نقاط ثابت و رده بندی تبدیلهای موبیوس

یک نقطه z_0 را نقطه ثابت تبدیل موبیوس T گویند، هر گاه $Tz_0 = z_0$. نقطه ثابت یک تبدیل موبیوس

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

باید در معادله

$$cz^2 + (d-a) - b = 0$$

صدق کند. چون این معادله، یک معادله درجه دوم بر حسب z است، اگر تبدیل موبیوسی مانند T سه (یا بیشتر) نقطه ثابت داشته باشد، تمام ضرائب معادله بالا صفر باشند؛ یعنی

$$c = 0, \qquad d - a = 0, \qquad b = 0$$

و بنابراین T تبدیلی همانی است. در آنچه از این پس خواهد آمد، این حالت کنار گذارده خواهد شد.

الف. اگر $T, a-d = 0, c = 0$ معرف انتقال :

$$w = Tz = z + k \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right)$$

است، و لذا نقطه بینهایت، نقطه ثابت یکتای T است. اگر $T, a-d \neq 0, c = 0$ به صورت

$$w = Tz = \left(\frac{a}{d}\right)z + \left(\frac{b}{a}\right)$$

خواهد بود و دو نقطه $b/(d-a)$ و بینهایت نقاط ثابت آن خواهند بود. در این حالت اگر بنویسیم:

$$Sz = z - \frac{b}{d-a}$$

آنگاه داریم:

$$S(Tz)=Sw=w-\frac{b}{d-a}=\left(\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}\right)-\frac{b}{d-a}$$

$$=\frac{a}{d}\left(z-\frac{b}{d-a}\right)=\frac{a}{d}Sz$$

یعنی

$$T=S^{-1}US$$

که در آن $Uz=\frac{a}{d}z$ **معرف یک اتّساع است.**

ب. اگر $D\neq 0, c\neq 0$ **(که** $D=(d-a)^2+4bc$ **مبین معادله درجه دوم مذکور است)، آنگـاه** T **دو نقطه ثابت متمایز**

$$\alpha=\frac{a-d+\sqrt{D}}{2c} \qquad \text{و} \qquad \beta=\frac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$$

دارد. در این حالت، اگر بنویسیم:

$$Sz=\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta}=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

یعنی:

$$S(Tz)=Sw=k(Sz) \qquad \therefore T=S^{-1}\cup S$$

که در آن

$$Uz = kz \qquad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c}\right)$$

یک اتّساع است. اگر $c \neq 0$ و $D = 0$، آنگاه T دارای یک نقطه ثابت یکتای

$$\alpha = \beta = \frac{a-d}{2c}$$

است. چون $z = \alpha, T$ را بر $w = \alpha$ می نگارد، به ازای مقادیر ثابت متناسب k,h می توان نوشت:

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{h}{z-\alpha} + k$$

با قرار دادن $z = \infty$، و $w = \frac{a}{c}$ و همچنین $z = 0$، و $w = \frac{b}{d}$ برای مقادیر h,k خواهیم داشت:

$$k = \frac{2c}{a+d}, \qquad h = 1$$

بنابراین، اگر قرار دهیم

$$Sz = \frac{1}{z-\alpha}$$

آنگاه

$$S(Tz) = Sw = \frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{2\alpha}{a+d} = V(Sz)$$

یعنی

$$T = S^{-1}VS$$

که در آن $Vz = z + k$ یک انتقال است.

دو تبدیل موبیوس T_2, T_1 را متشابه گویند هر گاه تبدیل موبیوس سومی مانند S چنـان وجـود داشته باشد که $T_2 = S^{-1}T_1 S$.

پس قضیه زیر را ثابت نمودیم:

قضیه۱. فرض می‌کنیم

$$w = Tz = \frac{az+b}{cz+d}$$

یک تبدیل موبیوس باشد و $D = (a-d)^2 + 4bc$

الف. حالت $c=0$. اگر $D=0$ ، نقطه بینهایت، نقطه ثابت یکتای T است و T را می توان به صورت نرمال:

$$w = z + k \qquad \left(k = \frac{b}{d}\right)$$

نوشت. اگر $T, D \neq 0$ دارای دو نقطه ثابت متمایز $\gamma = b/(d-a)$ و نقطه بینهایت است و T را می توان به صورت نرمال :

$$w - \gamma = k(z-\gamma) \qquad \left(k = \frac{a}{d}\right)$$

نوشت.

ب. حالت $c \neq 0$. اگر $T, D \neq 0$ دو نقطه ثابت متمایز دارد:

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{D}}{2c}, \qquad \beta = \frac{a-d-\sqrt{D}}{2c}$$

و T را می‌توان به صورت نرمال:

$$\frac{w-\alpha}{W-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad \left(k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c} = \frac{a+d-\sqrt{D}}{a+d+\sqrt{D}}\right)$$

نوشت. اگر $D=0$ ، T یک نقطه ثابت یکتای $\alpha = (a-d)/2c$ دارد و می توان T را به صورت نرمال

$$\frac{1}{w-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+k \qquad \left(k=\frac{2c}{a+d}\right)$$

نوشت.

به عبارت دیگر:

الف. یک تبدیل موبیوس T دارای دو نقطه ثابت است، اگر و فقط اگر $D\neq 0$، و در این حالت T با یک اتساع مشابه است. اما:

ب. T یک نقطه ثابت یکتا دارد اگر و فقط اگر $D=0$ و در این حالت T با یک انتقال مشابه است.

تبصره. فرض می‌کنیم $U_2z=k_2z, U_1z=k_1z$ دو اتساع باشند. U_2, U_1 متشابه اند اگر و فقط اگر ضرایب k_2, k_1 یا برابر باشند و یا عکس یکدیگر (یعنی یا $k_1=k_2$ و یا $k_1=1/k_2$). ولی چون هر انتقال $w=z+k$ را می توان به صورت $\left(\frac{w}{k}\right)=\left(\frac{z}{k}\right)+1$ نوشت، هر انتقالی (از طریق یک اتساع) با انتقال $w=z+1$ مشابه است. به عبارت دیگر، هر دو انتقال با یکدیگر مشابه اند.

فرض کنید

$$w=Tz=\frac{az+b}{cz+d}$$

یک تبدیل موبیوس با $D=(d-a)^2+4bc\neq 0$ باشد. در این صورت تبدیل موبیوسی مانند S با ویژگی $Sw=S(Tz)=U(Sz)$ یعنی $W=UZ$ $(Z=Sz, W=Sw)$، وجود دارد که $UZ=kZ$ یک اتساع است. اگر $k>0$ (ولی $k\neq 1$)، T را تبدیل هذلولوی موبیوس گویند، اگر $|k|=1$ (باز هم $k\neq 1$)، T را بیضوی خوانند و در همه حالات دیگر آن را ثابت زاویه $(loxodromic)$ می‌نامند.

اگر T هذلولوی باشد، U هر خط مار بر مبدا از صفحه Z را برخودش می نگارد، ولی یک دایره به مرکز مبدا را بر دایره دیگری می نگارد. درباره دوایر واقع در صفحه اولیه z و صفحه w ، این بدین معنی است که هر دایره از دسته دایره (بیضوی) P که از دو نقطه ثابت T بگذرد بر خودش نگاشته می شود، در صورتی که هر دایره از دسته دایره های مزدوج (هذلولوی) Q که نقاط حدی آن دو نقطـه ثابـت T باشند، بردایره دیگری از همان دسته دایره ها نگاشته می شود. به ویژه یک دایره آپولونیوس

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=h$$

(که β,α نقاط ثابت h,T عددی ثابت است) بر دایره آپولونیوس دیگر؛

$$\left|\frac{w-\alpha}{w-\beta}\right|=hk$$

نگاشته می‌شود.

اگر T بیضوی باشد، U دورانی است (به شناسه k) در صفحه Z. پس کافی است فقط نقشهای دسته دایره های Q,P مذکور در بخش قبلی را با یکدیگر عوض کنیم.

اگر $D=0$ ، تبدیل موبیوس T را سهموی گوییم، و در این حالت T نقطه ثابت یکتایی دارد و بـا یک انتقال

$$W=VZ=Z+k$$

مشابه است. اما، V هر خط موازی با بردار در صفحه Z را برخودش، و هر خط عمود بر بردار k را بر خط دیگری عمود بر بردار k ، می نگارد. درباره دوایر واقع در صفحه اولیه z ، این امر بدین معنی اسـت کـه دسته دایره ای (سهموی) مانند P مماس بر یکدیگر در نقطه ثابت یکتای T وجود دارد، با این ویژگـی

که هر دایره در P بر اثر T بر خودش نگاشته می شود در حالی کــه هــر دایــره از دســته دایــره هــای (سهموی) مزدوج Q (دسته دایره هایی عمود بر P در نقطه تمــاس مــشترک دوایــر در P) بــر دایــره دیگری از Q نگاشته می‌شود.