معادله های درجه دوم

چنان که در بخش اعدادمختلط دیـدیم عـدد مخـتلط $i=(0,1)$ درمعادلـه $x^2+1=0$ صـدق می‌کند. اما درباره سایر معادله های درجه دوم چه بگوییم؟ آیا آنها در £ جواب دارند؟ آیا باید به افزودن اعضای جدید به دستگاه عددی خود ادامه دهیم؟ به معادله زیر توجه نمایید

مثال. به یافتن ریشه های معادله زیر می‌پردازیم

$$\frac{1}{2}x^2+(1+i)x-i=0$$

حل. از نوشتن این معادله به صورت یک مربع کامل خواهیم داشت

$$\{x+(1+i)\}^2=2i+(1+i)^2=4i$$

$$\therefore x+(1+i)=\pm 2\sqrt{i}$$

$$x=-(1+i)\pm 2\sqrt{i}$$

اما ریشه دوم عدد i چیست؟ عددی است که باید مربعش i شود. پس می‌نویسیم

$$u+iv=\sqrt{i} \qquad (u,v\in ¡)$$

سپس با مربع نمودن دو طرف خواهیم داشت

$$\left(u^2-v^2\right)+2uvi=i$$

$$\therefore u^2-v^2=0, uv=\frac{1}{2}$$

از معادله اول، $u=\pm v$ به دست می آید و با قرار دادن $u=v$ در معادله دوم خواهیم داشت

$$u = v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و از آنجا

$$\sqrt{i} = u + iv = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

حالت $u = -v$ پیش نخواهد آمد، زیرا منجر به تساوی $u^2 = -1/2$ می شود که به ازای مقدار حقیقی u ناممکن است.[1] از اینجا نتیجه می‌شود که

$$x = -(1+i) \pm \sqrt{2}(1+i) = (-1 \pm \sqrt{2})(1+i)$$

بنابراین برای حل این معادله درجه دوم لزومی ندارد که دستگاه اعداد مختلط را توسعه دهیم. (خواننده باید صدق نمودن نتایج به دست آمده را در معادله درجه دوم مذکور عملاً تحقیق نماید).

اکنون صورت کلی معادله درجه دوم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

چون دستگاه عددی خود را به اعداد مختلط توسعه داده ایم باید حالت $a,b,c,d \in$ £ را مورد بحث قرار دهیم. چون تا آنجا که به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم مربوط می شود، اعداد مختلط از همان قواعد اعداد حقیقی تبعیت می‌کنند، از تقسیم طرفین معادله بالا بر a و تکمیل مربع، مانند حالت با ضرائب حقیقی، خواهیم داشت

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

و با قرار دادن

$$\varsigma = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{و} \quad z = x + \frac{b}{2a}$$

مساله بر می‌گردد به اینکه ببینیم آیا معادله $z^2 = \varsigma$ را می توان به ازای عدد مختلط دلخواه ς حل نمود یا نه؟ اگر قرار دهیم

$$z = u + iv \quad \varsigma = \alpha + i\beta$$

می‌توان مساله را چنین بیان کرد: آیا همواره می‌توانیم دو عدد حقیقی v, u چنان پیدا کنیم که بـه ازای دو عدد حقیقی دلخواه β, α تساوی زیر برقرار باشد.

$$(u + iv)^2 = \alpha + i\beta$$

ویا

$$\left(u^2 - v^2\right) + 2iuv = \alpha + i\beta$$

بدین ترتیب مساله به حل دستگاه معادلات $\begin{cases} u^2 - v^2 = \alpha \\ 2uv = \beta \end{cases}$ **تبدیل می‌شود.**

چون

$$\left(u^2 + v^2\right)^2 = \left(u^2 - v^2\right)^2 + (2uv)^2 \; \alpha^2 + \beta^2$$

و $(\because u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ **و** $u^2 + v^2 \geq 0$ **خواهیم داشت:**

$$u^2 + v^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right), v = \frac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

با توجه به

$$\frac{1}{2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq \mathbf{0},\frac{1}{2}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\geq \mathbf{0}$$

داریم

$$u=\pm\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{1/2} \quad \text{و} \quad v=\pm\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

که باید علامتها را چنان اختیار کرد که در تساوی $2vu=\beta$ صدق نماید. یعنی ریشه دوم $\sqrt{\varsigma}=u+iv$ چنین به دست می‌آید

$$\sqrt{\varsigma}=\begin{cases}\pm\left(\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{1/2}+i\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{1/2}\right) & \text{به ازای } \beta>0\\ \pm\left(-\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{1/2}+i\left(\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^{1/2}\right) & \text{به ازای } \beta<0\\ \pm\sqrt{\alpha},\beta=0,\alpha\geq 0 & \text{به ازای}\\ \pm i\sqrt{-\alpha},\beta=0,\alpha<0 & \text{به ازای}\end{cases}$$

پس نشان دادیم که هر عدد مختلط (ناصفر) دو تا ریشه دوم دارد.

توجه. به ازای $\xi\in\mathbb{R}$ برای نمایش ریشه دوم نامنفی آن هنگامی که $\xi\geq 0$ از $\sqrt{\xi}$ و هنگامی که $\xi<0$، از $\sqrt{\xi}=i\sqrt{-\xi}\,(=i\sqrt{|\xi|})$ استفاده شده است. ولی از این پس، برای یک عدد مختلط غیر حقیقی ξ، قرارداد $\sqrt{\xi}$، صرفاً به معنی ریشه دوم ξ است و معرف، جذر عدد خاص دیگری نیست.

با توجه به قرار داد بالا هنگامی که η,ξ اعداد حقیقی منفی هستند، تساوی

$$\sqrt{\xi}.\sqrt{\eta} = \sqrt{\xi.\eta}$$

دیگر معتبر نیست و زمانی معتبر است که دو طرف تساوی را مجموعه های اعداد مختلط بگیریم.

پس قضیه زیرین را اثبات کردیم

قضیه ۱. معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in C, \quad a \neq 0$$

در £ دو ریشه دارد که چنین اند

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$