انعکاس

نقطه P و دایره ای به مرکز O داده شده اند، منعکس نقطه P نسبت به این دایره، بنا به تعریف، نقطه‌ای است مانند Q واقع بر شعاع ماربر P، به طوری که:

$$\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2$$

r شعاع دایره O است. O را مرکز انعکاس و دایره O را دایره انعکاس گویند. بیشترین قضایای مورد نیاز ما در انعکاس از قضیه ۱ و قضایای متناظر با آن درباره تبدیلهای موبیوس نتیجه می‌شوند.

قضیه۱. فرض می‌کنیم z_j^* منعکسهای z_j ها $(j=0,1,2,3)$ نسبت به یک دایره باشند. در این صورت

$$(z_0^*, z_1^* ; z_2^*, z_3^*) = \overline{(z_0, z_1 ; z_2 z_3)}$$

برهان. فرض می‌کنیم T تبدیل موبیوسی است که دایره انعکاس را بر محور حقیقی می‌نگارد. چون تبدیل موبیوس، تقارن را محفوظ نگاه می دارد، نقاط z_j^*, z_j بر مزدوجهای مختلط‌شان نگاشته می‌شوند: یعنی اگر $w_j = Tz_j$، آنگاه $\overline{w}_j = Tz_j^*$ $(j=0,1,2,3)$. به علاوه، چون هر تبدیل موبیوس نسبتهای ناهمساز را محفوظ نگه می دارد، داریم

$$(z_0^*, z_1^* ; z_2^*, z_3^*) = \left(T_{z_0}^*, T_{z_1}^*, T_{z_2}^*, T_{z_3}^*\right)$$

$$= \left(\overline{w}_0, \overline{w}_1 ; \overline{w}_2, \overline{w}_3\right) = \overline{\left(w_0, w_1 ; w_2, w_3\right)}$$

$$= \overline{\left(Tz_0, Tz_1 ; Tz_2, Tz_3\right)} = \overline{\left(z_0, z_1 ; z_2, z_3\right)}$$

از آنجا که شرط لازم و کافی برای همدایره بودن چهار نقطه، حقیقـی بـودن نـسبت نـا همـساز آنهاست(ومزدوج مختلط یک عدد حقیقی خود ان عدد حقیقی است)، بلافاصله قضیه به دست می آید:

قضیه۲. انعکاس دایره های را محفوظ نگاه می‌دارد.

به آسانی می‌بینیم که انعکاس هم دایره انعکاس را بر خودش می‌نگارد و هـم خـط مـاربر مرکـز انعکاس را. به علاوه دایره‌ای که از مرکز انعکاس بگذرد برخطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد ولی مـوازی مماس بر این دایره در مرکز انعکاس است، نگاشته می‌شود. عکس این مطلب نیز درست است. زیرا فرض کنید O مرکز انعکاس وOA قطری از این دایره است که باید منعکسش را تعیین کنـیم و B مـنعکس A است. در این صورت به ازای هر نقطه P از این دایره و منعکس آن Q داریم

$$\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2 = \overline{OA}\overline{OB}$$

(که شعاع دایره انعکاس است). یعنی :

$$\overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ} \qquad \therefore \Delta OAP \sim \Delta OQB$$

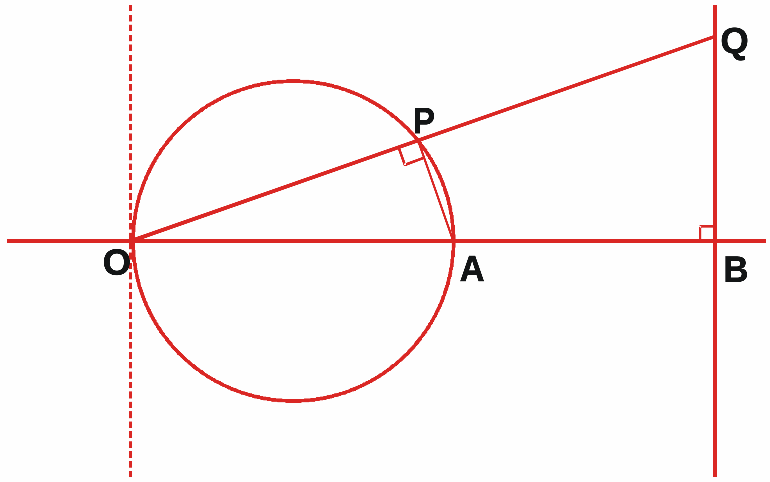
از اینجا نتیجه می شود که

$$\angle OBQ = \angle OPA = \frac{\pi}{2}$$

به عکس فرض کنید، خطی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد داده شده باشد. Bرا پـای عمـود وارد از O بر این خط و A را منعکس B می گیریم. پس به ازای هر نقطه Q از این خـط، و مـنعکس آن P، داریم:

$$\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OA}.\overline{OB}; \qquad \overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OQ}$$

$$\therefore \Delta OAP \sim \Delta OQB$$



شکل۱

از این رو $\angle OPA = \angle OBQ = \frac{\pi}{2}$، و لذا P بر دایره ای بــه قطــر OA واقــع اســت. بــالاخره، دایره‌ای که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد بر دایره دیگری که از انعکاس نمی‌گذرد نگاشته می‌شود.

با تأسی به این که تبدیلهای موبیوس همدیس اند (و با توجه به اینکه به ازای هر عــدد مخــتلط: $\alpha \neq 0$، (پیمانه 2π) $\arg \overline{\alpha} = -\arg \alpha$، قضیه زیر به دست می‌آید :

قضیه۳. انعکاس تبدیلی است حافظه زاویه؛ یعنی اندازه زاویه را محفوظ نگاه می‌دارد ولی جهــت آن را عوض می‌کند.

بنابراین، انعکاس، یک زوج دایره متقاطع را به یک زوج دایره متقاطع با همان زاویه نقطه تقــاطع (صرفنظر از جهت زوایا) می‌نگارد. به خصوص یک زوج دایره متعامد را بر یک زوج دایره متعامد.