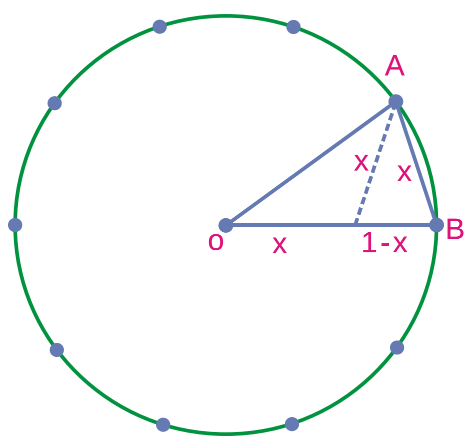
چندضلعیهای منتظم

اکنون به چند مسأله ترسیم نسبتاً پیچیده‌تر می‌پردازیم. با ده‌ضلعی منتظم آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم یک ده‌ضلعی منتظم در دایره‌ای به شعاع ۱ محاط شده است (شکل ۱)، و طول ضلع آن را x می‌گیریم.



شکل (۱). ده‌ضلعی منتظم

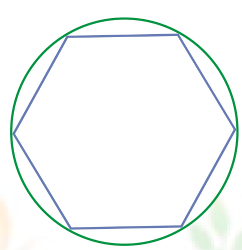
چون کمان مربوط به x، 36° است زاویه مرکزی O نیز 36° است و در نتیجه هر یک از دو زاویه دیگر مثلث بزرگتر 72° است، و بنابراین، خط‌چین رسم شده که نیمساز زاویه A است، مثلث OAB را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم می‌کند که طول ساقهای هر یک، x است. پس شعاع این دایره به دو بخش x و $1-x$ تقسیم می‌شود. چون مثلث OAB با مثلث کوچکتر متشابه است، داریم $1/x = x/(1-x)$. از این تناسب، معادله درجه دوم $x^2+x-1=0$ به دست می‌آید که جواب آن $x=\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ است. (جواب دیگر معادله قابل قبول نیست زیرا مقداری منفی برای x به دست می‌دهد.) از اینجا روشن می‌شود که x را می‌توان به طور هندسی رسم کرد. حال که

طول x را در دست داریم می‌توانیم ده نشانه روی محیط دایره بگذاریم که وتر بین هر دو تا از آنها به طول x باشد. بـه این طریق، ده‌ضلعی منتظم رسم می‌شود. سپس برای رسم پنج‌ضلعی منتظم می‌توان رأسهای ده‌ضلعی را یک در میان به هم وصل کرد.

به جای ترسیم $\sqrt{5}$ به روشی که قبلاً گفته شد، می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طولهای دو ضلع مجاور بـه زاویه قائمه‌اش ۱ و ۲ باشند؛ در این صورت طول وتر $\sqrt{5}$ خواهد بود. سپس با کم کردن طول واحد از $\sqrt{5}$ و نصف کردن نتیجه، x را به دست می‌آوریم.

نسبت $AB : OB$ در مسأله بالا، نسبت طلایی نامیده شده است زیرا به نظر ریاضیدانان یونان باستان، مستطیلی که نسبت دو ضلعش چنین باشد از لحاظ زیبایی‌شناسی مطلوبترین حالت را دارد. ضمناً مقدار این نسبت در حدود ۱/۶۲ است.

در میان چندضلعیهای منتظم، رسم شش‌ضلعی از همه ساده‌تر است. نخست دایره‌ای به شعاع r رسم می‌کنیم. طول ضلع یک شش‌ضلعی محاط در این دایره برابر با r است. برای رسم شش‌ضلعی می‌توان با شروع از هر نقطه محیط دایره متوالیاً وترهایی به طول r رسم کرد تا همه شش رأس به دست آیند.



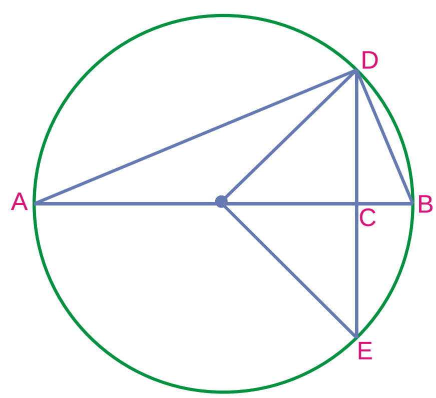
شکل (۲). شش‌ضلعی منتظم

می‌توان از n ضلعی منتظم، ۲n ضلعی منتظم را به دست آورد. به این منظـور، روی دایـره محیطـی n ضـلعی، کمان روبروی هر ضلع را نصف کرده نقاطی را که به این طریق به دست می‌آیند همراه با رأسهای اولیه به عنوان رئـوس لازم $2n$ ضلعی به کار می‌گیریم. بنابراین اگر از قطر دایره (یک «۲ ضلعی») شروع کنیم مــی‌تـوانیم ۴، ۸، ۱۶، ... ، 2^n ضلعی را رسم کنیم. به همین نحو می‌توانیم ۱۲، ۲۴، ۴۸، ... ، ضلعی را از شــش‌ضـلعی، و ۲۰، ۴۰، ... ، ضـلعی را از ده ضلعی به دست آوریم.

اگر s_n نشان‌دهنده طول ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره واحد (دایره به شعاع ۱) باشـد، آنگـاه ضـلع ۲n ضلعی به طول

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$$

است. این مطلب را می‌توان به صورت زیر ثابت کرد: در شکل (۳)، s_n برابر با $DE = 2DC$ است، s_{2n} برابـر بـا DB است، و AB برابر است با ۲.



شکل (۳)

مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABD برابر با $\frac{1}{2}BD\,.\,AD$ و $\frac{1}{2}AB\,.\,CD$ است. چون $AD=\sqrt{AB^2-DB^2}$، با جایگذاریهای $AB=2$, $BD=s_{2n}$, $CD=\frac{1}{2}s_n$، و مساوی قرار دادن دو عبارت مربوط به مساحت به دست می‌آوریم.

$$s_n=s_{2n}\sqrt{4-s_{2n}^2} \qquad \text{یا} \qquad s_n^2=s_{2n}^2\left(4-s_{2n}^2\right)$$

با حل این معادله درجه دوم نسبت به $x=s_{2n}^2$ و ملاحظه اینکه x باید کوچکتر از ۲ باشد، فرمول بالا به آسانی پیدا می‌شود.

از این فرمول و این مطلب که s_4 (ضلع مربع) برابر با $\sqrt{2}$ است، نتیجه می‌گیریم

$$s_8=\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad , \quad s_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$s_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

و به ازای $n>2$ فرمول کلی زیر را به دست می‌آوریم.

$$s_{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

که شامل $n-1$ رادیکال تودرتوست، محیط 2^n ضلعی محاط در دایره برابر $2^n s_{2^n}$ است. وقتی n به سمت بینهایت می‌رود، 2^nضلعی به دایره میل می‌کند. پس $2^n s_{2^n}$ به طول محیط دایره واحد میل می‌کند که بنا به تعریف برابر 2π است. پس با قرار دادن m به جای $n-1$ و حذف یک عامل ۲، فرمول حدی π چنین می‌شود

وقتی $m\to\infty$،

$$\underbrace{2^m\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{m\ \text{ریشه دوم}} \to \pi$$

تمرین: از آنجا که $2^m \to \infty$، نتیجه بگیرید که

وقتی $n \to \infty$،

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{ریشه دوم}} \to 2$$

نتایجی که تا اینجا به دست آورده‌ایم نشان‌دهنده یک نکته اساسی است: ضلعهای 2^n ضلعی منتظم، 5×2^n ضلعی منتظم، و 3×2^n ضلعی منتظم را می‌توان به طور کامل به وسیله جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشه دوم پیدا کرد.