تبدیلهای موبیوس

اکنون به توابع مقدماتی ولی مفید معروف بـه تبـدیلهای موبیـوس (تبـدیلهای خطـی کـسری، تبدیلهای دو خطی، تبدیلهای همساز و غیره) می پردازیم. ولی ابتدا به یک نکته توجه می‌کنیم.

برای مطالعه رفتار یک تابع حقیقی– مقدار از یک متغیر حقیقـی، صـفحه (x, y) را، بـرای رسـم نمودار آن به کار می بریم (x به عنوان متغیر و y به عنوان تابع) –این کار بینش و شهود ما را افـزایش می‌دهد، ولی در مورد توابع مختلط – مقدار از یک متغیر مختلط این کار میـسر نیـست – در اینجـا بـه فضای چهار بعدی نیاز داریم (دو بعد برای متغیر z و دو بعد برای تابع w)، که فراسـوی جهـان مـادی ماست. پس برای مطالعه تابع مختلط – مقدار از دو صفحه مختلط اسـتفاده مـی‌کنـیم، صـفحه z بـرای متغیر z و صفحه w برای تابع w . این روش به اندازه حالت توابع حقیقی – مقدار از یک متغیـر حقیقـی، کمال مطلوب نیست ولی این بهترین کار است که می‌توانیم انجام دهیم.

تبدیلهای موبیوس با توابع گویای خاصی به صورت

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

تعریف می‌شوند. شرط $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$، شرط حصول اطمینـان از ثابـت نبـودن تـابع T اسـت .

تبدیلهای موبیوس در همه جای صفحه مختلط بجز در نقطه $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ تعریف شده اند، و تبدیل عکس آن

$$z = T^{-1}w = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$$

(با توجه به $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$) نیز یک تبدیل موبیوس است و نشان مـی‌دهـد کـه در

همه جای صفحه w بجز نقطه $w=\frac{\alpha}{\gamma}$ ، یک پیشنگاره(یکتا) دارد. بهتر است این استثناها را با در نظـر

گرفتن تبدیلهای موبیوس بـه عنـوان نگاشـتی از کـره ریمـانی بـر روی خـودش، و ایـن تعریـف کـه

نگاره $z=-\frac{\delta}{\gamma}$ همان $w=\infty$ ، و پیشنگاره $w=\frac{\alpha}{\gamma}$ همان $z=\infty$ است، از میان برداریم. بـا توجـه بـه

اینکه عکس تبدیل موبیوس یک تبدیل تکمقداری است، این بسط تعریف تبـدیلهای موبیـوس، بـه مـا

امکان می‌دهد که تبدیلهای موبیوس را نگاشتهایی دو سویی (یک به یک و پوشـا)، از صـفحه مخـتلط

توسیع یافته C بر روی خودش تلقی کنیم.

روشن است که نگاشته همانی یک تبدیل موبیوس است$(\alpha=\delta, \beta=\gamma=0 = \alpha)$. عـلاوه بـر ایـن،

ترکیب تبدیلهای موبیوس، یک تبدیل موبیوس است، یعنی اگر صفحه z را بر روی صفحه w_1 با ضابطه

$$w_1 = Tz = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

و صفحه w_1 را بروی صفحه w با ضابطه

$$w = Sw_1 = \frac{\alpha w_1 + b}{cw_1 + d}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

بنگاریم، نتیجه آن یک تبدیل موبیوس از صفحه z بر روی صفحه w می‌شود که با رابطه زیر داده می‌شود

$$w = STz = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

با شرط

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

به طریقی مشابه می‌توان شرکت‌پذیری را تحقیق نمود و بنابراین قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه۱. مجموعه M مرکب از همه تبدیلهای موبیوس، یک گروه تشکیل می‌دهد؛ یعنی چهار اصل موضوع زیر در آن صدق می کند:

الف. به ازای هر دو تبدیل $T,S\in M$، حاصلضرب (ترکیب) آنها TS، معین و عنصری از M است. یعنی $TS\in M$.

ب. M دارای عنصری مانند به نام عنصر همانی است با این ویژگی که : به ازای هر $T\in M$، $TI=IT=T$.

ج. به هر عنصر $T\in M$ عنصری مانند $T^{-1}\in M$، به نام عکس T، متناظر است،که ویژگی زیر را دارد.

$$TT^{-1}=T^{-1}T=I$$

د. قانون شرکت‌پذیری در M برقرار است: به ازای همه تبدیلهای $T,S,U\in M$، $(TS)U=T(SU)$.

عبارتی که برای حاصلضرب تبدیلهای موبیوس به دست آوردیم، ماتریسها را در ذهن ما تداعی می‌کند. اگر تبدیلهای موبیوس S,T در فوق را به ترتیب با

$$T=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نمایش دهیم، آنگاه :

$$ST=\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix}$$

یعنی این نماد با عمل ضرب ماتریسها تطابق دارد، یا بهتر بگوییم گروه همه ماتریسهای وارونپذیر 2×2 با گروه همه تبدیلهای موبیوس همریخت است.

زیر مجموعه ای از یک گروه را هنگامی زیر گروه گویند که خودش (با همان عمل گروهی) تشکیل گروه دهد. در اینجا مثالهایی از زیر گروه موبیوس M می‌آوریم.

مثال۱. مجموعه همه انتقالها:

$w=Tz=z+b$ (به ازای مقدار ثابت ناصفر $b\in £$)

مثال۲. مجموعه همه اتّساعها:

$w=Tz=\alpha z$ (به ازای مقدار ثابت ناصفر $\alpha\in £$)

در واقع این زیر گروه شامل دو زیر گروه مهم است

الف. بزرگنماییها:

$w=Tz=az$ (که α مقدار ثابت مثبت است)

این، همان بزرگ (کوچک) کردن به نسبت a است.

ب. دورانها:

$w=Tz=kz$ (که در آن : $|k|=1$)

این همان دوران محول مبدا با شناسه k است. باید توجه کرد که بزرگنماییها و دورانها جابه جایی هستند و هر اتساع، حاصلضرب یک بزرگنمایی در یک دوران است.

مثال ۳. زیر مجموعه M متشکل از عنصر همانی و عکس آن:

$$w = Tz = \frac{1}{z}$$

(به تنهایی) نیز یک زیر گروه است.

اکنون تابع گویای معرف تبدیل موبیوس، یعنی:

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

را به کسرهای جزئی تجزیه می کنیم. دو امکان وجود دارد:

الف. اگر $\gamma = 0$، آنگاه $\delta \neq 0$ و داریم

$$w = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}$$

ب. اگر $\gamma \neq 0$، آنگاه :

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma}{\gamma z + \delta}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یک تبدیل موبیوس حاصلضرب اتساعها، انتقالها و یک عکس کردن است.

روشن است که انتقال و اتساع، خطوط را به خطوط، و دوایر را به دوایر می‌نگارند. این امر در مورد عمل عکس درست نیست. ولی خانواده همه خطوط مستقیم و دوایر در عمل عکس پایا می‌مانند. فرض کنید.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (B^2 + C^2 > 4AD)$$

و یا به صورت دیگر معادله:

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \qquad |b|^2 > ac$$

(که $c = D, a = A$ اعداد حقیقی و $b = \frac{1}{2}(B + iC)$ عددی مختلط)، معادله یک دایره (یک خط،اگر $a = 0$) در صفحه است. با انجام عمل عکس $w = \frac{1}{z}$ داریم:

$$a + \bar{b}\,\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0$$

که معادله ای از همان نوع است و قضیه زیر را به دست می آوریم.

قضیه۲. تبدیلهای موبیوس، خانواده همه دوایر و خطوط مستقیم صفحه را بر خودشان می‌نگارند.

همان گونه که گفتیم، خطوط مستقیم حالات خاص دوایر در نظر گرفته می‌شوند.