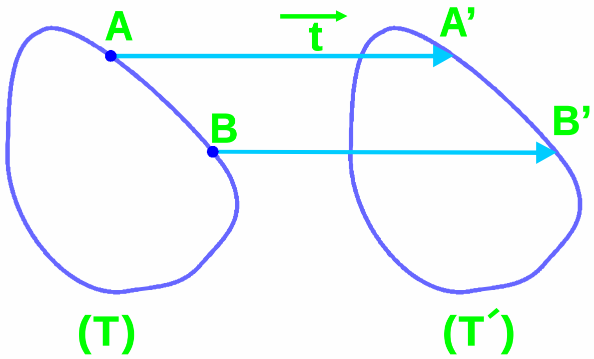
بردار و انتقال

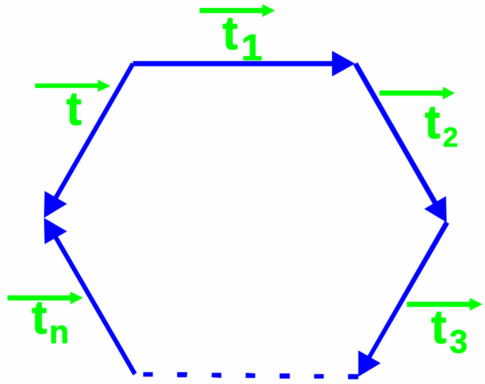
یکی از کاربردهای مهم بردارها در حل مسائل، استفاده از آنها به عنوان بردار انتقال می باشد .

تعریف. هرگاه برداری مثل $\vec{t}$ موجود باشد و از هر نقطه شکل (T) ، برداری را معادل با بردار $\vec{t}$ رسم کنیم ، انتهـای این بردارها شکلی مانند (T') را ایجاد می کند . در این صورت می گوییم (T') انتقال یافته (T) تحت بردار $\vec{t}$ می باشد ، و به بردار $\vec{t}$ بردار انتقال می گوییم .(عموماً انتقال توسط بردار $\vec{v}$ را با $T_{\vec{v}}$ نشان می دهند)

توجه کنید که انتقال ، شکل را تغییر نمی دهد و تنها یک تغییر مکان ایجاد می نماید . هم چنین ایـن نکتــه نیــز حائز اهمیت است که : هرگاه در تغییر مکانی هر دو پاره خط متناظر از دو شکل ، متوازی و مساوی و هم جهت باشند، آن تغییر مکان، یک انتقال خواهد بود .



واضح است با توجه به آنچه که گفتیم اگر شکل (A) ، n بار انتقال یابد و شکل حاصل از انتقال n اُم را A_n بنامیم ، آنگاه برداری وجود دارد که شکل A را به A_n ببرد، این بردار برابر است با حاصل جمع کل بردارهای انتقال .



$$A \xrightarrow{\vec{t}_1} A_1 \xrightarrow{\vec{t}_2} A_2 \xrightarrow{\vec{t}_3} \cdots \xrightarrow{\vec{t}_n} A_n$$

$(A \xrightarrow{\vec{t}} A_n)$ که $\vec{t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{t}_i$

مثال ۱. مثلث ΔABC مفروض است . روی اضلاع این مثلث، متوازی الاضلاع های $ABKL$ ، $BCMN$ و $ACFG$ را ساخته ایم . ثابت کنید ، با پاره خط های جهت دار راست $\overrightarrow{KN}$ ، $\overrightarrow{MF}$ و $\overrightarrow{GL}$ می توان یک مثلث ساخت .

حل. با توجه به مفروضات مسئله خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{LA}$$

هم چنین داریم :

$$\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{FM}$$

و

$$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{NK}$$

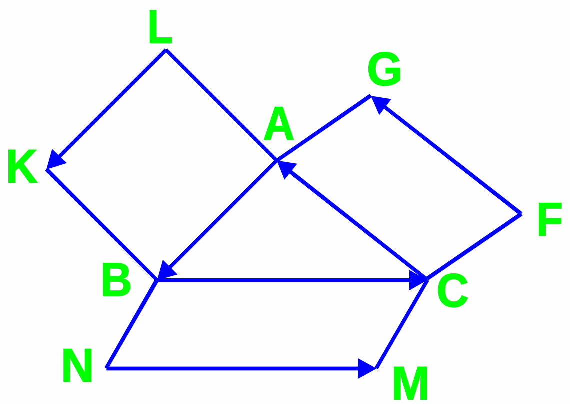
و

$$\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{LG}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\vec{FM}+\vec{NK}+\vec{LG}=(\vec{FC}+\vec{AG})+(\vec{CM}+\vec{NB})+(\vec{BK}+\vec{LA})=0$$

و بدین ترتیب حکم به اثبات رسید.



حال به حل چند مثال پیچیده تر می پردازیم .

مثال۲. وتر ثابت AB و نقطه M روی دایره C مفروضند.

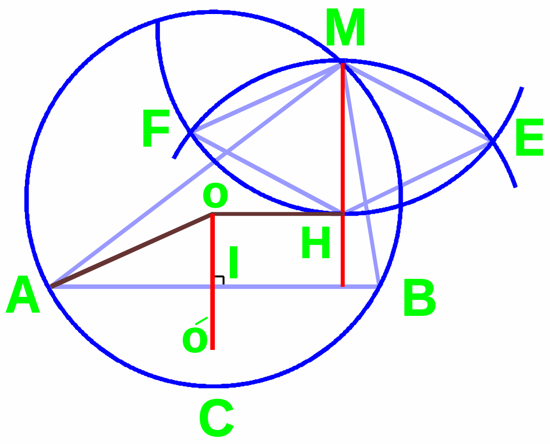
۱. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث ΔAMB را بیابید .

۲. مکان هندسی نقاط مشترک دایره به مرکز M و به شعاع MH و دایره به مرکز H و به شعاع HM را به دست آورید .

حل.

۱. اگر H را مرکز ارتفاعی مثلث ΔAMB بنامیم ، می دانیم که :(قضیه ۱)

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OM}=\vec{OH}$$



هم چنین برای I نقطه وسط AB داریم :

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

در نتیجه :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OI}$$

اما در مثلث ΔOMH داریم : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MH}$.

پس : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OI}$، یعنی $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OI}$. پس مکان H از مکان M با انتقالی برابر با $2\overrightarrow{OI}$ یا $\overrightarrow{OO'}$ (O' قرینه O نسبت به AB است)، ایجاد می شود و از آنجا که M روی محیط دایره (C) می گردد پس انتقال یافته آن نیز روی دایره ای که شعاعی مساوی دایره C دارد و با توجه به آنچه که گفتیم مرکز این دایره باید نقطه O' باشد .(توجه کنید دراین مسئله بردار انتقال همواره ثابت می باشد)

۲. مطابق شکل مثلث های متساوی الاضلاع ΔMEH و ΔMFH را رسم کنید . واضح است که اندازه بردارهای $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{MF}$ با $\overrightarrow{MH}$ برابر بوده و با آن زاویه 60^0 می سازند . از آنجا که $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MH}$ ، می‌توان

از مکان M به مکان نقاط E و F با انتقالی به طول OO' که با MH زاویه 60^0 می سازد، رسید.

در نتیجه مکان نقاط E و F دو دایره برابر با C خواهد بود که مراکزشان با رئوس مثلث های متساوی الاضلاعی که روی OO' ساخته می شود ، متناظر خواهد بود.

- مثال هایی از مسائل المپیادهای ریاضی در ایران و کشورهای مختلف:

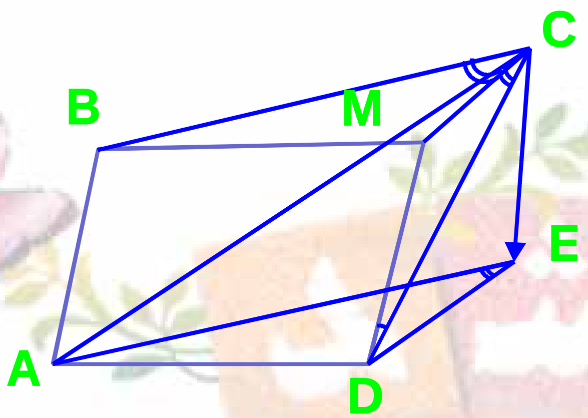
سوال ۱. نقطه M را در درون چهار ضلعی $ABCD$ طوری در نظر می گیریم که $ABMD$ متوازی الاضلاع شود . ثابت کنید ، اگر $\angle CBM = \angle CDM$ ، آنگاه : $\angle ACD = \angle BCM$.

حل. E را راس مثلث ΔADE در نظر بگیرید که از انتقال مثلث ΔBMC تحت بردار $\vec{BA}$ بدست آمده باشد . پس : $\angle AED = \angle BCM$ (۱)

و چهار ضلعی $MDEC$ متوازی الاضلاع خوهد بود ، در نتیجه :

$$\angle EAD = \angle CBM = \angle CDM = \angle ECD$$

پس نقاط A ، D ، E و C هم دایره خواهند بود ، بنابراین زوایای $\angle ACD$ و $\angle AED$ نیز برابرند که از رابطه (۱) نتیجه می شود : $\angle ACD = \angle BCM$.

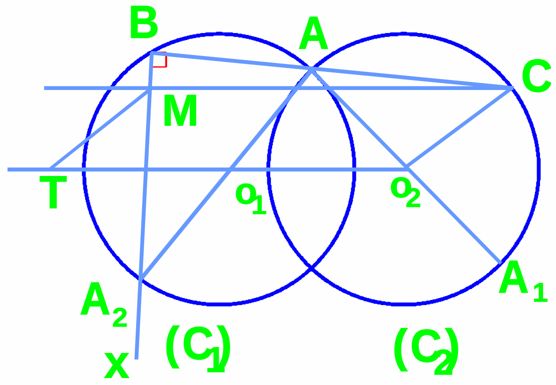


سوال ۲. از نقطه A (تقاطع دو دایره مساوی) ، قاطع متغیری رسم می کنیم که دو دایره را در B و C قطع نماید .

از B خط Bx را عمود بر BC خارج نموده و از C خطی به موازات خط المرکزین می کشیم تا Bx را در M قطع کند .

مکان هندسی M را وقتی BC تغییر می کند، بیابید.

حل. فرض کنید این دو دایره (C_1) و (C_2) باشند . قاطع BC را از A می گذرانیم ، به طوریکه B روی (C_1) و C روی (C_2) باشد . داریم : $BC \perp Bx$ ، محل برخورد Bx با (C_1) را A_2 بنامید ، پس AA_2 قطر دایره (C_1) است . هم چنین A_1 محل برخورد AO_2 با دایره (C_2) می باشد.



واضح است که $A_1C \perp BC$ ، در نتیجه : $Bx \| A_1C$. حال از نقطه C خطی به موازات O_1O_2 رسم می کنیم تا Bx را در M قطع کند . پس چهار ضلعی CMA_2A_1 متوازی الاضلاع است ، در نتیجه : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2\overrightarrow{O_2O_1}$. حال اگر بردار $\overrightarrow{O_2T}$ را معادل با $\overrightarrow{A_1A_2}$ رسم می کنیم ، شکل O_2CMT نیز متوازی الاضلاع خواهدشد ، یعنی داریم : $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{O_2C}$.

از آنجا که T ثابت است ، پس مکان هندسی M دایره ای خواهد بود با مرکز T و برابر دایره های مفروض که از انتقال دایره (C_2) تحت بردار $2\overrightarrow{O_2O_1}$ یا $\overrightarrow{A_1A_2}$ ایجاد می شود .