تعمیمهای قضیه سیمسن

اکنون برهان ساده دیگری برای قضیه سیمسن ۱ اقامه می‌کنیم که تعمیم آن است.

قضیه ۱. فرض کنید R, Q, P پاهای عمودهای وارد از نقطه دلخواه D، به ترتیب بر اضلاع AB, CA, BC از ΔABC باشند. در این صورت R, Q, P همخط اند، اگر وفقط اگر، D بر دایره محیطی ΔABC واقع باشد.

برهان. چون $\angle DPC = \angle DRB \left(= \frac{\pi}{2}\right)$، نقاط D, B, R, P همدایره اند. این دایره را S_B می‌نامیم. همین طور نقاط D, C, Q, P نیز همدایره اند. این دایره را S_C می نامیم. اکنون لم ۱ برای قضیه های کلیفرد را در مورد S_C, AC, AB, S_B به کار می بریم:

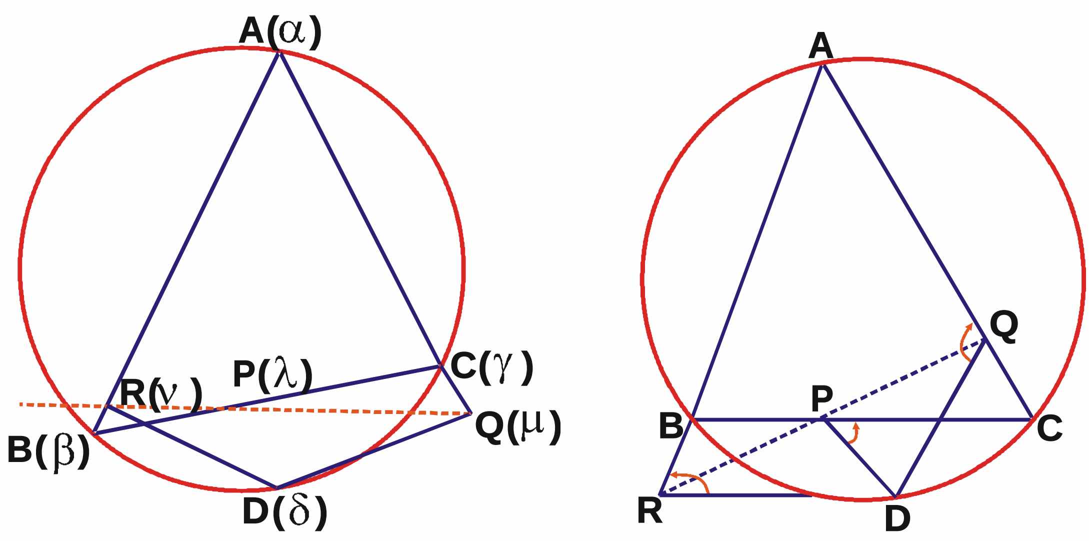
دایره S_B و خط AB در R, B متلاقی اند؛

خطوط AC, AB در A و ∞ متلاقی اند؛

خط AC و دایره S_c در Q, C متلاقی اند؛

دایره های S_B, S_C در P, D متلاقی اند؛

بنابراین: R, Q, P همخط اند $\Leftrightarrow$ P, Q, ∞, R همدایره اند. $\Leftrightarrow$ D, C, A, B همدایره اند.



شکل۱

قضیه۲. فرض می کنیم R, Q, P به ترتیب نقطه هایی بر اضلاع AB, CA, BC (یا امتداد آنها) از ΔABC باشند و فرض می کنیم D نقطه ای با خصوصیت زیر باشد:

$\angle DPC \equiv \angle DQA \equiv \angle DRB$ (پیمانه π)

که در آن همه زوایا جهت دار فرض شده اند. در این صورت نقاط R, Q, P همخط اند، اگر وفقط اگر نقطه D بر دایره محیطی ΔABC واقع باشد.

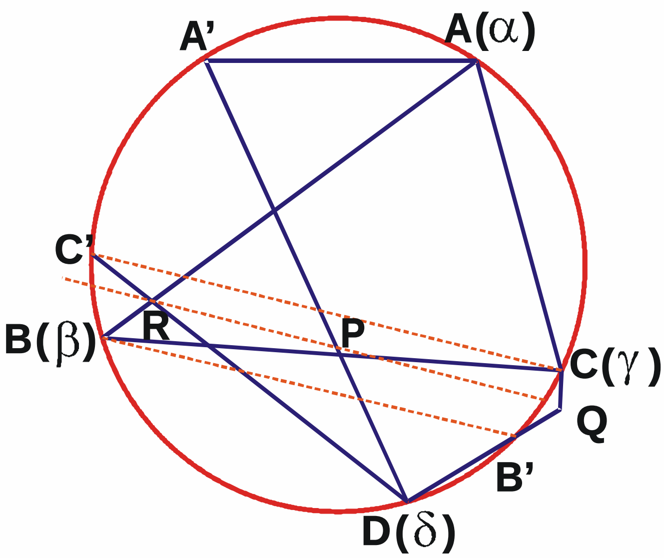
برهان. درست به همان صورت قضیه قبلی است.

قضیه ۳.(ابر[1]) . فرض کنید D, C', C, B', B, A', A هفت نقطه همدایره چنان باشند که $AA' \| BB' \| CC'$ و R, Q, P به ترتیب فصل مشترکهای : $B'D, BC, A'D$ و $AB, C'D, CA$ باشند، در این صورت R, Q, P همخط اند و خطی که از این سه نقطه می گذرد موازی CC', BB', AA' است.

[1] Aubert

برهان دیگر. بدون اینکه از کلیت کاسته شود، می توان دایره مورد نظر را دایره واحد فرض کــرد.

فرض کنید نقاط D, C, B, A به ترتیب با اعداد مختلط $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ نمایش داده شده اند.



شکل۲

پس معادلات خطوط موازی CC', BB', AA' به ترتیب چنین خواهند شد.

$$z+k\bar{z}=\alpha+k\bar{\alpha} \qquad z+k\bar{z}=\beta+k\bar{\beta} \qquad z+k\bar{z}=\gamma+k\bar{\gamma}$$

که در آن k عدد مختلط مناسبی است با $|k|=1$. از اینجا نتیجه می شود که نقاط C', B', A' به ترتیب با اعداد مختلط $k\bar{\gamma}, k\bar{\beta}, k\bar{\alpha}$ داده می شوند. پس نقطه P، فصل مشترک خطوط $A'D, BC$ بایـد جـواب دستگاه همزمان

$$z+\beta\gamma\bar{z}=\beta+\gamma, \qquad z+\delta k\overline{\alpha}\bar{z}=\delta+k\overline{\alpha}$$

باشد. از حذف z بین این دو معادله

$$\therefore (\beta\gamma-k\delta\overline{\alpha})\bar{z}=\beta+\gamma-\delta-k\overline{\alpha}$$

از ضرب طرفین این تساوی در α خواهیم داشت

$$(\alpha\beta\gamma - k\delta)\bar{z} = \alpha\beta + \gamma\alpha - \delta\alpha - k$$

با استفاده از قرار دادهای

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma, \quad \sigma_2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta, \quad \sigma_3 = \alpha\beta\gamma$$

تساوی اخیر به صورت زیر نوشته می شود

$$(\sigma_3 - k\delta)\bar{z} = \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{\alpha} - \delta\alpha - k$$

با گرفتن مزدوج مختلط و ضرب طرفین آن در $k\delta\sigma_3$ خواهیم داشت

$$(k\delta - \sigma_3)z = \sigma_1 k\delta - k\delta\alpha - \frac{k\sigma_3}{\alpha} - \sigma_3\delta$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می شود که:

$$(k\delta - \sigma_3)(z + k\bar{z}) = k^2 + \sigma_1 k\delta - \sigma_2 k - \sigma_3\delta$$

این رابطه ای است که باید نقطه P در آن صدق نماید. اما این رابطه نسبت به γ, β, α متقارن است، پس نقاط R, Q نیز در آن صدق می نمایند. از طرف دیگر، این معادله، معادله خطی است موازی با CC', BB', AA' (به شرط $k\delta - \sigma_3 \neq 0$). بنابراین، نقاط R, Q, P همخط اند و خطی که از این سه نقطه می‌گذرد موازی با CC', BB', AA' است.

در حالتی که $k\delta = \sigma_3$، داریم

$$BC \parallel A'D, \qquad CA \parallel B'D, \qquad AB \parallel C'D$$

و لذا نقاط R, Q, P بر نقطه بینهایت منطبق اند و نتیجه به طور بدیهی صحیح است.

در پایان این بخش، یک دنباله نامتناهی دیگری را معرفی می نماییم. اما ابتدا مطلب را بـا حالـت چهار نقطه آغاز می‌کنیم.

قضیه۴. فرض می‌کنیم چهار ضلعی A_1, A_2, A_3, A_4 محاط در یک دایره P نقطه ای دلخـواه بـر دایره محیطی آن باشد. در این صورت D_4, D_3, D_2, D_1 پاهای عمودهای وارد از P بر خطوط سیمسن نقطه P نسبت به مثلثهای

$$\Delta A_2 A_3 A_4, \qquad \Delta A_1 A_3 A_4, \qquad \Delta A_1 A_2 A_4, \qquad \Delta A_1 A_2 A_3$$

همخط اند. این خط را خط سیمسن نقطه P نسبت به چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ گویند.

برهان. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، می توان دایره محیطی چهار ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ را دایـره واحد فرض کرد، و اعداد مختلط u, u_4, u_3, u_2, u_1 را به ترتیب معرف نقاط A_4, A_3, A_2, A_1 , گرفت. در این صورت معادله خط سیمسن نقطه $P(u)$ نسبت به $\Delta A_2 A_3 A_4,$ چنین خواهد شد.

$$u_z - u_2 u_3 u_4 \bar{z} = \frac{1}{2}\Big\{u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u$$

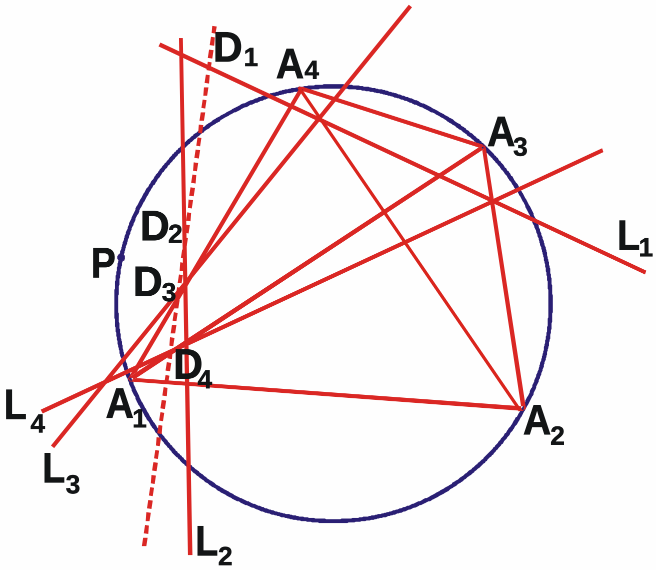
$$-(u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) - \frac{u_2 u_3 u_4}{u}\Big\}$$

پس معادله خط عمود مرسوم از نقطه $P(u)$ بر این خط سیمسن چنین خواهد شد

$$uz + u_2 u_3 u_4 \bar{z} = u^2 + \frac{u_2 u_3 u_4}{u}$$

بنابراین D_1، نقطه تلاقی این دو خط از تساوی

$$2uz = \frac{1}{2}\left\{3u^2 + (u_2 + u_3 + u_4)u - (u_3 u_4 + u_4 u_2 + u_2 u_3) = \frac{u_2 u_3 u_4}{u}\right\}$$



شکل۳

به دست می‌آید. با استفاده از قراردادهای

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$\sigma_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4$$

$$\sigma_3 = u_2u_3u_4 + u_1u_3u_4 + u_1u_2u_4 + u_1u_2u_3$$

$$\sigma_4 = u_1u_2u_3u_4$$

رابطه اخیر را می توان چنین نوشت

$$u^2 z = \frac{1}{4}\left\{3u^3 + (\sigma_1 - u_1)u^2 - \left(\sigma_2 - \sigma_1 u_1 + u_1^2\right)u + \frac{\sigma_4}{u_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(3u^3 + \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u\right) - \left(u_1 u^2 - \sigma_1 u_1 u + u_1^2 u\right) + \frac{\sigma_4}{u_1}\right\}$$

با گرفتن مزدوج مختلط از دو طرف این رابطه و استفاده از روابط

$$\bar{\sigma}_1=\frac{\sigma_3}{\sigma_4},\qquad \bar{\sigma}_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_4},\qquad \bar{\sigma}_4=\frac{1}{\sigma_4},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\bar{z}=\frac{u^2}{4}\left\{\left(\frac{3}{u^3}+\frac{\sigma_3}{\sigma_4 u^2}-\frac{\sigma_2}{\sigma_4 u}\right)-\left(\frac{1}{u_1 u^2}-\frac{\sigma_3}{\sigma_4 u_1 u}+\frac{1}{u_1^2 u}\right)+\frac{u_1}{\sigma_4}\right\}$$

$$\therefore\ \sigma_4\bar{z}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3\sigma_4}{u}+\sigma_3-\sigma_2 u\right)-\left(\frac{\sigma_4}{u_1}-\frac{\sigma_3 u}{u_1}+\frac{\sigma_4 u}{u_1^2}\right)+u_1 u^2\right\}$$

بنابراین:

$$u^2 z+\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{4}\left\{\left(3u^3+\sigma_1 u^2-\sigma_2 u+\sigma_3+\frac{3\sigma_3}{u}\right)\right.$$

$$\left.+u\left(\sigma_1 u_1+u_1^2-\sigma_2+\frac{\sigma_3}{u_1}-\frac{\sigma_4}{u_1^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(3u^3+\sigma_1 u^2-\sigma_2 u+\sigma_3+\frac{3\sigma_4}{u}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{u}{u_1^2}\left(u_1^4+\sigma_1 u_1^3+\sigma_2 u_1^2-\sigma_3 u_1+\sigma_4\right)\right\}$$

چون u_1 یک ریشه معادله

$$u^4-\sigma_1 u^3+\sigma_2 u^2-\sigma_3 u+\sigma_4=0$$

است، خواهیم داشت

$$u^2 z+\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{4}\left(3u^3+\sigma_1 u^2-\sigma_2 u+\sigma_3+\frac{3\sigma_4}{u}\right)$$

این رابطه، رابطه ای است که D_1 در آن صدق می کند. ولی به دلیل تقارن، D_4, D_3, D_2 نیز باید در آن صدق کنند. از طرف دیگر، این معادله، معادله یک خط راست است، بنابراین نقاط D_4, D_3, D_2, D_1 همخط اند.

حال فرض کنید یک پنج ضلعی محاط در یک دایره، و P نقطه ای بر دایره محیطی آن باشد و ...