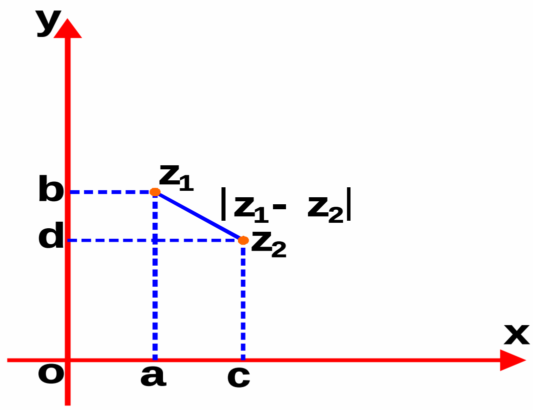
نُرم یا مُدول:

مقدار $\sqrt{a^2+b^2}$ را با $|z|$ نمایش می‌دهیم و آن را نرم z می‌نامیم. همان‌طور که دیدید، داریم:

$$|z|^2 = z.\bar{z}$$



بنابراین:

$$|z_1 - z_2| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

که بیانگر فاصله دو نقطه z_2, z_1 می‌باشد، (واضح است که $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$) و با توجه به شکل، از قضیه فیثاغورث درستی این ادعا نتیجه خواهد شد.

حال چند ویژگی دیگر از $|z|$ را بیان می‌کنیم که به سادگی می‌توانید درستی آنها را ثابت کنید:

(۱) $$|z| = |\bar{z}|$$

(۲) $$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| \Rightarrow |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (۳)$$

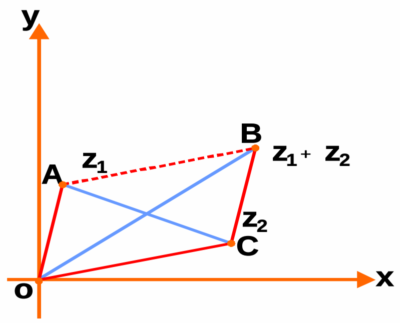
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (۴)$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \qquad (۵)$$

به دلیل اهمیت خواص (۴) و (۵) به اثبات آنها می‌پردازیم:

همان‌طور که گفتیم، $(z_1 + z_2)$ رأس متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن z_1، z_2 و ۰ هستند $(z_2 \ne kz_1)$. بنابراین اگر برای مثلث ΔOBC نابرابری مثلثی را بنویسیم، خواهیم داشت:

$OB < BC + OC$



در نتیجه

$$|z_1 + z_2| < |(z_1 + z_2) - z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

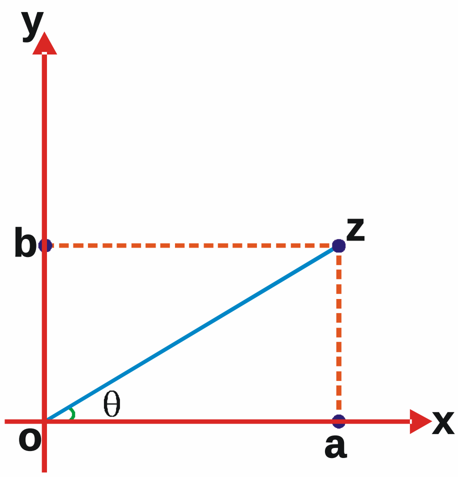
و اگر $z_2 = kz_1$ باشد، z_1، z_2، $z_1 + z_2$ و *o*، در امتداد هم قرار می‌گیرند و حالت تساوی برقرار می‌شود. همچنین اگر $z_2 \ne kz_1$ باشد، با نوشتن نابرابری مثلثی در مثلث ΔOAC، داریم:

$$AC + OC > OA \Rightarrow |z_2 - z_1| + |z_2| > |z_1| \Rightarrow |z_2 - z_1| > |z_1| - |z_2|$$

و به همین ترتیب: $|z_2 - z_1| > |z_2| - |z_1|$. پس $|z_2 - z_1| > \big||z_2| - |z_1|\big|$ ، و در صورتی که $z_2 = kz_1$، حالت تساوی برقرار می‌گردد.

حال نمایشی دیگر از اعداد مختلط را معرفی می‌کنیم که به نمایش قطبی معروف است.

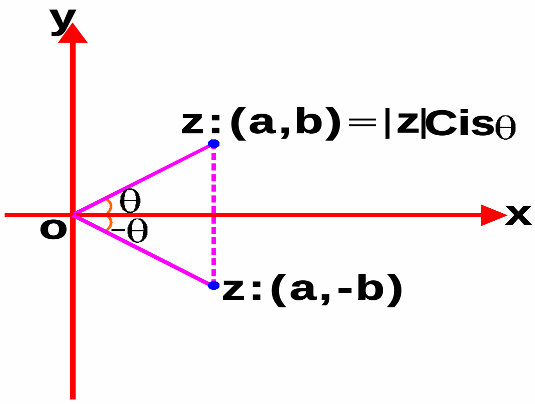
می‌دانیم که:



$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = |z|.\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

که مطابق شکل، معادل $z = |z|.(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ است. عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را بـا نمـاد $Cis\theta$ نمایش می‌دهیم، پس: $z = |z|.Cis\theta$. θ را آرگومان عدد z گویند، که با $arg(z)$ نشان داده می‌شود.

حال آنچه را تاکنون بحث نموده‌ایم با نمایش قطبی نیز نشان می‌دهیم. گفتیم اگر $z = (a,b)$ آنگاه $\bar{z} = (a,-b)$، بنابراین اگر $\vec{Oz}$ با محور x ها زاویه θ بسازد، آنگاه $\vec{O\bar{z}}$ با محور x ها زاویه $-\theta$ می‌سازد. در نتیجه: $\bar{z} = |z|.Cis(-\theta)$.



همچنین، با توجه به تعریف $Cis\theta$، داریم:

$$Cis\theta = Cis(2k\pi + \theta)$$

به این ترتیب در صورتیکه θ بین $-\pi, \pi$ باشد، به آن آرگومان اصلی z گویند و با علامت $Arg(z)$ نشان داده می‌شود. (به حرف بزرگ A در اول Arg توجه کنید).

حال فرض کنید $z_1 = |z_1|.Cis\alpha$, $z_2 = |z_2|.Cis\beta$، به این ترتیب داریم:

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.Cis\alpha.Cis\beta$$

$$= |z_1|.|z_2|.(cos\alpha + i\,sin\alpha).(cos\beta + i\ sin\beta)$$

$$= |z_1|.|z_2|.((cos\alpha.cos\beta - sin\alpha.sin\beta) + i\,(sin\alpha.cos\beta + sin\beta.cos\alpha))$$

$$= |z_1|.|z_2|\left(cos(\alpha + \beta) + i\,sin(\alpha + \beta)\right)$$

$$= |z_1|.|z_2|Cis(\alpha + \beta)$$

نتیجه.

۱. **داریم:** $|Cis\theta| = 1$.

۲. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.

۳. $Cis\alpha.Cis\beta = Cis(\alpha + \beta)$، **بنابراین با استقراء می‌توان این رابطه را تعمیم داد و به رابطه زیر رسید:**

$$\forall n \in \text{¥} \; ; \; \left(Cis(\alpha)\right)^n = Cis(n\alpha)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(|z_1| Cis\alpha\right)}{\left(|z_2| Cis\beta\right)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} Cis\alpha.Cis(-\beta) = \frac{|z_1|}{|z_2|} Cis(\alpha - \beta)$$

زیرا داریم:

$$Cis(\beta).Cis(-\beta) = Cis\left(\beta + (-\beta)\right) = cos(0)$$

$$= cos(0) + i\,sin(0) = 1$$

پس:

$$Cis(-\beta) = \frac{1}{Cis\beta}$$

نتیجه.

۱. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

۲. $\frac{Cis\alpha}{Cis\beta} = Cis(\alpha - \beta)$ ، **همچنین داریم:**

$$\forall n \in \text{¥} \; ; \left(Cis\alpha\right)^{-n} = Cis(-n\alpha)$$

حال فرض کنید $z=|z|Cis\theta$، جوابی برای معادله $x^n=1$ باشد، بنابراین داریم:

$$z^n=1\Rightarrow \left|z^n\right|=1\Rightarrow |z|^n=1\Rightarrow |z|=1$$

در نتیجه: $z=Cis\theta$. پس: $z^n=\left(Cis\theta\right)^n=Cis\left(n\theta\right)$ و بنابراین:

$$cosn\theta+i\ \ sin\,n\theta=1\Rightarrow \left.\begin{array}{r} cosn\theta=1 \\ \\ sinn\theta=0 \end{array}\right\}\Rightarrow n\theta=2k\pi\Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n}$$

که $k=0,1,2,...,n-1$ می‌باشد. به عبارت دیگر هر z_k به شکل

$$\left(k\in\{0,1,2,...,n-1\}\right)Cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right)=cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\ sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

یک ریشه معادله $x^n=1$ خواهد بود و بالعکس (زیرا می‌دانیم تعداد ریشه‌های یک معادله درجه n، اعم از حقیقی و یا موهومی، n تاست). یعنی ما تمام n ریشه معادله $x^n=1$ را یافته‌ایم.