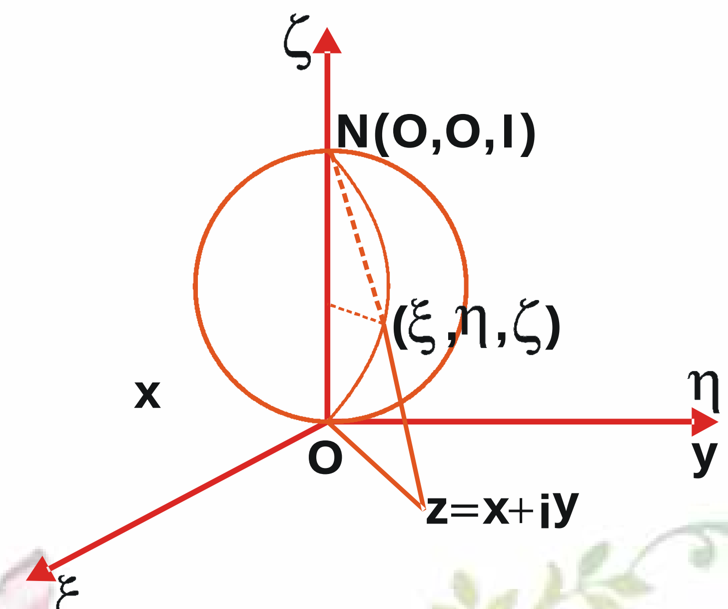
تبدیلهای موبیوس

تصویر گنجنگاشتی

تا کنون اعداد مختلط را با نقاط یک صفحه نمایش داده ایم. ولی اغلب نیاز داریم کـه آنهـا را بـه صورت نقاط واقع بر یک کره هم در نظر بگیریم.

کره ای به قطر واحد، مماس بر صفحه مختلط در مبدا مختصات را در نظر می‌گیریم. معادلـه ایـن کره در دستگاه مختصات متعامد (ξ,η,ς)



شکل۱

به صورت

$$\xi^2+\eta^2+\left(\varsigma-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

خواهد بود. به ازای هر نقطه $z = x + iy$ در صفحه مختلط، پاره خطی که قطب شمال (۱ , ۰ , ۰) را به این نقطه وصل می‌کند، کره را در نقطه یکتایی (غیر از قطب شمال) قطع می‌کند. به عکس به ازای هر نقطه واقع بر کره، غیر از قطب شمال، امتداد پاره خط واصل بین این نقطه و قطب شمال، صفحه مختلط را در نقطه یکتایی می‌برد. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک بین صفحه مختلط و کره ریمان که قطب شمال آن حذف شده است، به وجود می‌آید. برای برداشتن این استثنا، یک نقطه آرمانی به نام نقطه بینهایت را (که با ∞ نشان داده می شود)، متناظر با قطب شمال N، به صفحه مختلط C اضافه می‌کنیم. این صفحه مختلط توسیع یافته را با $\hat{C}$ نمایش می دهیم؛ بنابراین $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$.

فرض می‌کنیم $z = x + iy \in C$، متناظر با نقطه (ξ, η, ς) از کره ریمان باشد، پس با در نظر گرفتن مثلثهای متشابه داریم:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{1-\varsigma} \qquad \therefore\ x = \frac{\xi}{1-\varsigma}, \qquad y = \frac{\eta}{1-\varsigma}$$

یعنی:

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\varsigma}, \qquad x^2 + y^2 = \frac{\varsigma}{1-\varsigma}$$

به عکس اگر ς, η, ξ را بر حسب z, y, x پیدا کنیم خواهیم داشت:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2} = \frac{z+\bar{z}}{2\left(1+|z|^2\right)}$$

$$\eta = \frac{y}{1+|z|^2} = \frac{z-\bar{z}}{2i\left(1+|z|^2\right)}$$

$$\varsigma = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

برای یافتن نگاره یک دایره (یا یک خط) از صفحه بر کره ریمان، این روابط را در معادله یک دایره ″(یک خط اگر $A=0$) از صفحه، یعنی:

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$$

قرار می‌دهیم (که در آن $A,B,C,D \in \mathbb{R}$ و $B^2+C^2 \geq 4AD$)، تا معادله خطی زیر به دست آید.

$$A\varsigma + B\xi + C\eta + D(1-\varsigma) = 0$$

باید توجه داشت که شرط تقاطع این صفحه با کره ریمان، برقراری رابطه:

$$\left|\frac{\frac{1}{2}(A-D)+D}{\sqrt{B^2+C^2+(A-D)^2}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

است که دقیقاً همان شرط $B^2+C^2 \leq 4AD$ و مبین آن است که معادله اصلی در صفحه مختلط، واقعاً معادله یک دایره است. به علاوه اگر $A=0$ ، قطب شمال $(0,0,1)$ در معادله یک صفحه صدق می کند. چون فصل مشترک یک صفحه با کره یک دایره است، نیمه اول قضیه زیر به دست می آید:

قضیه ۱. دوایر و خطوط واقع در صفحه، بر دوایر کره نگاشته می‌شوند. خطوط مستقیم، بر دوایر مار بر قطب شمال نگاشته می‌شوند. به عکس دوایر کره بر دوایر و خطوط صفحه نگاشته می‌شوند.

برهان. برای اثبات عکس قضیه، ملاحظه می کنیم که یک دایره واقع بر کره، فصل مشترک این کره با صفحه ای است مانند:

$$A\xi + B\eta + C\varsigma + D = 0$$

و برای حصول اطمینان از تقاطع کره و صفحه باید شرط:

$$\left|\frac{\frac{1}{2}C+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\le\frac{1}{2}$$

، یعنی $A^2+B^2\ge 4D(C+D)$

برقرار باشد. این معادله برحسب y, x به صورت

$$(C+D)\left(x^2+y^2\right)+Ax+By+D=0$$

در می‌آید. اگر $C+D\neq 0$، این معادله معرف یک دایره است؛ و چنانچه $C+D=0$، (یعنی هنگامی که دایره واقع بر کره از قطب شمال بگذرد)، این معادله معرف یک خط مستقیم است.

به ویژه این مطلب می‌رساند که هر دو خط واقع در صفحه یکدیگر را در نقطه بینهایت قطع می‌کنند. یک ویژگی مهم دیگر تصویر گنجنگاشتی، ویژگی زیر است:

قضیه۲. تصویر گنجنگاشتی حافظ زاویه است.

برهان. بی آنکه از کلیت مساله کاسته شود، می توانیم دو منحنی متقاطع در صفحه را دو خط مستقیم بگیریم. اما دو خط مستقیم در صفحه که در نقطه (x_0, y_0) متقاطع باشند، بر دو دایره از کره ریمان نگاشته می‌شوند که در نقطه $(\xi_0,\eta_0,\varsigma_0)$ و قطب شمال یکدیگر را قطع می کنند و این دو دایره در نقاط تقاطع، زاویه ای مساوی با زاویه دو خط می‌سازند. اگر دو خط در صفحه خطوط:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad \text{و} \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

باشند، نگاره های گنجنگاشتی آنها به ترتیب در صفحات

$$A_1\xi+B_1\eta+C_1(1-\varsigma)=0 \qquad \text{و} \qquad A_2\xi+B_2\eta+C_2(1-\varsigma)=0$$

قرار خواهند داشت. مماسهای مرسوم بر دوای‌ر متناظر در قطب شمال، فصل مشترکهای این صفحات بـا صفحه $\varsigma = 1$ خواهند بود، که معادله های آنها به ترتیب:

$$\begin{cases} A_2\xi + B_2\eta + C_2(1-\varsigma) = 0 \\ \varsigma = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} A_1\xi + B_1\eta + C_1(1-\varsigma) = 0 \\ \varsigma = 1 \end{cases}$$

خواهند شد واضح است که زاویه بین دو خط در صفحات مختلط، درست همان زاویه بین دو خط ممـاس در قطب شمال بر دو دایره متناظر است (زیرا صفحه $\varsigma = 1$ با صفحه مختلط موازی است). ■

باید توجه داشت، که اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید ثابت کنیم که در تصویر گنجنگاشتی ویژگی دارا بودن یک مماس محفوظ می‌ماند. اما این کار مستلزم استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال است.