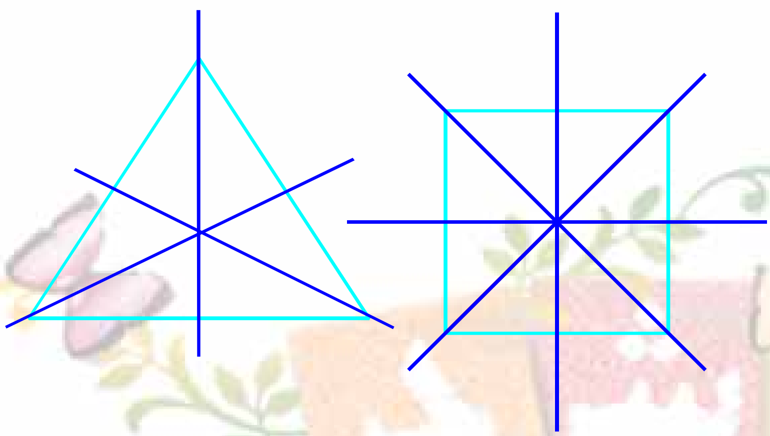
نتیجه ۱. اگر دو محور بر هم عمود باشند $(\alpha = 90)$ آنگاه زاویه ی دوران ۱۸۰ است یعنی نتیجه ترکیب دو تقارن محوری با محورهای عمود بر هم یک تقارن مرکز است .

محور تقارن

تعریف. هر گاه قرینه هر نقطه از شکل F نسبت به خط ثابت S بر روی خود شکل قرار گیرد خط S را محور تقارن شکل گوییم . یک شکل ممکن است چندین محور تقارن داشته باشد .

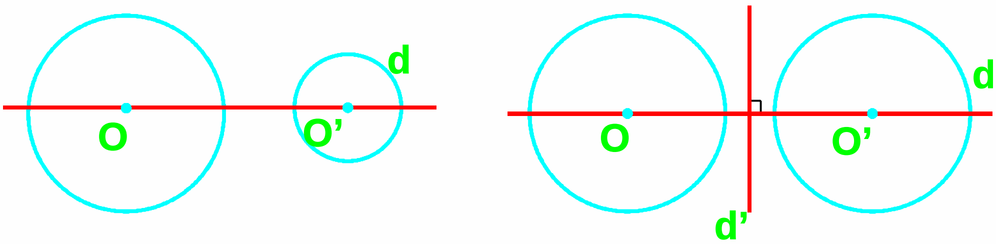
خاصیت چهارم. بنا به نتیجه (۱) و تعریف بالا هر گاه شکلی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد، دارای مرکزتقارن است و محل تلاقی دو محور تقارن خواهد بود . مانند بیضی ، دایره، مربع و ...

خاصیت پنجم. هر n ضلعی منتظم دارای n محور تقارن است . اگر n فرد باشد این محورهای تقارن از یک راس و وسط یک ضلع می گذرند مانند مثلث متساوی الاضلاع ، پنج ضلعی منتظم و ... و اگر n زوج باشد نصف محورهای تقارن از وسط های اضلاع و نصف دیگر از راس ها می گذرند مانند مربع ، شش ضلعی منتظم و ... هم چنین دایره بی شمار محور تقارن دارد .



(ب) (الف)

خاصیت ششم. دو دایره با شعاع های مساوی و مرکز های متمایز دارای دو محور تقارن عمود بر هم می باشد و دو دایره با شعاع های نامساوی و مرکز های متمایز دارای یک محور تقارن می باشند که این محور تقارن امتداد خط المرکزین آن هاست و مماس مشترک های دو دایره نسبت به آن قرینه اند . هم چنین دو دایره متحد المرکز دارای بی‌شمار محورتقارن هستند.



(ب) (الف)

خاصیت هفتم. هر خط راست بی شمار محور تقارن دارد . نیم خط محور تقارن ندارد و پاره خط یک محور تقارن دارد که عمودمنصف آن است .

مسئله‌ی ۱. بین تمام مثلث هایی که قاعدهو مساحت برابر دارند محیط مثلثی مینیمم است که متساوی الساقین باشد .

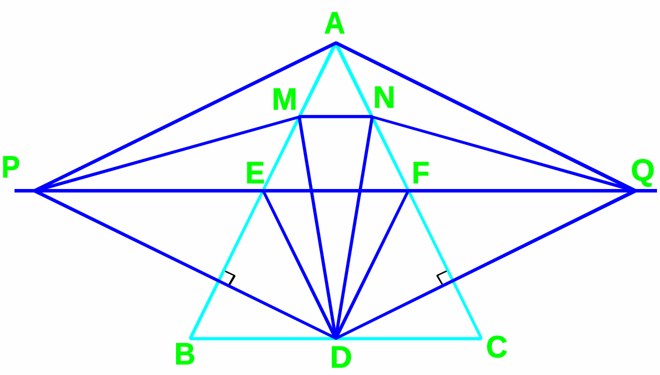
حل. فرض کنید مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد، که ارتفاع آن AH است ، حال اگر قاعده مشترک را d بنامیم و S مساحت باشد؛ چون $AH = \frac{2S}{d}$ پس ارتفاع ثابت است و مکان هندسی راس A دو خط موازی BC می باشد .

حال برای آن که $AB + AC$ مینیمم باشد (BC ثابت است) قرینه ی C را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را C' می نامیم . از B به C' وصل می کنیم تا d را قطع کند . محل تقاطع را A می نامیم . چون BC و d موازیند،

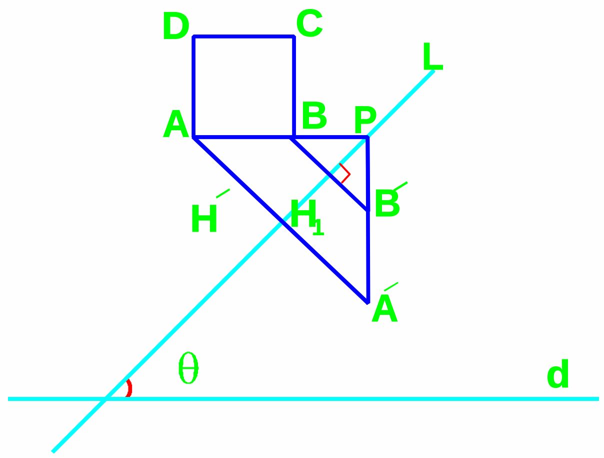
پس AB و AC مساوی و مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است .

مسئله‌ی ۲. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و نقطه D روی ضلع BC مفروض است ، نقاط E و F را روی AB و AC طوری بیابید که محیط مثلث DEF کمترین مقدار ممکن را داشته باشد .

حل. فرض کنید P و Q قرینه های D نسبت به AB و AC باشند . اگر PQ ، AB و AC را در E و F قطع کند ادعا می کنیم مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ مثلث مطلوب است وتوجه کنید که $QF = FD, PE = ED$. پس محیط مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ برابر طول پاره خط PQ است . مشابهاً اگر M و N نقاط دیگری روی AC, AB باشند محیط مثلث $\overset{\Delta}{DMN}$ برابر طول پاره خط شکسته $PMNQ$ است که به وضوح از طول پاره خط PQ که برابر محیط مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ بود، بیشتر است . پس مثلث $\overset{\Delta}{DEF}$ کمترین محیط را دارد .



مسئله ۳. تمام n هایی را پیدا کنید که بتوان n مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آنها افقی و عمودی باشد و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد .



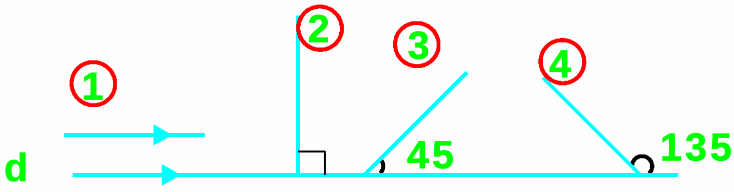
حل. فرض کنید $ABCD$ یکی از مربع های مذکور باشد و L یکی از محورهای تقارن و d خطی موازی خطـی افـق و $A'B'$ قرینه ی AB نسبت به L باشد . داریم :

$$AB \| d \Rightarrow A\hat{P}H_1 = H_1\hat{P}A' = \theta$$

که $P = AB \cap L$ (مطابق شکل) . حال از آنجا که $A'B'$ یکی از اضلاع مربع های موجـود در صـفحه اسـت دو حالت داریم:

$$\begin{cases} A'B' \perp d \Rightarrow \theta = 90 - \theta \Rightarrow \theta = 45 \\ A'B' \| d \Rightarrow \theta = 180 - \theta \Rightarrow \theta = 90 \end{cases}$$

پس محورهای تقارن با یکدیگر و سطح افق زاویه ۴۵ یا ۹۰ درجه می سازند . زیرا اضلاع مربع $ABCD$ ، یا موازی محور یا عمود بر آن می باشند . از طرف دیگر ممکن است L ، d را قطع نکند و داشته باشیم $d \| L$. پس چهار نوع تقارن داریم ، که در شکل شماره گذاری شده اند :



دو حالت داریم :

الف. فرض می کنیم هیچ دو محور تقارنی موازی نباشند پس یا محور تقارن های ۱و۳ با هم وجود دارند، یا محور تقارن های ۲و۴ با هم وجود دارند .

زیرا طبق اصلا لانه کبوتری اگر دو دسته (۳و۱) و (۴و۲) را در نظر بگیریم ، از یک دسته حتماً دو عضوآن انتخاب می شود؛ چون حداقل ۳ محور تقارن داشتیم .

بدون کم شدن از عمومیت مسئله فرض می کنیم دو محور از انواع ۳و۱ داریم :

حالت دوم از دوارن ۹۰ این دو محور نسبت به محل برخورد آنها حاصل می شود (دقت کنید که قرینه و یا دوران ۹۰ درجه محورها و شکل مربع ها ، تنها اضلاع افقی را به عمودی و عمودی را به افقی تبدیل می‌کند و یا تغییر در آنها نمی دهد.) حال فرض کنید محل برخورد دو محور $O|_0^0$ مبدا مختصات باشد و $A|_{\beta}^{\alpha}$ مرکز یکی از مربع ها باشد . (واضح است که با توجه به یکسان بودن مربع ها و مختصات مرکز آنها و مربع ها به طور یکتا تعیین می شوند)

$$A|_{\beta}^{\alpha} \xrightarrow{1} A_1|_{-\beta}^{\alpha} \xrightarrow{3} A_2|_{\alpha}^{-\beta} \xrightarrow{1} A_3|_{-\alpha}^{-\beta} \xrightarrow{3} A_4|_{-\beta}^{-\alpha} \xrightarrow{1} A_5|_{\beta}^{-\alpha}$$

پس اگر $A|_{\beta}^{\alpha}$ موجود باشد آنگاه $A|_{\beta}^{-\alpha}$ موجود است پس خط $x=0$ نیز یک محور تقارن است و شکل حاصل ۳ محور تقارن دارد .

حال اگر $\alpha \neq \beta$ و $\alpha,\beta \neq 0$ آنگاه از هر مربع $2^2+2^2=8$ مربع (با خود مربع) حاصل می شود .

- اگر $\beta = 0$ و $\alpha \neq 0$ آنگاه از هر مربع $2+2=4$ مربع (با خود مربع) حاصل می شود .

- اگر $\alpha = \beta$ و $\alpha, \beta \neq 0$ آنگاه از هر مربع $2^2 = 4$ مربع (با خود مربع) حاصل می شود .

- اگر $\beta \neq 0$ و $\alpha = 0$ آنگاه از هر مربع $2+2=4$ مربع (با خود مربع) حاصل می شود .

- اگر $\alpha = \beta = 0$ آنگاه از هر مربع یک و فقط یک مربع (یعنی خود مربع) حاصل می شود . از حالات فوق نتیجه می شود که تعداد مربع ها به شکل $4k$ و $4k+1$ می باشد .

ب. فرض کنید حداقل دو محور تقارن موازی باشند . بدون این که خللی به فرض مسئله وارد شود فرض کنیم ازنوع ۱ باشند و یکی m به معادله ی $y=0$ و دیگری m' به معادله $y=a$ باشد و $A|_{\beta}^{\alpha}$ مرکز یکی از مربع ها باشد $(a \neq 0)$

$$A|_{\beta}^{\alpha} \xrightarrow{m} A_1|_{-\beta}^{\alpha} \xrightarrow{m'} A_2|_{2\alpha+\beta}^{\alpha} \xrightarrow{m} A_3|_{-2\alpha-\beta}^{\alpha} \xrightarrow{m'} A_4|_{4\alpha+\beta}^{\alpha} \xrightarrow{m} \mathbf{L}$$

و چون $a=0$ بی نهایت نقطه به شکل $(k \in Z)\, A_k|_{2ka+\beta}^{\alpha}$ داریم : پس بی نهایت مربع داریم (تناقض).