ضرب خارجی بردارها

همان طور که دیدید ایده ضرب داخلی بردارها ، ایده خوبی در اثبات تعامد خطوط در مسائل المپیاد ریاضی بودند .

به همین ترتیب ضرب دیگری به نام ضرب خارجی بردارها ، ایده مناسبی در اثبات توازی خطوط در مسائل هندسه می‌باشد .

تعریف. ضرب خارجی روی فضای $\mathbb{R}^3$ تعریف می شود و از دیدگاه هندسی حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با برداری عمود بر صفحه گذرنده از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که اندازه این بردار که آن را با $|\vec{a}\times\vec{b}|$ نشان می دهیم ، به طریق زیر محاسبه می شود :

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\alpha$$

که α برابر است با زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

از آنجا که $\sin 0^0$ برابر با صفر است ؛ نتیجه می گیریم که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند، اگر و تنها اگر $|\vec{a}\times\vec{b}| = 0$.

چند خاصیت مهم از ضرب خارجی بردارها :

۱. $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

۲. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

۳. اما در حالت کلی : $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

قضیه ۱. می دانیم $S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ، که γ زاویه بین دو ضلع با طول های a و b می باشد ، بنابراین با توجه به تعریف ضرب خارجی داریم: $S(\overset{\Delta}{ABC}) = \|\vec{a}\times\vec{b}\|/2$

قضیه ۲. به ازای هر نقطه دلخواه O درون مثلث ΔABC ، داریم :

$$\sum_{A,B,C} \left\| \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \right\| . \overrightarrow{OC} = 0$$

(این قضیه در بخش مکان های هندسی اثبات می شود)

($\sum_{A,B,C} f(A,B,C)$ به معنی حاصل جمع جایگشت های A و B و C روی f است .)

برای مثال اگر O برابر G ، مرکز ثقل مثلث باشد ΔABC، آن گاه داریم :

$$\sum_{A,B,C} \left\| \overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GB} \right\| . \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{A,B,C} \frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{3} . \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{A,B,C} \overrightarrow{GA} = \vec{0}$$

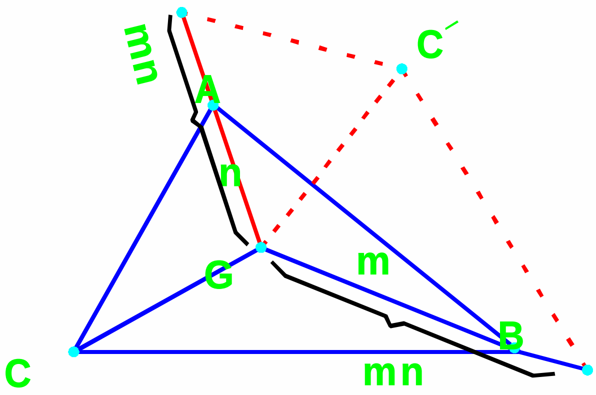
که قبلاً نیز از طریق دیگری ثابت شده بود.

مثال ۱. در مثلث ΔABC ، m ، n ، t اندازه فواصل مرکز ثقل مثلث G ، تا رئوس A ، B و C هستند . مطابق شکل روی GB و GA به اندازه mn جدا کرده و یک لوزی با نقاط پدید آمده و رأس G ایجاد می نماییم و راس چهارم آن را C' می نامیم . به همین طریق B' و A' پدید می آیند .

الف. ثابت کنید :

$$\frac{S(\overset{\Delta}{A'B'C'})}{S(\overset{\Delta}{ABC})} \le \frac{(m+n+t)^2}{3}$$

ب. ثابت کنید مرکز ثقل مثلث های ΔABC و $\Delta A'B'C'$ برهم منطبق است، اگر و تنها اگر ΔABC متساوی الاضلاع باشد .



حل .

الف. می دانیم :

$$S(A'\overset{\Delta}{B'}C') = S(B'\overset{\Delta}{G}C') + S(C'\overset{\Delta}{G}A') + S(A'\overset{\Delta}{G}B')$$

$$\Rightarrow S(A'\overset{\Delta}{B'}C') = \frac{1}{2}\left[\left|\overrightarrow{GB'}\times\overrightarrow{GC'}\right| + \left|\overrightarrow{GC'}\times\overrightarrow{GA'}\right| + \left|\overrightarrow{GA''}\times\overrightarrow{GB''}\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(t^2\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GB}\right| + nt\left|\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GC}\right| + mt\left|\overrightarrow{GC}\times\overrightarrow{GA}\right|\right)\right.$$

$$+\left(m^2\left|\overrightarrow{GC}\times\overrightarrow{GA}\right| + mt\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GB}\right| + mn\left|\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GC}\right|\right)$$

$$\left.+\left(n^2\left|\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GC}\right| + nm\left|\overrightarrow{GC}\times\overrightarrow{GA}\right| + nt\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GB}\right|\right)\right] \qquad :(*)$$

از طرفی می دانیم که:

$$S(A\overset{\Delta}{B}C) = 3S(A\overset{\Delta}{G}C) = 3S(C\overset{\Delta}{G}B) = 3S(B\overset{\Delta}{G}A)$$

$$\Rightarrow S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{GA}\times\overrightarrow{GC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{GC}\times\overrightarrow{GB}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GA}\right|$$

بنابراین با توجه به رابطه (*) خواهیم داشت :

$$S(A'\overset{\Delta}{B'}C') \le \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^2 . S(A\overset{\Delta}{B}C) + \frac{2}{3}tmS(A\overset{\Delta}{B}C)\right.$$

$$+\frac{2}{3}tnS(A\overset{\Delta}{B}C) + \frac{2}{3}m^2 S(A\overset{\Delta}{B}C) + \frac{2}{3}mtS(A\overset{\Delta}{B}C)$$

$$+\frac{2}{3}mnS(A\overset{\Delta}{B}C) + \frac{2}{3}n^2 S(A\overset{\Delta}{B}C) + \frac{2}{3}nmS(A\overset{\Delta}{B}C)$$

$$\left.+\frac{2}{3}ntS(A\overset{\Delta}{B}C)\right] \Rightarrow S(A'\overset{\Delta}{B'}C')$$

$$\le \frac{1}{3}S(A\overset{\Delta}{B}C).[t^2 + m^2 + n^2 + 2mn + 2nt + 2tm]$$

$$= \frac{1}{3}(m+n+t)^2 S(A\overset{\Delta}{B}C) \Rightarrow \frac{S(A'\overset{\Delta}{B'}C')}{S(A\overset{\Delta}{B}C)}$$

$$\le \frac{1}{3}(m+n+t)^2$$

ب) ابتدا فرض کنید مرکز ثقل $\Delta A'B'C'$ یعنی G' ، بر G منطبق باشد ، خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \qquad (۱)$$

$$\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0} \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow (m+t)\overrightarrow{GA} + (t+n)\overrightarrow{GB} + (n+m)\overrightarrow{GC} = \vec{0} \qquad (۳)$$

زیرا می دانیم :

$$\overrightarrow{GA'} = t.\overrightarrow{GB} + m\overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{GB'} = n\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{GC'} = n\overrightarrow{GB} + m\overrightarrow{GA}$$

پس ، با استفاده از دستگاه دو معادله ای ((۱)و(۳)) خواهیم داشت :

$$m + t = t + n = n + m$$

در نتیجه : $m = n = t$ ، پس مثلث ΔABC متساوی الاضلاع خواهد بود .

برعکس ، اگر فرض کنید ΔABC متساوی الاضلاع است، در نتیجه :

$|GA| = |GB| = |GC|$ و $m = n = t$ حکم با ضرب معادله

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

در $2m$ نتیجه می گردد، یعنی G' و G منطبق خواهند بود .

حال به بیان دو رابطه مهم بین توازی و تعامد و یا به طور دقیق تر ضرب خارجی و ضرب داخلی بردارها می پردازیم:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} \qquad (۱)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a} \qquad (۲)$$