قضیه های کلیفرد

در این بخش دنباله ای نامتناهی از قضیه هایی را که و.ک. کلیفرد (۱۸۴۵-۱۸۷۹) کشف نموده، اثبات می‌کنیم. مرحله حساس در این کار حل لم زیرین است که در بخشهای دیگر نیز از آن استفاده می‌شود.

لم ۱. چهار دایره C_4, C_3, C_2, C_1 را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. فرض کنید C_2, C_1 یکدیگر را در w_1, z_1 ، C_3, C_2 یکدیگر را در w_2, z_2 ، C_4, C_3 یکدیگر را w_3, z_3 بالاخره C_1, C_4 یکدیگر را در w_4, z_4 قطع کنند. در این صورت نقاط z_4, z_3, z_2, z_1 همدایره خواهند بود، اگر و فقط اگر w_4, w_3, w_2, w_1 همدایره باشند.

برهان. بنابه فرض چهار نسبت ناهمسار زیر حقیقی اند.

$$(z_1, w_2; z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - w_2}{w_2 - w_1}$$

$$(z_1, w_3; z_3 w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}$$

$$(z_3, w_4; z_4 w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}$$

$$(z_4, w_1; z_1 w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \Big/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}$$

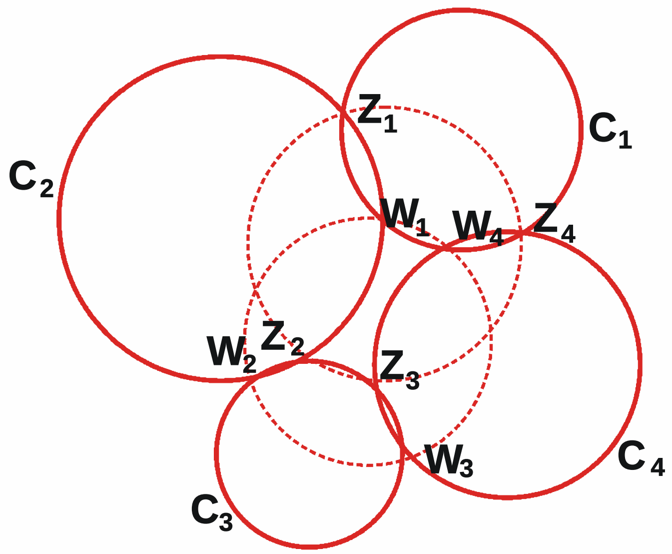
از این رو

$$\frac{(z_1, w_1; z_2 w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)}$$

$$=\left\{\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\Big/\left(\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}\right)\right\}.\left\{\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)\Big/\left(\frac{w_1-w_4}{w_3-w_4}\right)\right\}$$

$$=(z_1, z_3; z_2, z_4).(w_1, w_3; w_2, w_4)$$

حقیقی است. پس $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ حقیقی است اگر و فقط اگر $(w_1, w_3; w_2, w_4)$ حقیقی باشد.



شکل۱

n خط در یک صفحه را در وضعیت کلی گوییم، اگر هیچ دو تای آنها متوازی و هیچ سه تایی آنها متقارب نباشند.

نقطه تلاقی دو خط در وضعیت کلی را نقطه کلیفرد آنها می‌نامیم. از سه خط در وضعیت کلی سه نقطه کلیفرد، با انتخاب دو تا از آنها در هر بار به دست می‌آید، دایره ای را که از این سه نقطه می‌گذرد (دایره محیطی مثلث حاصل از این سه خط)، دایره کلیفرد این سه خط می‌نامیم.

اکنون گیریم چهار خط C_4, C_3, C_2, C_1 در وضعیت کلی داده شده اند. فرض می‌کنیم z_{jk} نقطه تلاقی خطوط C_k, C_j (بجز ∞) و C_{lmn} دایره محیطی $\Delta z_{mn}z_{nl}z_{lm}$ (بدون در نظر گرفتن

جایگشتهای اندیسها مثلاً ($z_{jk} = z_{kj}, C_{lmn} = C_{nlm}$) باشند. با به کارگیری لم ۱. برای $C_{134}, C_1, C_2, C_{234}$ و ملاحظه اینکه

C_{234}, C_2 در نقطه های z_{24}, z_{23} ؛

C_2, C_1 در نقطه های z_{12}, ∞ ؛

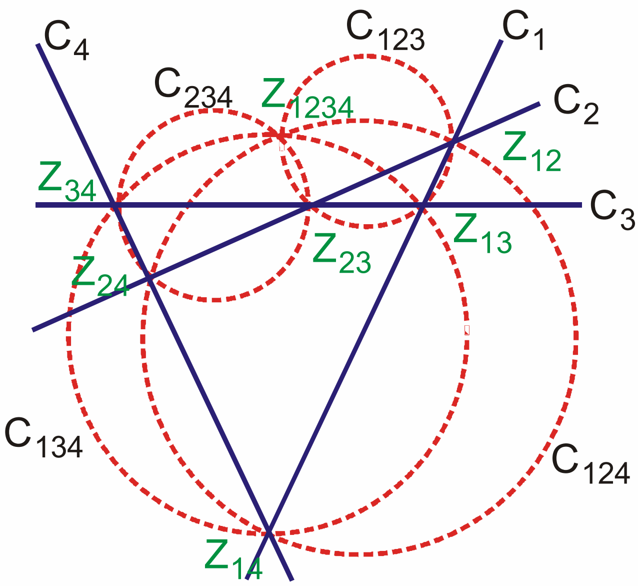
C_{134}, C_1 در نقطه های z_{14}, z_{13} ؛

C_{234}, C_{134} در نقطه های z_{1234}, z_{34} ،

متقاطع اند و z_{1234} نقطه تلاقی « مجدد » C_{134}, C_{234} (یعنی بجز z_{34}) است، پس چون $z_{34}, z_{13}, \infty, z_{23}$ همخط (واقع بر C_3) اند، نتیجه می گیریم که $z_{134}, z_{14}, z_{12}, z_{24}$ همدایره اند. اما دایره محیطی $\Delta z_{24} z_{12} z_{14}$ دایره C_{124} است. بنابراین دایره های $C_{124}, C_{134}, C_{234}$ در نقطه z_{1234} همدیگر را قطع می کنند.

از سوی دیگر، اگر توجه کنیم که با همان $C_{134}, C_1, C_2, C_{234}$ نقاط $z_{34}, z_{14}, \infty, z_{24}$ همخط (همه واقع بر C_4) هستند، نتیجه می‌گیریم که نقاط $z_{1234}, z_{13}, z_{12}, z_{23}$ همدایره هستند. اما دایره محیطی $\Delta z_{23} z_{12} z_{13}$ دایره C_{123} است، پس دایره های $C_{123}, C_{134}, C_{234}$ در نقطه z_{1234} همدیگر را تلاقی می‌کنند.

پس، نشان دادیم که دوایر $C_{123}, C_{124}, C_{134}, C_{234}$، در نقطه z_{1234} که آن را نقطه کلیفرد چهار خط C_4, C_3, C_2, C_1 می نامیم، همدیگر را می برند.



شکل۲

پیش از پرداختن به حالت پنج خط، اشاره می‌کنیم که: نقطه z_{jk} فصل مشترک خطوط C_kC_j است؛ دایره C_{lmn} از نقاط z_{lm}, z_{ln}, z_{mn} می گذرد و نقطه z_{klmn} فصل مشترک دوایر $C_{klmn}, C_{kln}, C_{kmn}, C_{lmn}$ است. به خصوص دوایر C_{kmn}, C_{lmn} در نقاط z_{mn}, z_{klmn} متقاطع اند.

حال آماده ایم که به مرحله بعدی بپردازیم.

فرض کنید پنج خط C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 در وضعیت کلی داده شده باشند. با حفظ نمادهایی که در بالا به کار بردیم و در نظر گرفتن چهار خط در هر بار، پنج نقطه کلیفرد $z_{1234}, z_{1235}, z_{1245}, z_{2345}$ را به دست می‌آوریم. حال می‌گوییم که این پنج نقطه کلیفرد همدایره‌اند. برای اثبات آن کافی است ثابت کنیم که هر چهار نقطه از این پنج نقطه کلیفرد همدایره اند. مثلاً چهار نقطه $z_{1234}, z_{1235}, z_{1245}, z_{1345}$ را در نظر می گیریم. این نقاط را می‌توان به ترتیب فصل مشترک دایره های $C_{134}, C_{124}, C_{125}, C_{123}, C_{145}, C_{125}, C_{135}, C_{134}$ در نظر گرفت.

دومین نقطه تقاطع این زوج دایره ها عبارت اند از نقاط $z_{14}, z_{12}, z_{15}, z_{13}$ که همخط اند (همه بر C_1 قرار دارند) و لذا بنابر لم ۱. نتیجه مطلوب را به دست می‌آوریم. دایره ای که بدین ترتیب به دست می‌آید دایره کلیفرد خطوط C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 نامیده می شود و C_{12345} نشان داده می‌شود.

حال شش خط در وضعیت کلی $C_6, C_5, C_4, C_3, C_2, C_1$ داده شده اند. با گرفتن پنج خط در هر بار، شش دایره کلیفرد به دست می‌آوریم. می‌گوییم که این شش دایره در یک نقطه، نقطه کلیفرد شش خط، متلاقی اند. برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که هر سه دایره از شش دایره در یک نقطه متلاقی اند. به دقت توجه کنید: ارائه مثالی از چهار دایره که هر سه تای آنها در یک نقطه متلاقی باشند بدون اینکه هر چهار دایره در یک نقطه متلاقی باشند آسان است، اما در مورد پنج دایره با بیشتر این امر میسر نیست.

فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم که دایره های $C_{12456}, C_{13456}, C_{23456}$ در یک نقطه متلاقی اند. رشته ای مرکب از چهار دایره $C_{13456}, C_{145}, C_{245}, C_{23456}$ را در نظر می گیریم. این دو دایره دو به دو در نقاط: $z_{123456}, z_{3456}, z_{1456}, z_{1345}, z_{1245}, z_{45}, z_{2456}, z_{2345}$ که z_{123456} فصل مشترک C_{13456}, C_{23456} غیر از نقطه z_{3456} است، همدیگر را قطع می‌کنند. اما نقاط $z_{3456}, z_{1345}, z_{45}, z_{23456}$ همه بر دایره C_{345} قرار دارند. لذا نقاط $z_{123456}, z_{1456}, z_{1245}, z_{2456}$ باید همدایره باشند. ولی اولین سه نقطه از این چهار نقطه بر دایره C_{12456} قرار دارند، بنابراین دایره C_{12456} از فصل مشترک C_{13456}, C_{23456} می‌گذرد.

اکنون دیگر می‌توان با کمک گرفتن از استقرای ریاضی کار را به همین نحو ادامه داد.