ریشه های n ام عدد ۱

دایره یکه (دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱) را می توان چنین بیان کرد

$$|\zeta| = 1 \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

بر حسب نمایش قطبی می توان آن را چنین نوشت

$$|\zeta| = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

به ازای این ζ، اگر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$|\zeta \ z| = |\zeta| \ . \ |z|, \quad \arg(\zeta \ z) = \arg\zeta + \arg z$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ضرب در ζ فقط به معنی دور z حول مبدا مختصات است به زاویه

$\theta(=\arg\zeta)$.

فرض کنید $z = x + iy$, $\zeta \ z = x' + iy'$. پس

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

$$\therefore x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

که این عمل یک تبدیل خطی را تداعی می‌کند. چنانچه $x' + iy', x + iy$ را به ترتیب بردارهـای $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ بگیریم، روابط بالا را می توانیم چنین بنویسیم.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

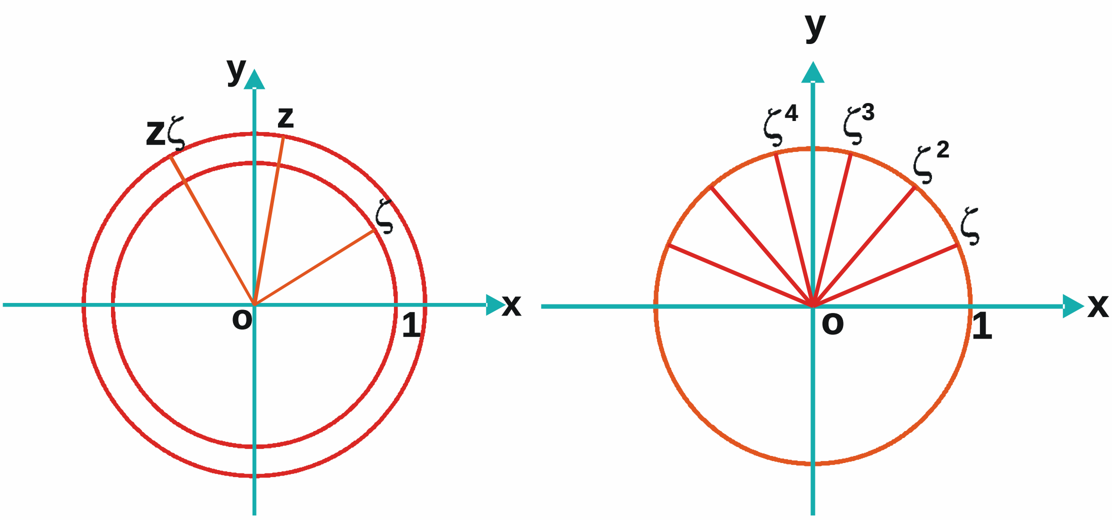
به عکس، چنانچه این روابط برقرار باشد، آنگاه

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

و لذا ضرب $\varsigma = \cos\theta + i\sin\theta$ **در** $z = x + iy$ **درست همان ضرب ماتریس دوران**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

در بردار $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **است.**



شکل۱

مثال۱. برای $\varsigma = \cos\theta + i\sin\theta$ **;** ς^2 **از دوران** ς **به زاویه به دست می‌آید، یک دوران دیگر به زاویه** θ **،** ς^3 **را نتیجه می‌دهد و قس علی‌هذا.**

مثال۲. برای $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. α^2از دوران α به زاویه θ و بزرگ نمودن (با کوچک نمودن) طول آن از راه ضرب در r به دست می‌آید.

مثال۳. اکنون می‌خواهیم همه ریشه های سوم عدد ۱ را پیدا کنیم. یعنی می‌خواهیم معادله $z^3 = 1$ را حل کنیم.

می‌نویسیم $z = (\cos\theta + i\sin\theta)$. در این صورت به موجب فرمول دموآور داریم:

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1$$

$$\therefore r^3 = 1,\ \ \cos 3\theta + i\sin 3\theta = 1$$

چون r یک عدد حقیقی مثبت است خواهیم داشت:

$$r = 1, \qquad \cos 3\theta = 1, \qquad \sin 3\theta = 0$$

$3\theta = 2k\pi$ ؛ یعنی , $\theta = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$

به موجب قضیه بنیادی جبر ، درست سه ریشه باید وجود داشته باشد، که باز به تعداد نامتناهی ریشه ظاهر می‌شود. ولی با توجه به دوره یی بودن توابع سینوسی و کسینوسی داریم

$$w_0 = 1 + i0 = w_3 = w_6 = w_9 = \ldots = w_{-3} = w_{-6} = \ldots$$

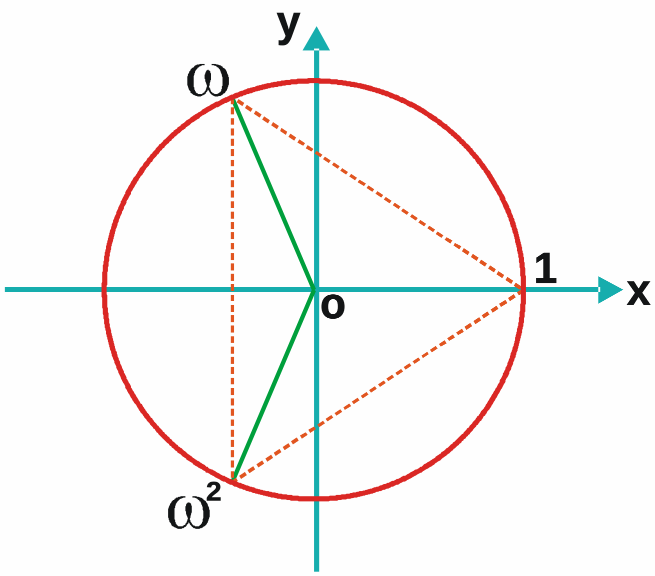
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$= w_4 = w_7 = w_{10} = \ldots = w_{-2} = w_{-5} = \ldots$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$= w_5 = w_8 = w_{11} = \ldots = w_{-1} = w_{-4} = \ldots$$

این سه نقطه راسهای مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره یکه هستند کـه یـک راس آن در نقطـه ۱ است. توجه داریم که اگر قرار دهیم $w=w_1$ آنگاه $w_2=w^2=\overline{w}$ و $w^2+w+1=0$ (← شکل ۲)



شکل۲

اکنون به یافتن همه جوابهای معادله

$$z^n=1$$

می‌پردازیم. فرض کنیم یک جواب آن در دستگاه قطبی به صورت

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

باشد. بنابر فرمول دموآور

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\therefore r=1,\quad \cos n\theta+i\sin n\theta=1$$

بنابراین

$$n\theta = 2k\pi, \qquad \theta = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

به عکس، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

درمعادله مفروض صدق نمی‌کند. حال می‌گوییم که اگر $k' \equiv k$ ، (پیمانه n) آنگاه $z_{k'} = z_k$ بی‌آنکـه از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم

$$k' = k + jn \qquad (j \in ¢, 0 \le k < n)$$

در این صورت

$$z_{k'} = \cos\frac{2k'\pi}{n} + i\sin\frac{2k'\pi}{n}$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi\right)$$

$$= \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = z_k$$

پس حداکثر n ریشه متمایز متناظر با اعداد $k = 0, 1, \ldots, n-1$ وجود دارد. به عکس، اگـر $z_{k'} = z_k$ ، یعنی اگر

$$\cos\frac{2k'\pi}{n} + i\sin\frac{2k'\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

آنگاه به ازای مقداری مانند $m \in ¢$ داریم

$$\frac{2k'\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi$$

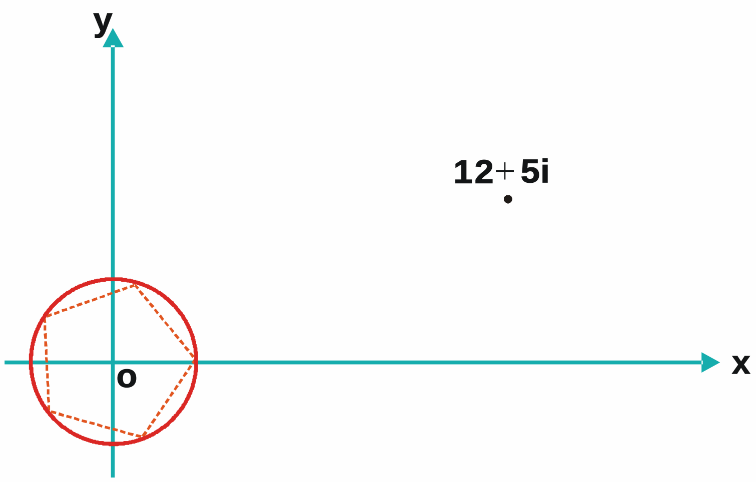
که ایجاب می‌کند داشته باشیم: (پیمانه n) $k' \equiv k$.

گفته های خود را خلاصه می‌کنیم. دقیقاً n ریشه

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

متناظر با مقادیر $k=0,1,2,\ldots,n-1$ وجود دارد. این ریشه ها راسهای یک n - ضلعی منتظم محاط در دایره یکه را تشکیل می‌دهند، که یک راس آن در نقطه ۱ است.

مثال۴. ریشه های $z^5=12+5i$ را بیابید.



شکل۳