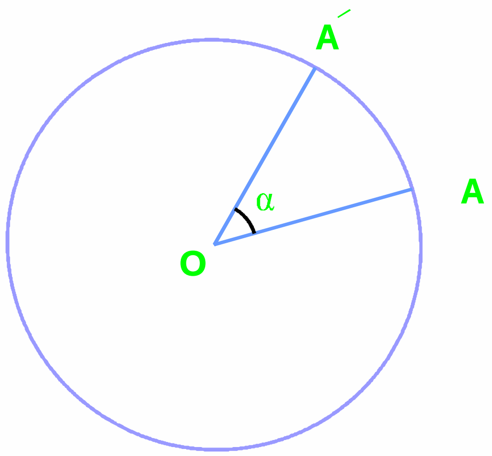
دوران

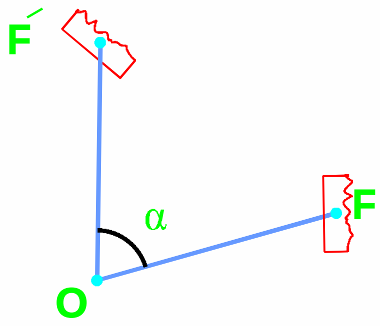
تعریف دوران برای نقطه. تبدیلی است در صفحه که هر نقطه را به اندازه α درجه حول نقطه ای ثابت به نام مرکز دوران O و روی محیط دایره ای به شعاع OA به گردش در می آورد.



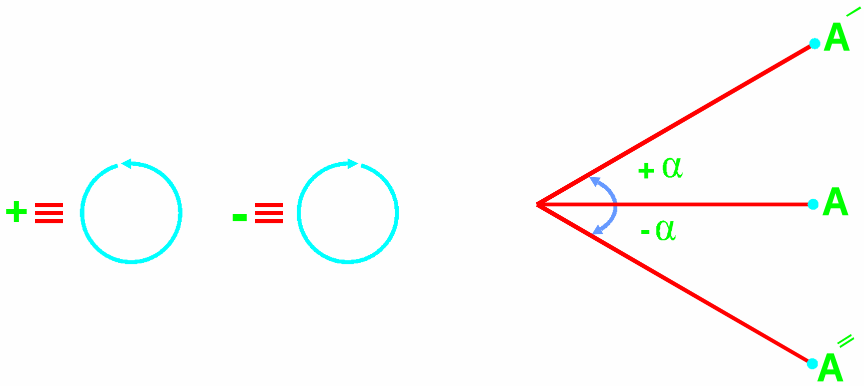
توضیح. نقطه ای مانند O در صفحه اختیار می کنیم ، فرض کنید یک زاویه ی α داده شده و روی جهت دوران توافق شده باشد (به طور مثال فرض کنید این جهت پادساعتگرد باشد) گیریم A نقطه ای دلخواه در صفحه باشد و A' نقطه ای باشد که $OA' = OA$ و $\angle AOA' = \alpha$ بنابراین OA باید با دوران به اندازه α در جهت انتخاب شده بر OA' منطبق شود.

تعریف دوران برای شکل. گوییم شکل F' از دوران شکل F حول مرکز O و زاویه دوران α به دست آمده است اگر تمام نقاط شکل F' از دوران حول مرکز O و زاویه دوران α به دست آمده باشند و دو شکل F و F' هم نهشت باشند .

نماد. دوران حول مرکز O و زاویه α را با نماد (O,α) نشان می دهند.



قرارداد. با بررسی شرط های دوران ، یعنی $OA' = OA$ و $\angle AOA' = \alpha$ ، در هر دوران هر نقطه مانند A به دو نقطه مانند A' و A'' بدل می شود (مطابق شکل زیر) . برای رفع این مشکل روی دایره مثلثاتی زاویه های جهت دار را به ایـن صورت تعریف می کنیم که زاویه مثبت دوران را حرکت در یکی از جهت های ساعتگرد و یا پادساعتگرد معرفی می کنیم و زاویه منفی دوران را حرکت در جهت خلاف انتخاب شده برای زاویه مثبت دوران برمی گزینیم .



(ب) (الف)

ملاحظه. در این متن جهت خلاف عقربه های ساعت را جهت مثبت دوران و جهت عقربه های ساعت را جهت منفی دوران انتخاب کرده ایم (شکل الف و ب) .

قضیه ۱. هر خط l با یک دوران حول مرکز O به یک خط جدید l' تبدیل می شود .

طرز یافتن خط جدید. برای یافتن دوران یافته خط l حول مرکز O و به زاویه α کافی است ، پای عمـود مرسـوم

از O بر l (یعنی P) را به اندازه زاویه α دوران دهیم و سپس بر OP' (P' دوران یافته P است) خطی عمود بگذرانیم .

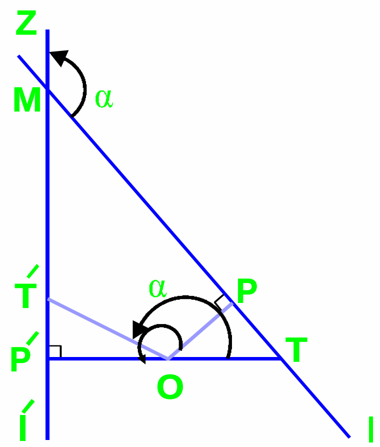
اثبات. طبق آنچه که در طرز یافتن خط جدید l' گفته شد ، می دانیم چهار ضلعی $MP'OP$ محاطی است زیرا $\angle OPM = \angle OP'M$ و از محاطی بودن چهارضلعی $MP'OP$ نتیجه می گیریم که $\angle POP' + \angle PMP' = 180$. از طرفی می دانیم :

(Z نقطه ای روی خط l' و نزدیک M است)

$$\angle PMZ + \angle PMP' = 180$$

بنابراین طبق دو رابطه آخر داریم :

$$\alpha = \angle POP' = \angle PMZ$$



بنابراین خط l' با دوران α درجه l به دست می آید . زیرا زاویه بین دو خط α درجه می باشد. برای کامل شدن قضیه باید ثابت کنیم که هر نقطه دلخواه روی خط L با دوران حول O و زاویه ی α ، روی خط l' قرار می گیرد. فرض کنید T نقطه ای دلخواه بر روی خط l باشد و T' دوران یافته آن حول مرکز O و با زاویه α درجه باشد . (مطابق شکل) از تعریف دوران برای نقاط T و P می دانیم که :

$$\angle TOT' = \angle POP' = \alpha$$

با کم کردن زاویه ی مشترک $\angle POT'$ از طرفین تساوی فوق داریم :

$$\angle TOT' - \angle POT' = \angle POP' - \angle POT' \to \angle POT = \angle P'OT'$$

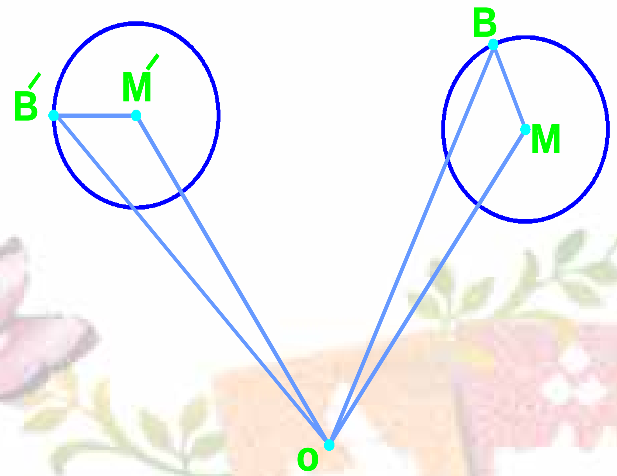
در ضمن می دانیم که $OP = OP'$ و $OT = OT'$ (چرا؟) پس دو مثلث ΔOPT و $\Delta OP'T'$ همه به حالت دو ضلع و زاویه ی بین همنهشت هستند . پس زاویه ی $\angle OP'T' = \angle OPT = 90$ پس T' روی خطی است که از P' می گذرد و بر خط OP' عمود است که این خط همان خط l' می باشد .

قضیه ۲. یک دایره S با دوران حول یک نقطه O به دایره جدید S' بدل می شود . برای یافتن دایره S' کافیست نقطه M مرکز دایره S را حول O دوران دهیم و سپس دایره ای به مرکز نقطه جدید M' و به شعاع دایره S رسم کنیم .

اثبات. فرض کنید M' از دوران $+\alpha$ درجه نقطه M حول مرکز O بدست آید، بنابراین $\angle MOM' = \alpha$ و نقطه B' نیز از دوران $+\alpha$ درجه نقطه B حول مرکز O بدست می آید ، بنابراین $\angle BOB' = \alpha$ به عبارت دیگر $\angle MOM' = \angle BOB'$. از طرفین تساوی زاویه $\angle M'OB$ را کم می کنیم پس :

$$\angle MOM' - \angle M'OB = \angle BOB' - \angle M'OB$$

$$\Rightarrow \angle B'OM' = \angle BOM$$



و چون $OM' = OM$ و $OB' = OB$ ، دو مثلث $\overset{\Delta}{OBM}$ و $\overset{\Delta}{OB'M'}$ همنهشت هستند و در نتیجه $B'M' = BM$.

چون دوران تبدیلی است که هر نقطه را فقط به یک نقطه تبدیل می کند، پس M' دوران یافته M حول مرکز O

و با زاویه α ، نقطه ثابتی می باشد . و چون $B'M'$ برابر BM شعاع دایره C مقــدار ثـابتی دارد، پـس مکــان هندســی

نقطه B' دایره ای است به مرکز ثابت M' و با شعاع $B'M' = BM$.

مسئله ۱. مثلث متساوی الاضلاع را بیابید که رئوس آن بر سه دایره متحدالمرکز مفروض واقع باشند .

حل. سه دایره متحدالمرکز C_1، C_2 و C_3 به مرکز O و به ترتیب با شــعاع هــای R_1، R_2 و R_3 را طــوری در نظــر

می‌گیریم که داشته باشیم $R_1 < R_2 < R_3$. نقطه دلخواه A را روی دایره C_1 در نظر می گیریم . حــال دایــره C_2 رابــه

اندازه۶۰ - درجه حول A دوران می دهیم ، دایره جدید را C'_2 و مرکز آن را O' می نامیم ؛ می دانیم $R_2 = R'_2$ کــه R'_2

شعاع دایره C'_2 می باشد (طبق قضیه ۲) اکنون ثابت می کنیم دو دایره C' و C_3 متقاطعنــد ، دو دایــره متقاطعنــد اگــر

فاصله خط المرکزین آنها از مجموع شعاع های آنها کمتر باشد . در مثلث $\overset{\Delta}{AOO'}$ داریــم : $OO' < AO + AO'$ (قــضیه

حمار) و $AO = AO'$ (ویژگی دوارن) پس $OO' < 2AO = 2R_1$ $(R_1 = OA)$. از طرفی چون

$R_1 < R_2 < R_3$

داریم $2R_1 < R_2 + R_3$ پس با جایگذاری در رابطه قبل داریم :

$OO' < 2R_1 < R_2 + R_3$

و همان طور که گفته شد $R_2 = R'_2$ می باشد (قضیه ۲) ، بنابراین $OO' < R'_2 + R_3$ ، پس دو دایــره C'_2 و C_3

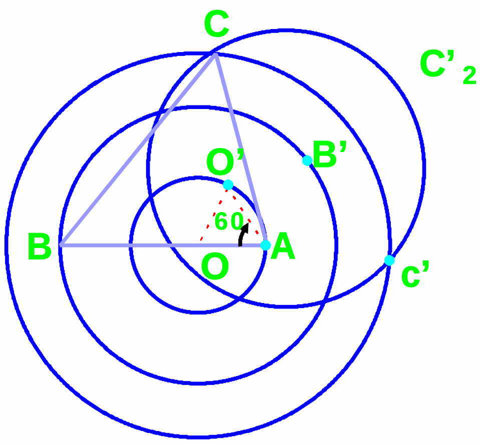
متقاطعند، محل تقاطع آنها را C' و C می نامیم . دوران۶۰+ درجه حول A نقاط C و C' را به ترتیب به B و B' می برنــد

که این نقاط روی دایره C_2 قرار دارند؛ زیرا دایره C'_2 دوران یافته C_2 حول A و با زاویه ۶۰- می بود و حال C و C' روی

C'_2 قرار دارند. بنابراین مثلث های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AB'C'}$ مثلث های خواسته شده اند ، زیــرا $\angle C'AB' = \angle CAB = 60$ و

$AC = AB$ و $AC' = AB'$ و همان طور که می دانیم $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$ و $\alpha = \angle AB'C' = \angle AC'B'$

از طرفی مجموع زوایای داخلی هر مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است ، پس خواهیم داشت :



$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180 \rightarrow 60 + \alpha + \alpha = 180 \rightarrow \alpha = 60$$

و

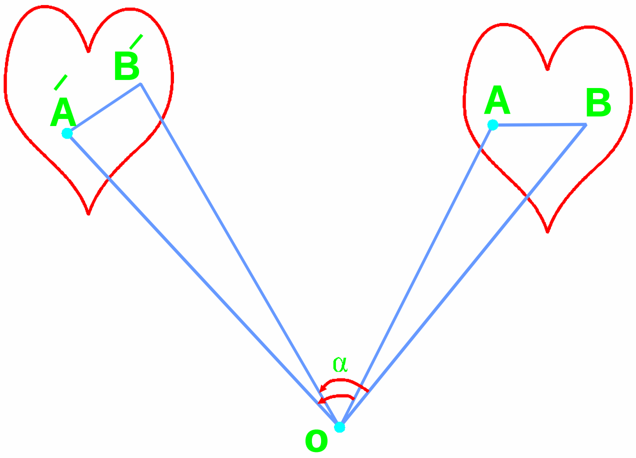
$$\angle C'AB' + \angle AB'C' + \angle B'C'A = 180 \rightarrow 60 + \alpha + \alpha = 180 \rightarrow \alpha = 60$$

قضیه ۳. اگر شکل های F و F' با یک دوران به زاویه α به هم تبدیل شوند هر پاره خط از شکل F با یک پاره خط از شکل F نظیر است که این خط های متناظر با هم مساوی اند و با یکدیگر زاویه α می سازند .

اثبات. فرض کنید دوران به مرکز O و با زاویه دوران α ، شکل F را به شکل F' تبدیل می کند و نیز فرض کنید AB و $A'B'$ دو پاره خط متناظر از این اشکال باشند (مطابق شکل) . پس مثلث های $O\overset{\Delta}{AB}$ و $O\overset{\Delta}{A'}B'$ بر هم قابل انطباق اند، زیرا $OA = OA'$ و $OB = OB'$ و $\angle AOB = \angle A'OB'$. از انطباق دو مثلث نتیجه می شود که $AB = A'B'$.

زاویه ی بین خطوط AB و $A'B'$ مساوی α است زیرا خطوط AB و $A'B'$ با دوران $+\alpha$ به هم تبدیل می شوند . در عین

حال باید AB را به زاویه α در جهت دوران بچرخانیم تا پاره خط $A'B'$ به دست آید.



عکس قضیه ۳. اگر به هر نقطه از شکل F' نقطه ای از شکل F نظیر شده باشد ،واین شکل ها چنان باشد که پاره خط های متناظر آنها مساوی باشند و با یکدیگر زاویه α بسازند(به طوری که پاره خط های شکل F، وقتی به زاویه α در جهت انتخاب شده دوران کنند ، با پاره خط های متناظر از شکل F' موازی شوند) آنگاه F و F' با دورانی به زاویه αحول یک مرکز به یکدیگر تبدیل می شوند .

اثبات. فرض کنید M و M'دو نقطه متناظر از شکل های F و F' باشند . روی پاره خط MM' کمان در خور زاویه α را رسم کنید و فرض کنید Oنقطه ی تقاطع این کمان با عمود منصف پاره خط MM' باشد . پس $OM = OM'$ (Oروی عمود منصف MM') و $\angle MOM' = \alpha$ (O روی کمان در خور زاویه α) نتیجه می گیریم که دوران به مرکز O و زاویه αنقطه M را به M' می برد .

به علاوه فرض کنید A و A' دو نقطه دلخواه و متناظر از اشکال F و F' باشند . مثلث های $\overset{\Delta}{OMA}$ و $\overset{\Delta}{OM'A'}$ را در نظر بگیرید. می دانیم که $\angle MOM' = \alpha$ و اگر K محل برخورد پاره خط های MA و $M'A'$ باشد، زاویه $\angle MKM' = \alpha$ (طبق فرض مسئله MA و $M'A'$ دو پاره خط متناظر هستند) حال چون $\angle MOM' = \angle MKM' = \alpha$ ،

پس K و O و M و M' بر روی یک دایره قرار دارند (چهار ضلعی $OKMM'$ محاطی است .)

بنابراین $\angle OM'K = \angle OMK$ زیرا هر دو روبه رو کمان $\overset{\frown}{OK}$ قرار دارند . پس $\angle OM'A' = \angle OMA$. از طرفی

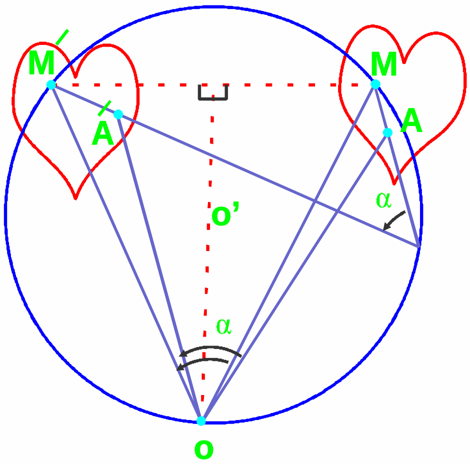
داشتیم $OM' = OM$ و طبق فرض مسئله MA و $M'A'$ دو پاره خط متناظر و در نتیجه مساوی هستند ، بنابراین دو

مثلث $\overset{\Delta}{OMA}$ و $\overset{\Delta}{OM'A'}$ همنهشتند و قابل انطباق می باشند . از اینجا نتیجه می شود که $OA = OA'$ و به علاوه

$\angle AOA' = \angle MOM' = \alpha$ (زیرا $\angle A'OM' = \angle AOM$ و به طرفین مقدار زاویه $\angle MOA'$ را اضافه می کنیم) در

نتیجه دوران به مرکز O و زاویه α هر نقطه A از شکل F را به نقطه مناظرش A' از شکل F' می برد که همان حکم

مطلوبست .



قضیه ۴. اگر دو راس A و B از مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ را حول راس سوم یعنی O به زاویه α درجه دوران دهیم زاویه بین

خطوط AB و $A'B'$ نیز α درجه خواهد بود که A' و B' به ترتیب دوران یافته های A و B هستند.

اثبات اول. طبق قضیه (۳) این حالت، حالت خاصی از همان قضیه است و مسئله اثبات شده است .

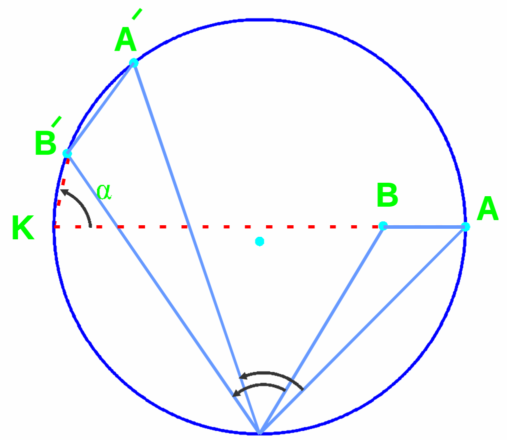
اثبات دوم. دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OA'B'}$ متشابه اند ، زیرا $OA = OA'$ و $OB = OB'$ و $\angle AOB = \angle A'OB'$ (زیرا

$\angle BOB' = \angle AOA' = \alpha$ و از طرفین زاویه $\angle A'OB$ را کم می کنیم) با توجه به اجزاء نظیر در دو مثلث داریم:

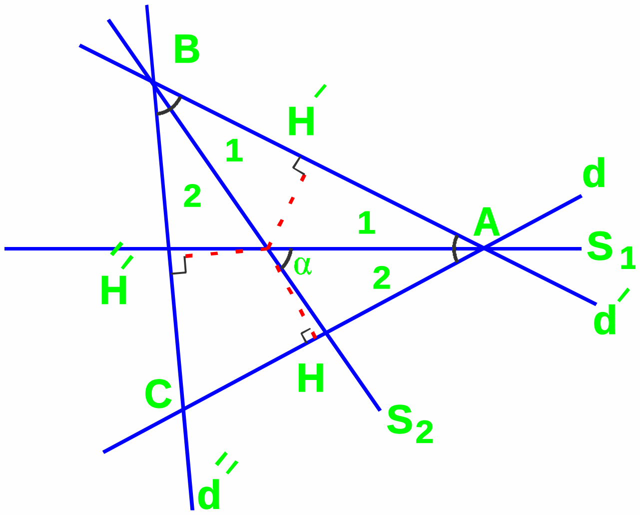
$$\angle BAO = \angle B'A'O$$

حال محل برخورد AB و $A'B'$ را K می نامیم همان طور که گفتیم $\angle BAO = \angle B'A'O$ و در نتیجه $\angle KAO = \angle KA'O$ ؛ بنابراین چهار ضلعی $AA'KO$ محاطی است . چون زاویه های $\angle A'KA$ و $\angle A'OA$ روبه رو به کمان $\overset{\frown}{AA'}$ می باشند، با هم برابرند ، یعنی $\angle A'KA = \angle A'OA$. از طرفی $\angle A'KA$ همان زاویه بین خطوط AB و $A'B'$ می باشد و لذا حکم اثبات می شود .

ملاحظه. از این قضیه در سوالات المپیادهای اخیر چندین بار استفاده شده است ، به مثال زیر توجه کنید :



قضیه ۵. اگر خط دلخواه d را نسبت به دو خط S_1 و S_2 که با هم زاویه ی α می سازند متوالیاً تقارن دهیم ، خط حاصل دوران یافته d به اندازه 2α و حول محل برخورد S_1 و S_2 می باشد .



اثبات. ابتدا خط d را نسبت به خط S_1 متقارن می کنیم و خط d' بدست می آید . سپس خط d' را نسبت به خط S_2 متقارن می کنیم خط d'' به دست می اید . O را محل برخورد خط S_1 چون O روی نیمساز d و d' قرار دارد داریم $OH = OH'$ و به همین ترتیب داریم $OH'' = OH'$ ، بنابراین $OH'' = OH$. A و B و C را به ترتیب محل برخورد های خطوط d با d' و d' با d'' و d'' با d می نامیم در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، OA و OB هر دو نیمساز می باشند و در مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ طبق زاویه خارجی داریم : $A_1 + B_1 = \alpha$ و در نتیجه $A + B = 2A_1 + 2B_1 = 2\alpha$ و زاویه‌ی $C = 180 - 2\alpha$ می باشد . از طرفی می دانیم که طبق تعریف دوران برای خط چون $OH'' = OH$ و زاویه ی بین d و d'' برابر $180 - 2\alpha$ است ، می توان گفت که خط d'' و d با زاویه ای $180 - 2\alpha$ یا 2α دوران یافته یکدیگرند .

بنابراین حکم ثابت شده است .

ترکیب دو دوران

ترکیب دو دوران با مرکز مشترک :

قضیه ۶. ترکیب دو دوران (هم جهت یا هم سو) به مرکز مشترک O و زوایای دوران α و β دورانی است که به

همان مرکز O و به زاویه دوران $\alpha+\beta$.

ترکیب دو دوران با مرکزهای متفاوت O_1 و O_2 :

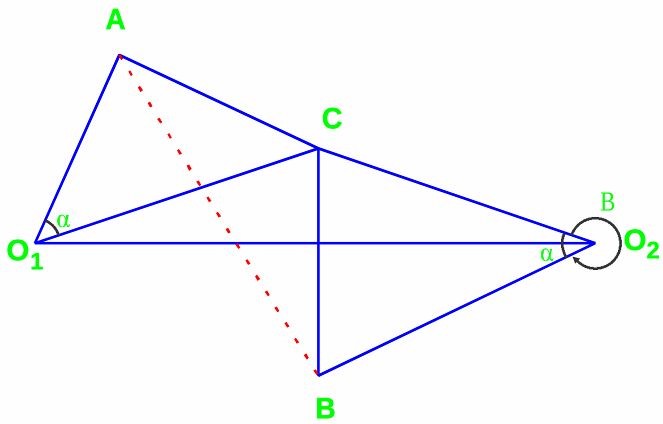
قضیه ۷. ترکیب دو دوران به مرکز O_1 و زاویه α و مرکز O_2 و زاویه β ، یک دوران به مرکز O و زاویه $\alpha+\beta \neq 360$ باشد .

اثبات. فرض کنید شکل F_1 از دوران شکل F به مرکز O_1 و زاویه α به دست آمده باشد . و شکل F_2 از دوران شکل F_1 به مرکز O_2 و زاویه β به دست آمده باشد . اگر دوران اول ، پاره خط AB از شکل F را به پاره خط A_1B_1 از شکل F_1 بدل کند و دوران دوم ، پاره خط A_1B_1 از شکل F_1 را به پاره خط A_2B_2 از شکل F_2 بدل کند، آنگاه پاره خط های AB و A_1B_1 مساوی اند و با هم زاویه α می سازند . (طبق قضیه ۳) . ازدوران دوم نیز می دانیم A_1B_1 و A_2B_2 نیز با هم مساوی اند و با هم زاویه β می سازند (طبق قضیه ۳) . پس پاره خط های AB و A_2B_2 نیز با هم مساوی اند و با یکدیگر زاویه $\alpha+\beta$ می سازند .

بنابراین شکل های F و F_2 با یک دوران به زاویه $\alpha+\beta$ به هم وابسته اند (طبق عکس قضیه ۳) . توجه کنید که فرض بر آن بوده است که $\alpha+\beta \neq 360$ باشد . درادامه این فصل طرز بدست آوردن O مرکز دوران معادل را توضیح خواهیم داد .

قضیه ۸. ترکیب دو دوران به مرکز O_1 و زاویه α و به مرکز O_2 و زاویه β ، یک انتقال است ، اگر $\alpha+\beta=360$ باشد .

اثبات. می خواهیم ثابت کنیم که اگر نقطه A پس از دو دوران مذکور به نقطه B برود آنگاه طول پاره خط AB مقدار ثابتی است .



فرض کنید که دوران به مرکز O_1 و زاویه دوران α در جهت تعیین شده نقطه دلخواه A را به نقطه C مـی بـرد و دوران به مرکز O_2 (زیرا $\alpha+\beta=360$) زاویه β یا $360-\alpha$ و مرکز O_2 نقطه C را به نقطه B می برد . طبق ویژگـی هـــای دوران خـــواهیم داشـــت : در دوران اول $AO_1 = CO_1$ و $\angle CO_1A=\alpha$ و در دوران دوم $CO_2 = BO_2$ و $\angle CO_2B=360-\alpha=\beta$ (توجه کنید که زاویه خارجی که با یک پیکان مشخص شده است مورد نظر ما می باشـد.)

بنابراین $\angle CO_2B=\alpha$ که منظور از این زاویه همان زاویه داخل مثلث $\overset{\Delta}{CO_2B}$ می باشد. از متـساوی الـساقین بـودن مثلث های $\overset{\Delta}{CO_2B}$ و $\overset{\Delta}{CO_1A}$ داریم :

$$\angle O_2CB=\angle O_2BC=90-\frac{\alpha}{2},\angle O_1AC=\angle O_1CA=90-\frac{\alpha}{2}$$

بنابراین $\angle O_1CA=\angle O_2CB$ خواهد بود . با اضافه کردن زاویه $\angle O_1CB$ به دو طرف تساوی خواهیم داشت :

$\angle O_1CA+\angle O_1CB=\angle O_2CB+\angle O_1CB$ یا $\angle ACB=\angle O_1CO_2$

بنابر قضیه سینوس ها در مثلث ها داریم :

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AC}{sin\alpha}=\frac{CO_1}{sin(90-\frac{\alpha}{2})} \to \frac{AC}{CO_1}=\frac{sin\alpha}{sin(90-\frac{\alpha}{2})}$$

$$C\overset{\Delta}{O_1}O_2: \frac{BC}{sin\alpha}=\frac{CO_2}{sin(90-\frac{\alpha}{2})} \to \frac{BC}{CO_2}=\frac{sin\alpha}{sin(90-\frac{\alpha}{2})}$$

بنابر آنچه گفته شد دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{CO_1O_2}$ متشابه اند ؛ زیرا $\frac{AC}{CO_1}=\frac{BC}{CO_2}$ و زوایای $\angle O_1CO_2$ و $\angle ACB$ با یکدیگر برابرند .

پس اضلاع نظیر دو مثلث نیز با هم متناسبند :

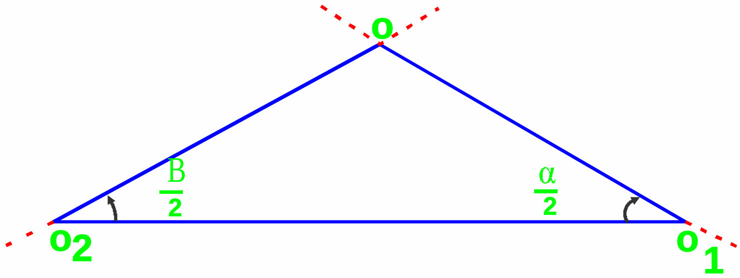
$$\frac{AB}{O_1O_2}=\frac{AC}{CO_1}=\frac{BC}{CO_2}=\frac{sin\alpha}{sin(90-\frac{\alpha}{2})}$$

چون α مقدار مشخصی می باشد ، بنابراین مقدار $\frac{sin\alpha}{sin(90-\frac{\alpha}{2})}$ نیز مقدار ثابتی است که آن را k می نامیم با جایگذاری خواهیم داشت $\frac{AB}{O_1O_2}=k$ ، پس $AB=KO_1O_2$. یعنی طول AB هم مقدار ثابتی است . از طرفی می دانیم اگر $\alpha+\beta=360$ باشد همان طور که در اثبات قضیه قبل گفته شد پاره خط های متناظر اشکال F و F_2 موازی هستند (با یکدیگر زاویه ۳۶۰ درجه می سازند). در ضمن برای شناختن F و F_2 به اثبات قضیه ۷ مراجعه کنید . بنابراین چون پاره خط ها موازی می مانند و فاصله هر خط با خط متناظرش در شکل F_2 مقدار ثابتی است ، حکم ثابت شده است و نتیجه دو دوران مذکور در این حالت یک انتقال می باشد .

نکته. حالتی که ACO_1 و BCO_2 مثلث تشکیل نمی دهند و هر سه نقطه بر روی یک خط راست قرار می گیرند ، یعنی $\alpha=\beta=180$ را نیم دور می نامند که در همین بخش آن را بررسی می کنیم .

قضیه ۹. نحوه به دست آوردن مرکز دوران O در قضایای قبلی : در ترکیب دو دوران به مراکز O_1 و O_2 و زوایای دوران α و β برای بدست آوردن مرکز دوران جدید در حالتی که $\alpha + \beta \neq 360$ باید از مرکز O_1 به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ درجه نسبت به پاره خط O_1O_2 جدا کنیم و از مرکز O_2 نیز به اندازه $\frac{\beta}{2}$ درجه نسبت به پاره خط O_1O_2 جدا کنیم . محل برخورد این دو خط نشان دهنده مرکز دوران جدید (یعنی O) می باشد.(مطابق شکل زیر)

نکته. جهت زاویه های $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ را با توجه به جهت انتخاب شده و مثبت و منفی بودن آنها در نظر می گیریم .



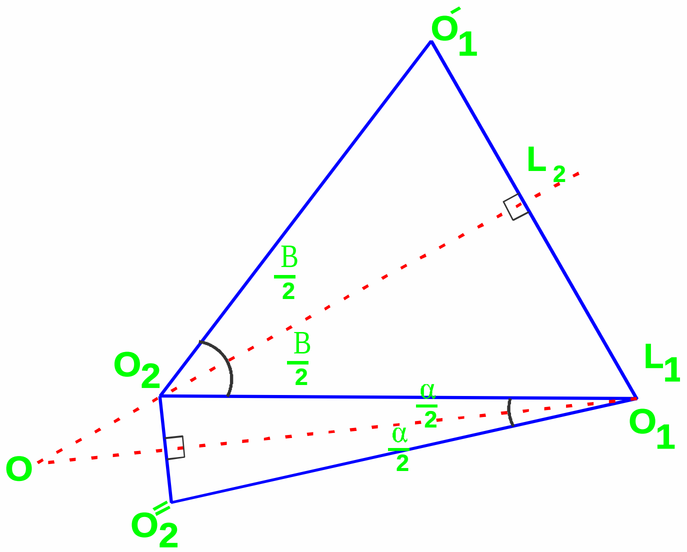
اثبات. چون در دوران اول O_1 ثابت می ماند و در دوران دوم O_1 به O_1' برده می شود ، در مجموع دو دوران داریم $\angle O_1O_2O_1' = \hat{\beta}$ و $O_1'O_2 = O_1O_2$. و مشابهاً مجموع دو دوران یک نقطه O_2'' را به نقطه O_2 می برد به طوری که $O_2''O_1 = O_2O_1$ و $\angle O_2''O_1O_2 = \alpha$ ، زیرا دوران اول O_2'' را به O_2 می برد و دوران دوم O_2 را ثابت نگه می دارد .

از آنچه گفته شد طبق ویژگی های دوران نتیجه می شود مرکز دوران جدید از نقاط O_2 و O_2'' و هم چنین O_1 و O_1' به یک فاصله است (چون O_1' دوران یافته با زاویه $\alpha + \beta$ حول این مرکز جدید می باشد و همین طور دوران O_2 یافته O_2'' می باشد .) بنابراین O روی عمودمنصف های O_2O_2'' و O_1O_1' قرار دارد . پس محل برخورد این عمودمنصف ها که به ترتیب با L_1 و L_2 در شکل نشان داده شده اند جواب مسئله است .

از طرفی چون مثلث های $\overset{\Delta}{O_1O_2O_1'}$ و $\overset{\Delta}{O_1O_2O_2''}$ متساوی الساقین می باشند($O_2O_1 = O_2O_1'$ و

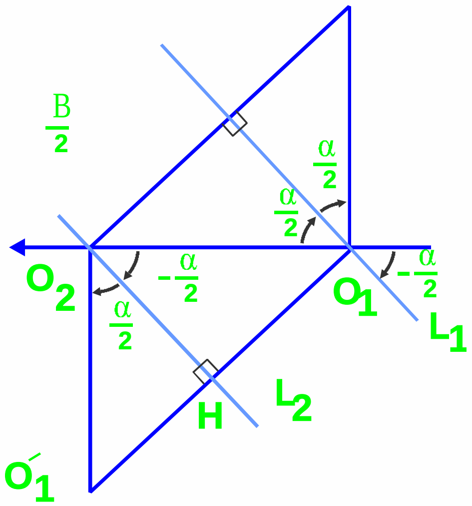
$O_1O_2 = O_1O_2''$) ، بنابراین عمودمنصف ساق های این مثلث ها از راس رو به رو می گذرد و نیمساز آن نیز خوهد بـود .

بنابراین خطوط L_1 و L_2 یعنی عمود منصف های مذکور با خط O_1O_2 به ترتیب زاویه $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ می سازند؛ پس حکم ثابت شده است.



قضیه ۱۰. نحوه به دست آوردن بردار انتقال ذکر شده در قضیه ۸ : در ترکیب دو دوران به مراکز O_1 و O_2 زوایـای دوران α و β برای به دست آوردن اندازه بردار انتقال در حالتی که $\alpha + \beta = 360$ است بایـد از مرکـز O_1 بـه انـدازه $\frac{\alpha}{2}$ درجه نسبت به O_1O_2 جدا کنیم . خط حاصل را L_1 می نامیم و از مرکز O_2 نیز به اندازه $\frac{-\alpha}{2}$ درجه نسبت بـه پـاره خط O_1O_2 جدا می کنیم . خط حاصل را L_2 می نامیم . فاصله این دو خط موازی برابر نصف اندازه بردار مذکور و راستای آن خطی ست که بر هر دو عمود می باشد ، و جهت آن از طرف L_1 به طرف L_2 می باشد .

نکته. پاره خط O_1O_2 جهت دار بوده و از طرف O_1 به O_2 می باشد.



اثبات. ابتدا باید ثابت کنیم دو خط L_1 و L_2 موازی اند . می دانیم که مورب O_1O_2 روی خط های L_1 و L_2 زاویه های مساوی ایجاد می کنند ، پس دو خط L_1 و L_2 موازی اند. فرض کنید O_1' دوران یافته O_1 حول O_2 باشد ، در ضمن O_1' دوران یافته O_1 حول مرکز ترکیب دو دوران می باشد (چون دوران یافته O_1 حول O_1 خودش O_1 می باشد) .

محل برخورد خط L_2 با پاره خط O_1O_1' را H می نامیم و جهت دوران را در خلاف عقربه های ساعت فرض می کنیم پس زاویه $\angle O_1O_2O_1$ برابر $+360-\beta$ یا همان α می باشد .پس چون $\angle HO_2O_1 = \frac{-\alpha}{2}$ است؛ بنابراین $\angle O_1'O_2H = \frac{-\alpha}{2}$ می باشد. بنابراین خط L_2 نیمساز $\angle O_1O_2O_1$ می باشد از طرفی $O_2O_1' = O_2O_1$. یعنی مثلث $O_1\overset{\Delta}{O_2}O_1'$ متساوی الساقین است و می دانیم که نیمساز در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه نیز می باشد .

پس O_2H بر O_1O_1' عمود است و O_1H (فاصله دو خط موازی L_1 و L_2) برابر نصف O_1O_1' می باشد ؛ پس طبق قضیه (۸) چون در این حالت ترکیب دو دوران یک انتقال است با طول ثابت ، پس O_1O_1' برابر طول بردار انتقال می باشد و پس اندازه بردار برابر $2\overrightarrow{O_1H}$ می باشد و حکم ثابت شده است .