تقسیم توافقی

طول نقطه. هرگاه A نقطه ای از محور $X'X$ به مبدأ O باشد ، اندازه جبری OA را که با نماد $\overline{OA}$ نـشان میـدهیم ، طول نقطه A می نامیم.و آن را با X_A نشان می دهیم : $X_A = \overline{OA}$

قضیه ۱(شال). هرگاه n نقطه A_1 و A_2 و ...و A_n واقع بر محور XX' باشند ، رابطه زیر برقرار است :

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0$$

و مخصوصاً اگر دو نقطه A و B روی محور XX' به مبدا O باشند ، داریم :

$$\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{OA} = 0 \Rightarrow \overline{AB} - X_B + X_A = 0 \Rightarrow \overline{AB} = X_B - X_A$$

تقسیم توافقی

اگر بر امتداد جهت دار AB دو نقطه M و N را چنان اختیار کنیم که :

$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = K$ و $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -K$ گوییم نقاط M و N پاره خط AB را به نسبت توافقی K تقسیم کرده انـد یـا گـوییم چهار نقطه A و B و M و N یک دستگاه توافقی تشکیل داده اند ، و آن را با نماد $(ABMN)$ نمایش می دهـیم و M و N را مزدوج یکدیگر نسبت به A و B گوییم . با حذف K از رابطه ی بالا داریم :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

این رابطه را رابطه‌ی توافقی می نامیم.

حال اگر $K = 1$ باشد نقطه N بر وسط AB و نقطه M به بی نهایت دور می رود ، یعنی نقطـه بـی نهایـت دور از امتداد AB ، و نقطه ی وسط AB ، مزدوج توافقی یکدیگرنسبت به دو نقطه A و B می باشند.

نتیجه. اگر M و N مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به A و B باشند A و B نیز مزدوج توافقی یکدیگر نسبت بـه

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

M و N خواهد بود . زیرا :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-\overline{NA}}{\overline{NB}}\Rightarrow\frac{-\overline{AM}}{-\overline{BM}}=-\frac{-\overline{AN}}{-\overline{BN}}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{-\overline{BM}}{\overline{BN}}$$

یعنی اگر M و N پاره خط AB را به نسبت توافقی K تقسیم کنند ، A و B نیز پاره خط MN را به نسبت توافقی تقسیم می کند ، اما این نسبت برابر K نخواهد بود . حال $|K|\neq 1$ باشد نسبت $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ را حساب می کنیم :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=K\Rightarrow\frac{-\overline{AM}}{\overline{MB}}=K\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AM}+\overline{MB}}=\frac{K}{K+1}$$

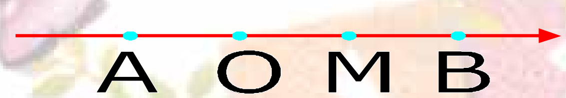
$$\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{K}{K+1}\Rightarrow\overline{AM}=\frac{K\overline{AB}}{K+1}\qquad(۱)$$

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-K\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=-K\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{AN}+\overline{NB}}=\frac{-K}{-K+1}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}=\frac{K}{K+1}\Rightarrow\overline{AN}=\frac{-K.\overline{AB}}{-K+1}\qquad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\frac{K\overline{AB}}{K+1}}{\frac{-K\overline{AB}}{-K+1}}=\frac{K-1}{K+1}=-\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$$

مسئله ۱. دو نقطه A و B روی محور XX' مفروضند . نقطه M را روی XX' چنان تعیین کنید که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=K$ $(K\in IR)$.



حل. اگر O مبدا محور باشد ، داریم :

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

$$\overline{MA}=K.\overline{MB}\Rightarrow \overline{OA}-\overline{OM}=K.\left(\overline{OB}-\overline{OM}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{OM}=\frac{K.\overline{OB}-\overline{OA}}{K-1}$$

و اگر A را به عنوان مبدا انتخاب کنیم $\overline{OA}=0$ و $AM=\frac{K.\overline{AB}}{K-1}$. اگر $K=1$ باشد، معادله بالا جواب ندارد و در این حالت برحسب قرار داد گوییم نقطه M در راستای $X'X$ به بی نهایت دور می افتد . (در حالتی که $K=-1$ باشد M وسط AB است) .

با قبول اصل دزارگ معادله بالا به ازاء همه مقادیر حقیقی K درست خواهد بود .

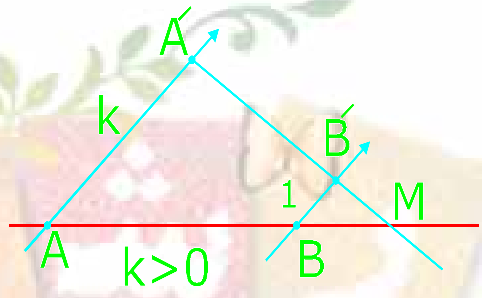
اصل دزارگ. هر خط راست نامحدود فقط یک نقطه بی نهایت دور دارد و تمام خط های موازی که دارای یک امتداد باشند در آن نقطه بی نهایت دور مشترکند .

میانه پاره خط AB:

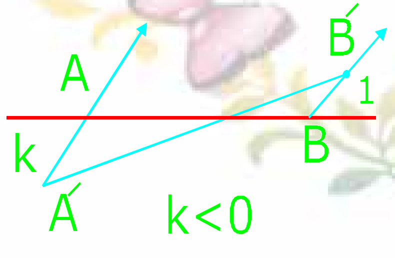
$$K=-1\Rightarrow \overline{OM}=\frac{-\overline{OB}-\overline{OA}}{-2}\Rightarrow \overline{OM}=\frac{OB+OA}{2}$$

یا

$$X_M=\frac{X_A+X_B}{2}$$



(الف)



(ب)

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

حال اگر از دو نقطه A و B دو محور موازی و هم جهت به مبداهای A و B رسم کرده و دو نقطه A' و B' را طوری اختیار کنیم که $\frac{AA'}{BB'}=K$ ،مثلاً $\overline{AA'}=K$ و $\overline{BB'}=1$ ، نقطه M محل تلاقی $A'B'$ و AB ، جواب مسئله است ، یعنی $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=K$.اگر $K>0$ باشد ، M از امتداد AB و اگر $K<0$ باشند ، M بین A و B قرار می گیرد . اگر $A'B'$ موازی AB باشد یعنی $K=1$ ، M نقطه بی نهایت دور امتداد AB است.

صورت های مهم رابطه ای توافقی

اگر $X_A=a$ و $X_B=b$ و $X_M=m$ و $X_N=n$ باشد :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-\overline{NA}}{\overline{NB}}\Rightarrow\frac{a-m}{b-m}=\frac{-a+n}{b-n}$$

$$\Rightarrow(a+b)(m+n)=2(ab+mn) \qquad (۱)$$

رابطه ی کلی توافقی : بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه چهار نقطه A و B و M و N تشکیل تقسیم توافقی دهند ، این است که رابطه (۱) برقرار باشد .

حالت های خاص

۱. اگر وسط AB را مبدا اختیار کنیم داریم : $a=-b$ و در نتیجه :

$$mn+a(-a)=0\Rightarrow a^2=b^2=mn$$

که آن را رابطه نیوتن می نامند.

۲. اگرمبدااروی یکی از نقاط مثلاً A اختیار کنیم داریم : $a=0$ ورابطه توافقی به صورت زیر تبدیل می‌شود

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

، که آن را رابطه ی دکارت می نامند :

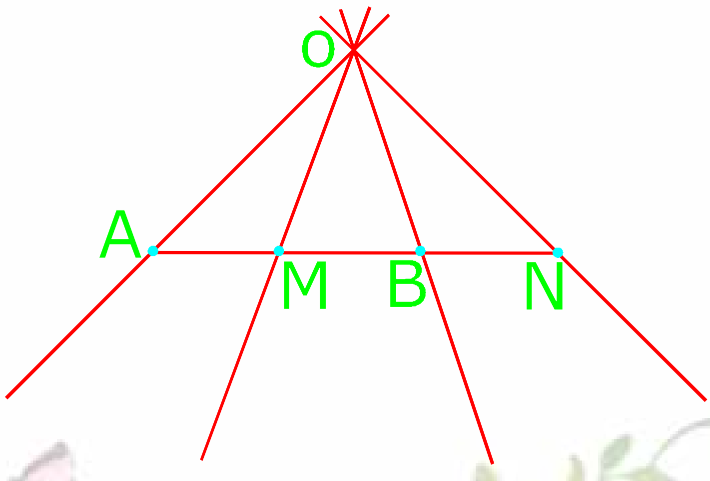
$$b(m+n)=2mn \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \text{ یا } \frac{2}{AB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$$

دسته خط

تعریف. مجموعه خط هایی از یک صفحه را که بر یک نقطه می گذرند ، دسته خط یا مجموعه خط های متقارب یا همرس می نامند و نقطه مشترک آن ها را رأس دسته خط می گویند.

دسته خط های افقی

تعریف. چهار خط متقارب را که از چهار نقطه یک تقسیم توافقی می گذرند ، یک دسته خط توافقی ، یا دستگاه توافقی می گوییم.



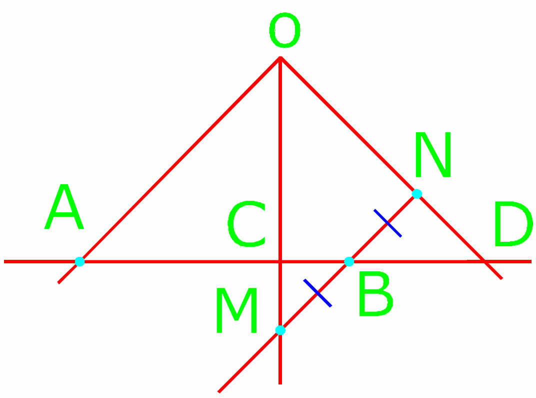
در هر دستگاه توافقی هر دو خط را که از دو نقطه مزدوج تقسیم توافقی می گذرند ، شعاع های مزدوج توافقی ، نسبت به دو شعاع دیگر می گوییم . دستگاه توافقی به راس O و شامل نقاط توافقی A و B و M و N را با نماد $(O-ABMN)$ نمایش می دهیم .

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران

قضیه ۲. هر سه شعاع متوالی از یک دستگاه توافقی بر هر خط موازی با چهارمین شعاع ، دو پاره خط مساوی پدید می آورد و برعکس ، اگر سه شعاع متوالی از یک دستگاه توافقی ، بر خطی موازی شعاع چهارم ، دو پاره خط متساوی پدید آورد ، آن خط با چهارمین شعاع دستگاه ، موازی است.

اثبات. فرض کنیم دستگاه $(O-ABCD)$ توافقی باشد ، پس داریم:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (I)$$



از B خطی موازی شعاع OA رسم می کنیم . با توجه به رابطه I داریم :

$$\overset{\Delta}{OAC}\sim\overset{\Delta}{MBC}\Rightarrow\frac{\overline{OA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$$\overset{\Delta}{DNB}\sim\overset{\Delta}{DOA}\Rightarrow\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{NB}}\Rightarrow\frac{\overline{OA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{OA}}{\overline{NB}}$$

$\Rightarrow\overline{MB}=-\overline{NB}\Rightarrow$ B وسط MN است

برعکس. فرض کنیم MN موازی OA و $\overline{MB}=-\overline{NB}$ باشد :

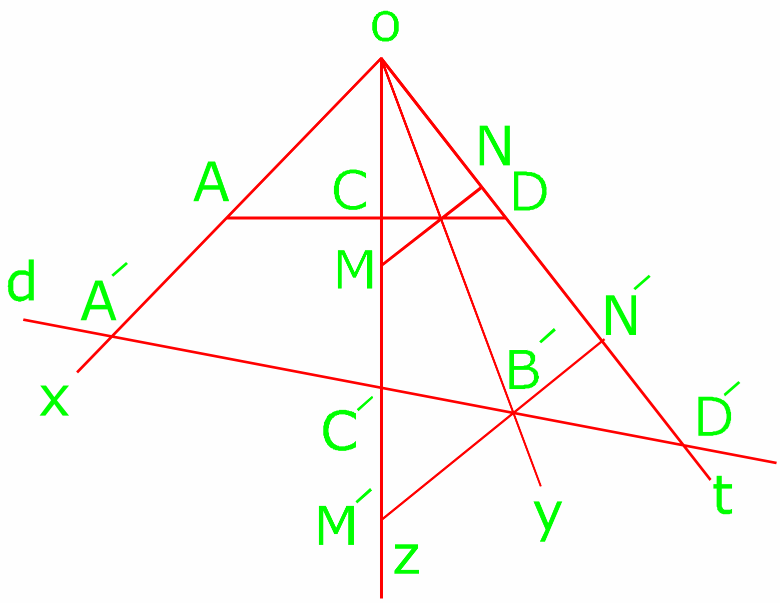
شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}C \sim M\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{MB}} \\ B\overset{\Delta}{N}D \sim O\overset{\Delta}{A}D \Rightarrow \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{NB}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$\Rightarrow (O-ABCD)$ توافقی است:

نتیجه ۱. از تقاطع خط دلخواه با چهار شعاع یک دستگاه توافقی یک تقسیم توافقی پدید می آید .

اثبات. اگر خط دلخواه چهار شعاع دستگاه $(O-ABCD)$ را در A' و B' و C' و D' قطع کند ، از B' خطی موازی MN رسم می کنیم ، چون $MB = BN$ است ، پس $M'B' = B'N'$ و $M'N'$ موازی OA است . پس دستگاه $(O-A'B'C'D')$ نیز توافقی بوده و $(A'B'C'D')$ یک تقسیم توافقی است .



نتیجه ۲. اگر سه شعاع متوالی از یک دستگاه توافقی بر یک خط دو پاره خط متساوی پدید آورند آن خط با چهارمین شعاع دستگاه موازی است . زیرا دستگاه $(O-ABCD)$ توافقی است و اگر B وسط MN باشد از تقاطع MN با اشعه دستگاه نیز به نتیجه (۱) یک تقسیم توافقی به دست می آید . که چون B وسط MN است پس مزدوج

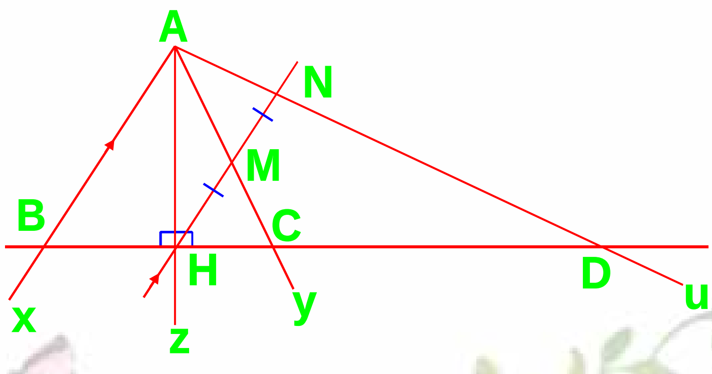
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

B نسبت به M و N ، نقطه بی نهایت دوری روی OA است ؛ یعنی MN موازی شعاع OA می باشد .

نتیجه ۳. در هر مثلث مانند $\overset{\Delta}{OMN}$ میانه OB نظیر ضلع MN وخطی مانند OA که از راس O موازی MN رسم می شود با دو خط OM و ON یک دستگاه توافقی را تشکیل می دهند (چرا؟)

نتیجه ۴. اگر OX، OY و OZ سه خط متقارب باشند و بخواهیم مزدوج خط OZ را نسبت به دو خط OX ، و OY پیدا کنیم ، کافیست روی OZ نقطه دلخواهی مانند A انتخاب کرده واز A دو خط به موازات OX و OY رسم کنیم تا متوازی الاضلاع $OBAC$ حاصل شود . خطی که از O به موازات BC ، قطر این متوازی الاضلاع رسم می شود ، مزدوج OZ می باشد (چرا؟).

نتیجه ۵. در هر مثلث مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد ، از H خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در M قطع کند . HM را به اندازه خودش تا N امتداد می دهیم تا امتداد BC را در D قطع کند . آنگاه AD و AC و AH و AB چهار شعاع دستگاه توافقی می باشند (چرا؟)بنابراین $(A-BCHD)$ توافقی است.



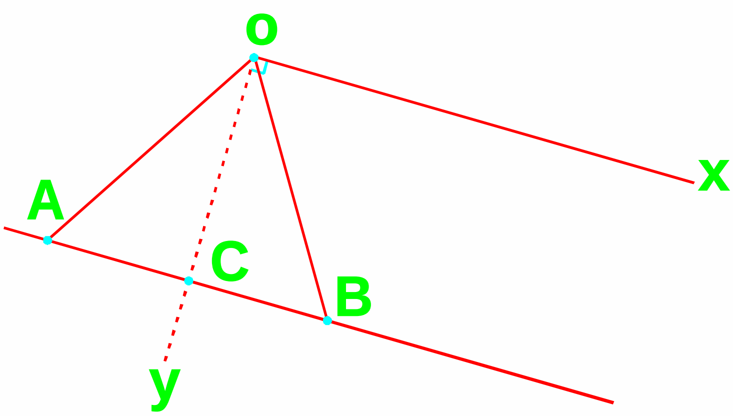
دستگاه توافقی که دو شعاع مزدوج آن بر هم عمودند

قضیه ۳. دو ضلع یک زاویه و نیمسازهای داخلی و خارجی آن زاویه تشکیل یک دستگاه توافقی می دهند . اگر از یک نقطه دلخواه C روی نیمساز OY خط AB را موازی شعاع OX رسم می کنیم ، چون $OX \perp OY$، پس

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

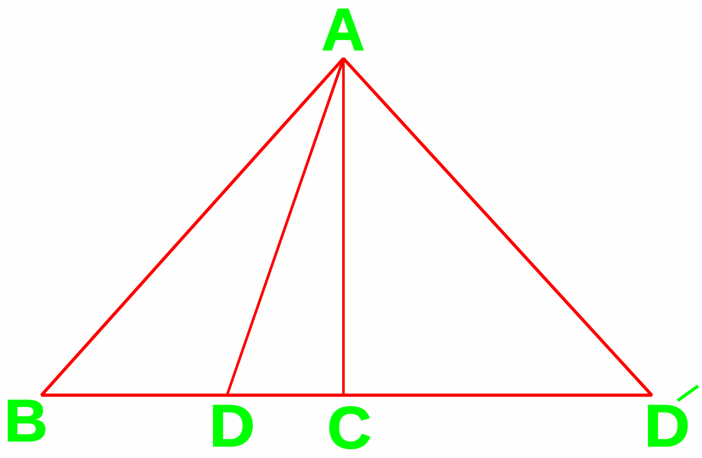
$AB \perp OY$ و در مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ که OC هم نیمساز و هم ارتفاع است ، میانه نیز می باشد پس $AC = CB$ و در نتیجه دستگاه $(O - ABCX)$ توافقی است (طبق نتیجه ۱) . در این دستگاه دو شعاع مزدوج OX و OY بر هم عمودند.

بر عکس اگر دستگاه $(O - ABCX)$ توافقی و $OY \perp OX$ باشد ، OY و OX نیمسازهای $\angle AOB$ می باشند . زیرا اگر از یک نقطه دلخواه C روی OY خط AB را موازی OX رسم کنیم ، داریم : $OC \perp AB$ و چون دستگاه توافقی است پس $AC = CB$ و لذا OC هم ارتفاع و هم میانه مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ است. پس نیمساز نیز می باشد و چون $OY \perp OX$ پس OX نیز نیمساز خارجی است.



نتیجه ۶ . در هر مثلث مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ دو ضلع AB و AC با دو نیمساز داخلی و خارجی AD و AD' از راس A ، تشکیل یک دستگاه توافقی می دهند و D و D' مزدوج یکدیگر نسبت به A و B هستند. به طور مستقل نیز می توان اثبات کرد .

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{D'B}{D'C}\Rightarrow\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}$$

قضیه ۴. شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه $(O-ABCD)$ توافقی باشد آن است کـه ، در صـفحه جهـت دار P رابطه زیر بین زاویه های شعاع های توافقی برقرار باشد .

$$\frac{Sin A\hat{O}C}{Sin B\hat{O}C}=\frac{Sin A\hat{O}D}{Sin B\hat{O}D}$$

هم چنین بین ضریب زاویه های شعاع ها نسبت به یک محور دلخواه رابطه زیر برقرار است :

$$2(m_A m_B + m_C m_D) = (m_A + m_B)(m_C + m_D)$$

ملاحظه. m_A شیب خط OA می باشد . و به همین ترتیب m_B و m_C و m_D تعریف می شوند.

اگر نیمساز زاویه دو شعاع مزدوج مثلاً نیمساز $\angle AOB$ را محور انتخاب کنیم داریم :

$$m_A^2 = m_B^2 = m_C \cdot m_D$$

اگر محور را منطبق بر یکی از شعاع مثلاً OB انتخاب کنیم $m_B = 0$ و خواهیم داشت :

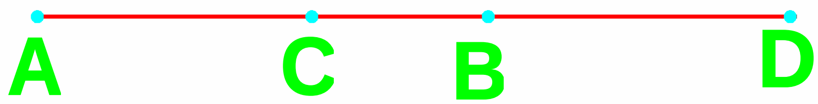
$$\frac{2}{m_A}=\frac{1}{m_C}+\frac{1}{m_D}$$

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

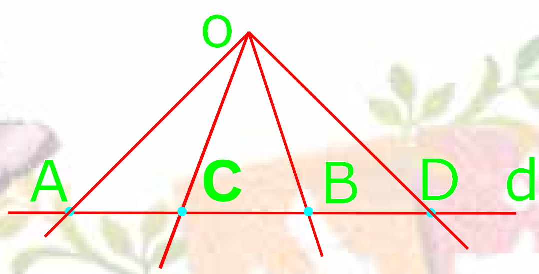
قضیه های تکمیلی (تقسیم توافقی)

ملاحظه. در این قسمت از بخش تقسیم توافقی از قضایا تکراری می باشند و فقط به دلیل اهمیت اثبات هایشان که با اثبات های قبل تفاوت دارند تکرار شده اند .

یادآوری تعریف. فرض کنید نقاط C و D پاره خط AB را به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کنند ، (مطابق شکل) یعنی $DA/DB = CA/CB$. اگر اندازه جبری را در نظر بگیریم ، خواهیم داشت $\overline{CA}/\overline{CB} = -\overline{DA}/\overline{DB} = K$. این رابطه را با نماد $(ABCD) = K$ نشان می دهیم . C و D را مزدوج توافقی نسبت به نقاط A و B می نامیم و می گوییم C و D پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کرده اند .



یک نماد. چهار خط متقارب که بر چهار نقطه یک تقسیم توافقی می گذرند، یک دستگاه توافقی نامیده می شود . هر یک از خطوط متقارب را شعاع توافقی می نامند؛ اگر O محل تقارب شعاع های توافقی باشد این دستگاه را با نماد $O - ABCD$ نمایش می دهیم .



قضیه ۵. اگر نقطه O وسط پاره خط AB باشد ، آنگاه $(ABCD) = -1$ اگر و تنها اگر $\overline{OC}.\overline{OD} = \overline{OA}^2$.

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

اثبات. $\overline{OB}=-\overline{OA}$، زیرا نقطه ی O وسط پاره خط AB است . بنابراین

$$\overline{CA}/\overline{CB}=-\overline{DA}/\overline{DB}$$

اگر وتنها اگر :

$$\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)/\left(\overline{OB}-\overline{OC}\right)=\left(\overline{OD}-\overline{OA}\right)/\left(\overline{OB}-\overline{OD}\right)$$

و این تساوی معادل است با :

$$\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)\left(\overline{OB}-\overline{OD}\right)=\left(\overline{OD}-\overline{OA}\right)\left(\overline{OB}-\overline{OC}\right)$$

با جایگذاری مقدار $\overline{OA}$ به جای $-\overline{OB}$ داریم:

$$\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)\left(-\overline{OA}-\overline{OD}\right)=\left(\overline{OD}-\overline{OA}\right)\left(-\overline{OA}-\overline{OC}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)\left(\overline{OA}+\overline{OD}\right)=\left(\overline{OD}-\overline{OA}\right)\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)$$

$$\Rightarrow\overline{OA}^2+\left(\overline{OD}-\overline{OC}\right)\overline{OA}-\overline{OC}.\overline{OD}$$

$$\Rightarrow\left(\overline{OD}-\overline{OC}\right)\overline{OA}+\overline{OC}.\overline{OD}-\overline{OA}^2$$

$$\Rightarrow\overline{OA}^2-\overline{OC}.\overline{OD}=\overline{OC}.\overline{OD}-\overline{OA}^2$$

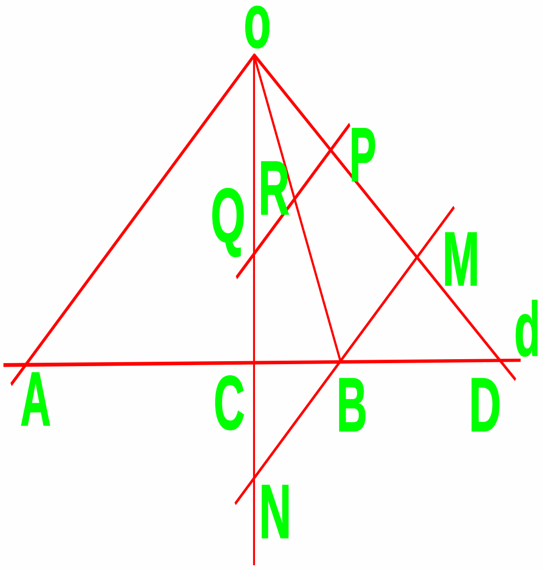
$$\Rightarrow 2\overline{OA}^2=2\overline{OC}.\overline{OD}\rightarrow\overline{OA}^2=\overline{OC}.\overline{OD}$$

قضیه ۶. $(O-ABCD)$ یک دستگاه توافقی است ، اگر و تنها اگر ، هر خطی که موازی یکی از شعاع ها رسم شود سه شعاع دیگر روی آن دو پاره خط مساوی جدا کنند و برعکس .

اثبات. فرض کنید خط d_1 موازی OA رسم شده و شعاع های دیگر را در P ، Q و R قطع کرده است . می خواهیم نشان دهیم $RQ=RP$. از نقطه B خط d_2 را موازی OA رسم می کنیم این خط شعاع های دیگر را در M و N قطع می کند اگر نشان دهیم $MB=NB$ آنگاه چون $d_1\|d_2$ از قضیه ی تالس نتیجه می شود که $RP=RQ$.

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

$OA\|d_2$ بنابراین دو مثلث DMB و DOA متشابه اند پس $MB/OA=DB/DA$ از طرفی $OA\|d_1$ پس دو مثلث CBN و COA متشابه اند . پس $MB/OA=DB/DA$. از طرف دیگر $OA\|d_2$ پس دو مثلث CBN و COA متشابه اند بنابراین $NB/OA=CB/CA$ ولی داشتیم $(ABCD)=-1$. بنابراین $CB/CA=DB/DA$ پس $MB/OA=NB/OA$ بنابراین $MB=NB$. عکس قضیه برقرار است ، یعنی اگر d_1 را موازی OA رسم کنیم و $RP=RQ$ در این صورت بنابر قضیه تالس $MB=NB$ بنابراین با استفاده از تشابه مثلث های یادشده $CB/CA=DB/DA$ یعنی $(ABCD)=-1$ پس $O-ABCD$ یک دستگاه توافقی است .

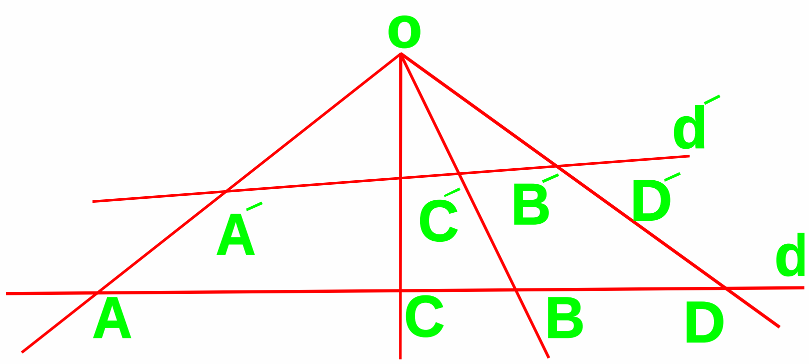


قضیه ۷. اگر $O-ABCD$ یک دستگاه توافقی باشد ، شعاع های توافقی روی هر قاطعی یک تقسیم توافقی ایجادمی کنند یعنی اگر خط d شعاع ها را در نقاط A' ، B' , C' و D' قطع کند آنگاه $(A'B'C'D')=-1$.

اثبات. اگر $O-ABCD$ یک دستگاه توافق است پس بنابر قضیه قبل هر خطی که موازی یکی از شعاع های OA یا OB یا OC یا OD رسم شود توسط شعاع های دیگر پاره خط های مساوی روی آن ایجاد می شود پس هر خطی که موازی شعاع های OA' یا OB' یا OC' یا OD' رسم شود توسط شعاع های باقی مانده پاره خط های مساوی روی آن

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

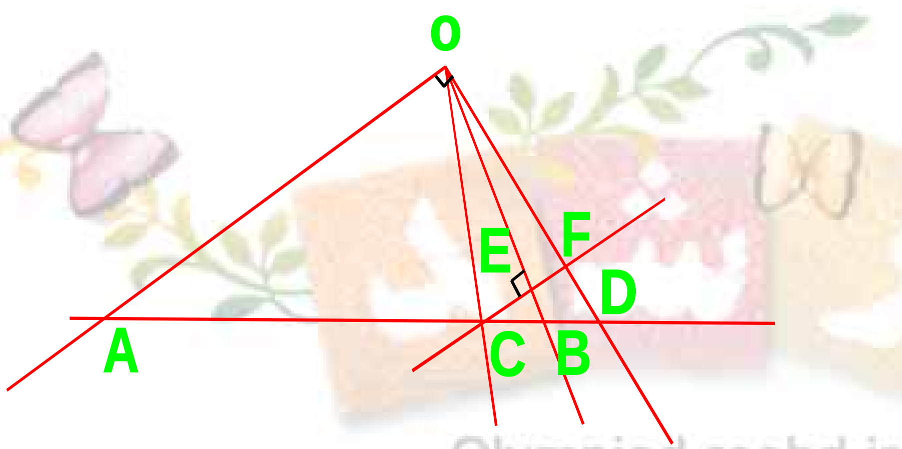
ایجاد می شود پس بنابر عکس قضیه قبل $O-A'B'C'D'$ یک دستگاه توافقی است یا $\left(A'B'C'D'\right)=-1$



قضیه ۸. اگر در دستگاه توافقی $O-ABCD$، دو شعاع OA و OB بر هم عمود باشند آنگاه OA و OB همان نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین دو شعاع دیگر خواهند بود و بر عکس

اثبات. از نقطه ی C خطی به موازات شعاع OA رسم می کنیم بنابر قضیه های قبل، مطابق شکل $CE=EF$ از طرفی OA بر OB عمود است . بنابراین OE عمود منصف ضلع CF در مثلث OCF است بنابراین نیمساز نیز هست ، یعنی OB نیمساز زاویه ی $\angle COD$ است و چون OA بر OB عمود است پس OA نیمساز زاویه خارجی $\angle COD$ باشند .

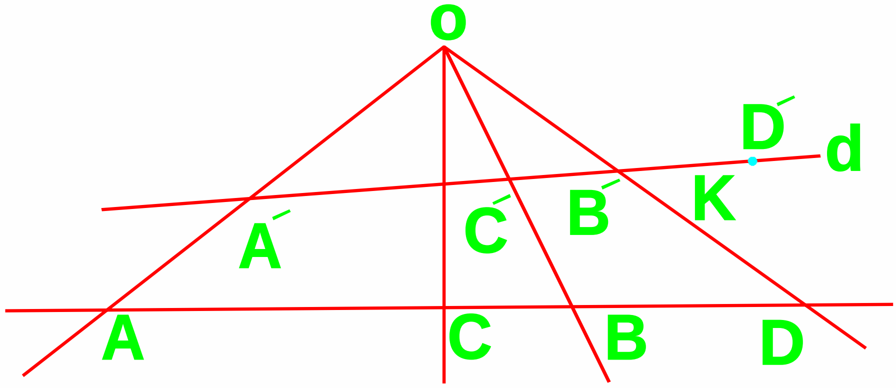
اگر از C خطی موازی OA رسم کنیم بر OB عمود می شود و بنابر تساوی دو مثلث OCE و OFE خواهیم داشت $CE=FE$ پس $\left(ABCD\right)=-1$



شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

قضیه ۹. اگر $(ABCD)=-1$ و $(A'B'C'D')=-1$ و AA' و BB' و CC' متقارب باشند در این صورت DD' نیز از محل تقارب می گذرد . (این قضیه عکس قضیه (۷) است)

اثبات. اگر O مرکز تقارب AA' و BB' و CC' باشد ، D را به O وصل کنید تا امتداد $A'B'$ را در K قطع کند . بنابر (نتیجه۱) $(A'B'C'K)=-1$، از طرفی $(A'B'C'D')=-1$ یعنی K و D' پاره خط $A'B'$ را به طور خارجی به نسبت $C'A'/C'B'$ تقسیم می کنند ولی چنین نقطه ای یکتا است ، پس $K\equiv D'$ ؛ یعنی DD' نیز از O.



مسئله‌ی ۲. قاطع Δ اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در M و N قطع کرده است . نقاط A' و B' و C' را روی اضلاع طوری اختیار می کنیم که هر کدام به همراه نقطه حاصل از تقاطع Δ با آن ضلع ، مورد نظر را به نسبت توافقی تقسیم کنند. ثابت کنید : AA' BB' و CC' همرس اند.(مطابق شکل زیر)

حل. بنابر قضیه ی منلائوس برای قاطع MN در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم :

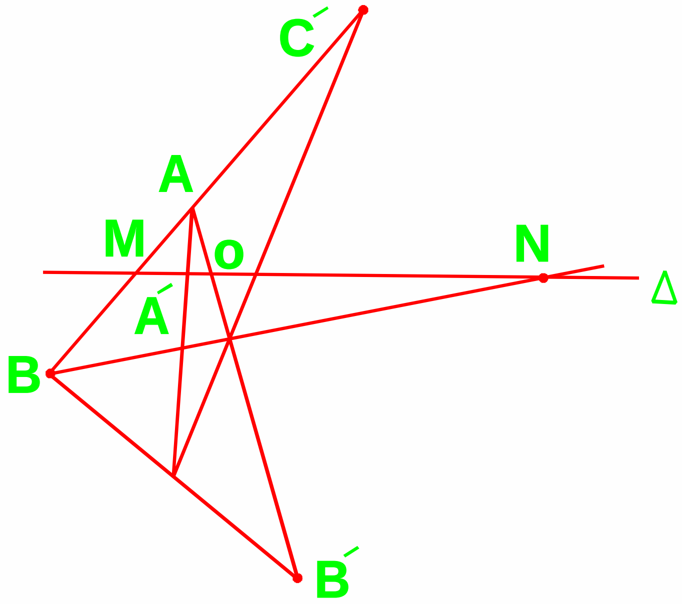
$$\frac{AM}{AB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CO}{OA}=1$$

(که O محل برخورد خط Δ با ضلع AC می باشد.) چون $(ABMC')=1$ داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC'}{C'B}$$

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

و هم چنین از $(ACOB')=-1$ و $(BCA'N)=-1$



به ترتیب داریم :

$$\frac{BN}{NC}=\frac{BA'}{A'C} \text{ و } \frac{CO}{OA}=\frac{B'C}{AB'}$$

و با جایگذاری این مقادیر در رابطه ی منلائوس داریم :

$$\frac{AM}{MB}\times\frac{BN}{NC}\times\frac{CO}{OA}=\frac{AC'}{C'B}\times\frac{BA'}{A'C}\times\frac{B'C}{AB'}=1$$

حال طبق عکس قضیه ی سوا در مثلث ABC و از رابطه ی

$$\frac{AC'}{C'B}\times\frac{B'C}{AB'}\times\frac{BA'}{A'C}=1$$

نتیجه می شود ، نقاط A' ، B' و C' همرس اند.

مسئله‌ی۳. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مفروض است . D را نقطه ای روی امتداد BC (نزدیک C) می گیریم به طوری که

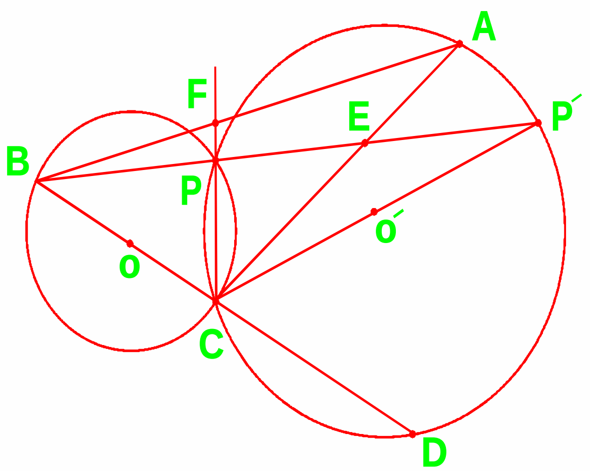
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

$AC = CD$. فرض کنید P نقطه ی تقاطع دوم دایره ی محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ با دایـره ای بـه قطـر BC باشـد . E را نقطه‌ی تقاطع BP با AC و F را نقطه ی تقاطع CP با AB می گیریم. ثابت کنید F ، E و D هم خط اند .

حل. مطابق شکل $\overline{BP}$ را امتداد داده تا $C(O', R')$ را در P' قطع کند . چون $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی الساقین است و C ، O' و P' بر یک استقامتند (چرا؟) پس $\overset{\frown}{AP'} = \overset{\frown}{P'D}$ طبق مسئله قبـل اگـر EF ، BC را در D' قطـع کنـد . داریـم :

$(FDQD') = -1$ (خودتان یکبار دیگر می توانید با کمک قضیه منلائوس و سوا این حکم را ثابت کنید)

حال چون $PF \perp PP'$ ، پس PP' نیمساز زاویه $\angle APD'$ است . اما PP' نیمساز $A\hat{P}D$ نیز اسـت ، پـس $\overline{PD}$ و $\overline{PD'}$ بر هم منطبق اند یا به عبارت دیگر D بر D' منطبق است .



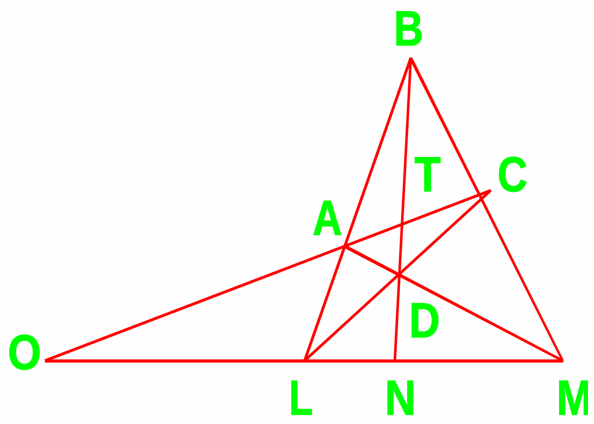
مسئله ی۴. در هر چهارضلعی کامل ، (یعنی چهار ضلعی ای که اضلاع رو به رو متقاطع اند.)هر قطر به وسیله ی دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می شود . توجه کنید که در چهار ضلعی های کامل ، خط واصل محل تلاقی اضـلاع رو به رو یک قطر نامیده می شود . هم چنین می توانید ثابت کنید اواسط اقطار چهارضلعی کامل ، بر یک استقامتند . و نیـز مراکز ارتفاعی چهار مثلثی که از تلاقی اضلاع چهار ضلعی پدید می آیند روی یک خط راست واقع اند .

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران

حل. چهار ضلعی $ABCD$ را در نظر می گیریم : اثبات آنچه در مسئله گفته شده معادل اثبات الف) $(MLNO)=-1$ ب) $(BDIN)=-1$ ج) $(CATO)=-1$ می باشد (چرا؟) . ما(الف) رااثبات می کنیم .(اثبات ب و ج که اثباتشان مانند الف می باشد به عهده خواننده می باشد)

اثبات الف. $(MLNO)=-1$

بنا به قضیه سوا در مثلث $\overset{\Delta}{BLM}$ داریم :



$$\frac{MN}{NL}\times\frac{LA}{AB}\times\frac{BC}{CM}=1 \qquad (۱)$$

و بنابه قضیه ی منلائوس در مثلث $\overset{\Delta}{BLM}$ و مورب $\overline{OAC}$ داریم :

$$\frac{MC}{CB}\times\frac{BA}{AL}\times\frac{LO}{OM}=1 \qquad (۲)$$

پس از ضرب (۱) و (۲) داریم :

$$\frac{MN}{NL}\times\frac{LO}{OM}=1\Rightarrow(MLNO)=-1$$

مسئله‌ی۵. در مثلث متساوی الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ ، ارتفاع نظیر رأس A قاعده BC را در H و دایره ای که در

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران

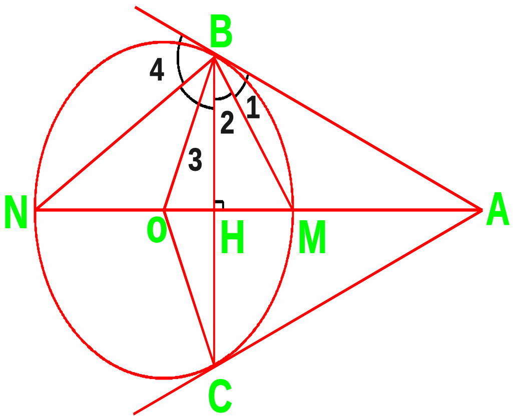
B و C بر ساقه ها مماس است را در M و N قطع کرده است . ثابت کنید چهار نقطه A ، H ، M و N یک تقسیم توافقی تشکیل می دهند .

حل. چون مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است پس M و O بر پای نیمسازهای داخلی و خارجی مرسوم از B بر OA منطبق می باشند .

از طرفی (مطابق شکل) می دانیم :

$$\hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MC}}{2} = \hat{B}_2$$

$$\hat{B}_3 = \frac{\overset{\frown}{BN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{NC}}{2} = \hat{B}_4$$



پس BM و BN نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر راس B هستند ، پس :

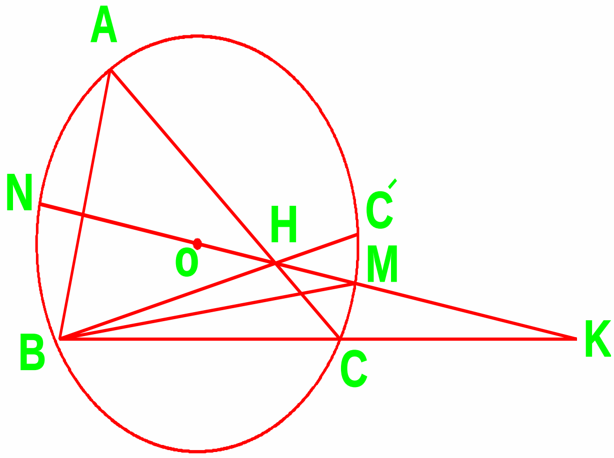
$$(AHMN) = -1$$

مسئله‌ی۶. در دایره ای دو وتر AB و AC را رسم می کنیم . قطر عمود بر وتر AB وتر AC را در H ، امتداد BC را در K و دایره را در M و N قطع می کند . ثابت کنید M و N پاره خط HK را به نسبت توافقی تقسیم می کنند.

حل. چون $MB \perp NB$ ، کافیست ثابت کنیم BM نیمساز $H\hat{B}K$ است . چون MN عمود منصف AB می باشد ،

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

نتیجه می گیریم : $AH = BH$



داریم:

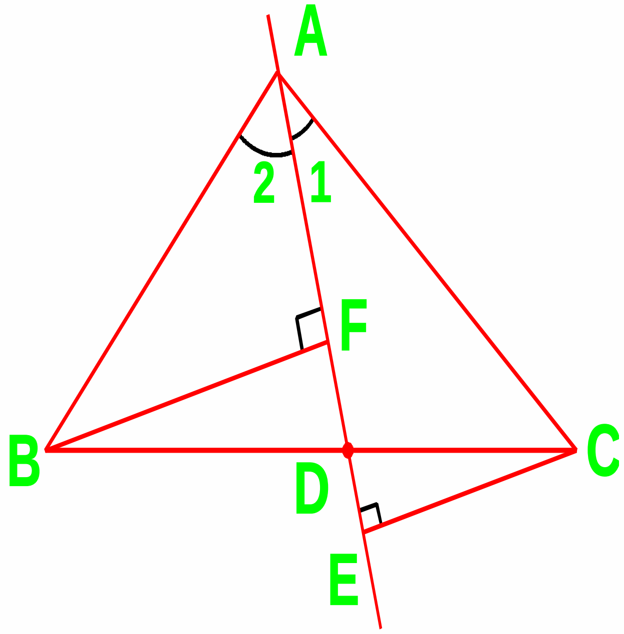
$$AH = BH \to A\hat{H}N = B\hat{H}N \Rightarrow \overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{MC'}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC'} \Rightarrow C'\hat{B}M = C\hat{B}M \Rightarrow (KHMN) = -1$$

مسئله‌ی ۷. اگر D پای نیمساز نظیر راس A از مثلث ABC باشد و F و E به ترتیب تصاویر نقاط B و C روی AD باشند . ثابت کنید $(ADEF) = -1$

حل. دو مثلث $\overset{\Delta}{AFB}$ و $\overset{\Delta}{AEC}$ بنابه حالت دو زاویه مساوی ، با هم متشابهند . بنابراین : $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$. دو مثلث $\overset{\Delta}{BDF}$ و $\overset{\Delta}{CDE}$ نیز بنا به حالت دو زاویه با هم متشابهند . و بنابراین : $\frac{ED}{FD} = \frac{CD}{BD}$.

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



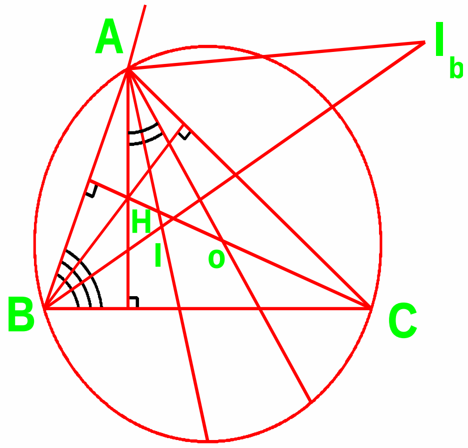
از طرفی می دانیم D پای نیمساز است پس : $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$ در نتیجه داریم :

$$\frac{AE}{AF}=\frac{ED}{FD}\Rightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{AF}{FD}\Rightarrow\left(ADEF\right)=-1$$

مسئله‌ی۸. O ، I و I_b به ترتیب مراکز دوایر محیطی ، محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر راس B از مثلث ΔABC هستند. ثابت کنید $\left(A-HOII_b\right)$ یک دستگاه توافقی است .

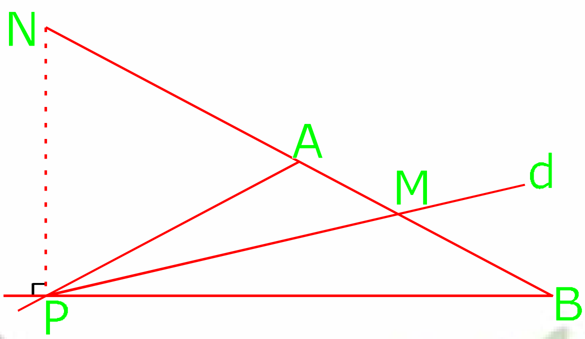
حل. IA I_bA نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A می باشند پس بر هم عمود هستند . از طرفی داریم : $\angle OAI=\angle IAH$. پس IA نیمساز زاویه $\angle HAO$ هم هست . در نتیجه $\left(A-HOII_b\right)$ یک دستگاه توافقی است.(طبق قضیه ۸)

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
رشد
Olympiad.roshd.ir



مسئله‌ی۹. یک خط ودو نقطه در دو طرف آن داده شده اند . ثابت کنید روی این خط نقطه ای وجود دارد که این خط نیمساز زاویه بین دو خط گذرنده از نقطه فوق و دو نقطه مفروض باشد .

حل. فرض کنید خط d پاره خط AB را در M قطع کند ، N را روی امتداد AB طوری انتخاب کنید که $(ABMN)=-1$. از N عمودی بر d فرود آورید تا آن را در P قطع کند، P نقطه مطلوب است . زیرا $PM \perp PN$ ، پس MP و NP نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه $\angle APB$ هستند .

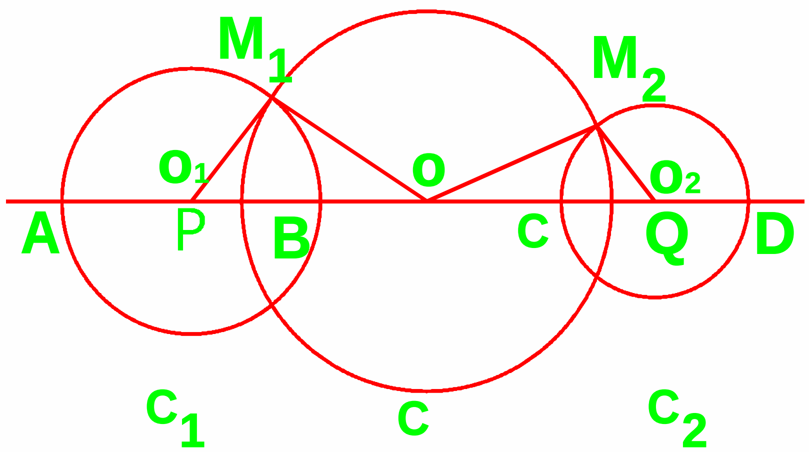


مسئله‌ی ۱۰. چهار نقطه هم خط A و B و C و D مفروض اند . نقاط P و Q را روی خط گذرنده از آنها به گونه ای بیابید که : $(ABPQ)=-1$ و $(CDPQ)=-1$.

حل. مسئله را حل شده فرض کنید . در این صورت دایره به قطر PQ یعنی $C(O,R)$ بر دایره به قطر AB ، یعنی

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

و دایره به قطر CD، یعنی $C_2(O_2,R_2)$، در نقاط M_1 و M_2 عمود است . (برای دیدن دلیل این ادعا به $C_1(O_1,R_1)$ بخش انعکاس مراجعه کنید) بنابراین قوت های نقطه O نسبت به دایره های C_1 و C_2 برابرند با OM_1^2 و OM_2^2 که هر دو مساوی مجذور شعاع دایره C هستند . بنابراین O روی محور اصلی دو دایره C_1 و C_2 قرار دارد . بنابراین بـرای بدسـت آوردن نقاط P و Q کافی است ، نقطه O یعنی محل تلاقی محور اصلی دو دایره C_1 و C_2، با خط واصل A و B و C و D را به دست آوریم و از آن نقطه مماسی بر C_1 یا C_2 رسم کنیم و به مرکز O و به شعاع طول مماس ، دایره ای رسم کنیم تا در نقاط مطلوب یعنی P و Q خط واصل A و B و C و D را قطع کند.



مسئله‌ی ۱۱. در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نیمسازهای نظیر A و B و C اضلاع را در D و E و F قطع کرده اند بـه طـوری کـه $\angle EDF = 90^0$. تمام مقادیر ممکن برای $\angle A$ را بیابید.

حل. فرض کنید امتداد EF امتداد BC را در P قطع کند. در این صورت بنابر قضیه منلائوس برای مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و قاطع EFP خواهیم داشت :

$$\frac{PB}{PC}\times\frac{FA}{FB}\times\frac{EC}{EA}=1$$

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران

از طرفی چون E و F پای نیمسازهای زاویه های B و C می باشند ، داریم :

$$\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BC} \text{ و } \frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AB}$$

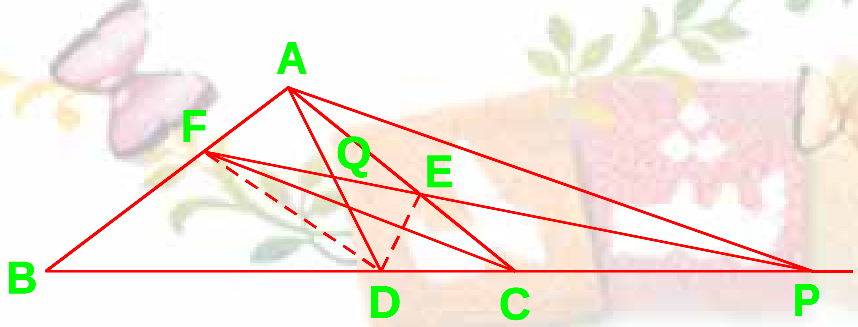
با جایگذاری در رابطه منلائوس خواهیم داشت :

$$\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$$

ولی D هم پای نیمساز نظیر راس A است ، بنابراین $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ ، پس $\frac{DB}{DC}=\frac{PB}{PC}$.یعنی P و D ، BC را به نسبت توافقی تقسیم می کنند . اگر AD ، EF را در Q قطع کند ، آنگاه P و Q ، EF را نیز به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند، زیرا $(A-BCDP)$ یک دستگاه توافقی است و قاطعی شعاع های آن را در F و Q و E و P قطع کرده است . پس $FEQP$ هم یک تقسیم توافقی است . بنابراین $(D-FEQP)$ یک دستگاه توافقی است که دو شعاع آن یعنی DE و DF برهم عمودند ، پس این دو شعاع ، نیمساز زاویه های داخلی و خارجی بین دو شعاع دیگر ، یعنی DQ و DP هستند. بنابراین در مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ ، DE نیمساز است ، پس $AD/DC=AE/EC$. در نتیجه :

$$AD=\frac{2AB.AC\cos\frac{1}{2}\hat{A}}{AB+AC}$$

پس باید $2Cos\frac{1}{2}\hat{A}=1$ پس $\hat{A}=120^{0}$.



شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

مسئله‌ی ۱۲. پنج ضلعی محدب $ABCDE$ با شرایط زیر مفروض است

$$\angle DCB = \angle DEA = 90^0 \qquad DE = DC$$

فرض کنید F نقطه ای روی AB باشد که $AF / FB = AE / BC$. نشان دهید

$$\angle FCE = \angle ADE \qquad \angle FEC = \angle BDC$$

حل. محل تلاقی امتدادهای BC و AE را P می نامیم . چون

$$\angle PCD = \angle PED = 90^0$$

بنابراین چهارضلعی $PCDE$ محاطی است . فرض کنید امتداد BD ، دایره محیطی چهارضلعی $PCDE$ را در نقطه Q قطع کند . محل تلاقی EQ و AB را F' می نامیم . ثابت مـی کنـیم $AF'/F'B = AE/BC$ کـه نتیجـه مـی دهـد F' بـر F منطبـق اسـت . محـل تلاقـی EQ و PC را K مـی نـامیم . از آنجـایی کـه $DC = DE$ خـواهیم داشـت $\angle EQD = \angle CQD$. بنابراین BQ نیمساز زاویه $\angle KQC$ است .از طرفی زاویه $\angle PQD$ روبرو به قطـر PD اسـت پـس $\angle PQD = 90^0$. پس PQ بر BQ عمود می باشد پس چون BQ نیمساز داخلی مثلث $K\overset{\Delta}{Q}C$ است ، نتیجه مـی گیـریم PQ نیمساز خارجی مثلث $K\overset{\Delta}{Q}C$ می باشد . پس طبق عکس قضیه (۸) نتیجه می گیریم P, B, K, C تـشکیل تقـسیم توافقی می دهند . از $(D - PBKC)$ داریم :

$$\frac{KP}{KB} = \frac{CP}{CB} \qquad (I)$$

حال برای مثلث $P\overset{\Delta}{A}B$ و قاطع $KF'E$ قضیه منلائوس را به کار می بریم :

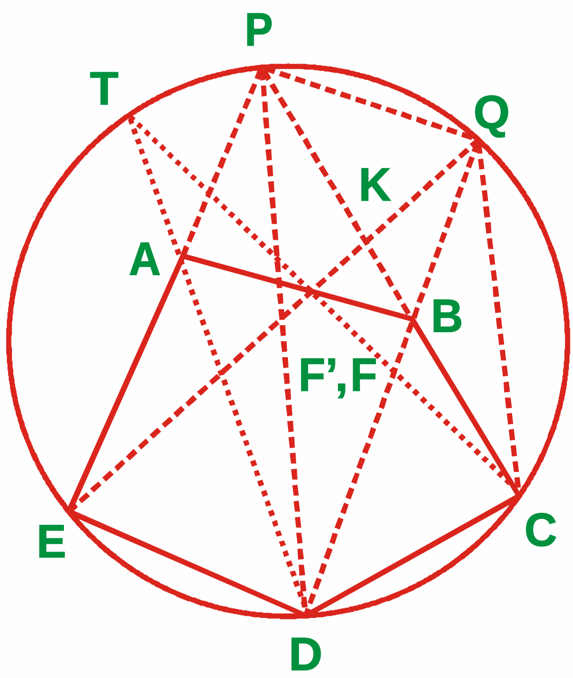
$$\frac{AF'}{F'B}\frac{BK}{KP}\frac{PE}{AE} = 1$$

پس با جایگذاری رابطه ی (I) داریم :

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{KP}{KB}\times\frac{AE}{PE}$$

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{CP}{CB}\times\frac{AE}{PE}=\frac{AE}{BC}$$



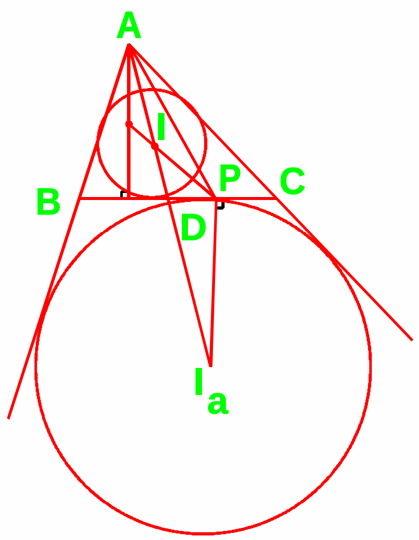
توجه کنید که $PE = PC$ زیرا دو مثلث PDC و PDE با هم مساویند.

حال که ثابت کردیم F' همان F است ، پس F روی خط EQ قرار دارد ، پس چون زاویه های $\angle FEC$ و $\angle BDC$ هر دو رو به رو به کمان $\overset{\frown}{CQ}$ هستند ، پس با هم برابرند. به طریق مشابه ثابت می کنیم اگر محل برخورد امتداد DA با دایره محیطی $PEDC$ را T بنامیم ، F روی خط CT قرار دارد . پس زوایای $\angle FCE$ و $\angle ADE$ رو به رو کمان $\overset{\frown}{TE}$ هستند ، پس با هم برابرند و سوال حل شده است .

مسئله‌ی ۱۳. در هر مثلث ، مرکز دایره محاطی داخلی ، وسط ارتفاع نظیر یک ضلع و محل تماس دایره محاطی خارجی نظیر با آن ضلع ، بر یک استقامت اند.

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

حل. اگر AH ارتفاع نظیر راس A ، I مرکز دایره محاطی و I_a مرکز دایره محاطی خارجی نظیر راس A و D پـای نیمساز نظیر راس A در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد ، مشاهده کنید که I_a و I ، AD را به نسبت توافقی تقسیم می کنند . بنابراین اگر P محل تماس دایره محاطی خارجی با ضلع BC باشد ، $(P-ADII_a)$ یک دستگاه توافقی است (طبق قضیه ی ۸) وازآنجایی که AH موازی PI_a یعنی موازی یکی از شعاع هاست ، پس توسط سه شعاع دیگر دو پاره خط مــساوی روی آن جدا می شود ، یعنی امتداد PI ازوسط AH می گذرد.



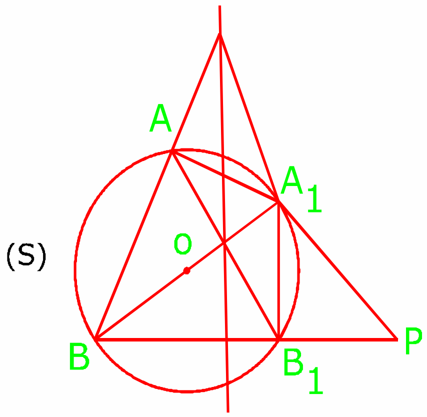
قطب و قطبی نسبت به دایره

ابتدا به وسیله ی یک قضیه ی قطب و قطبی را تعریف می کنیم .

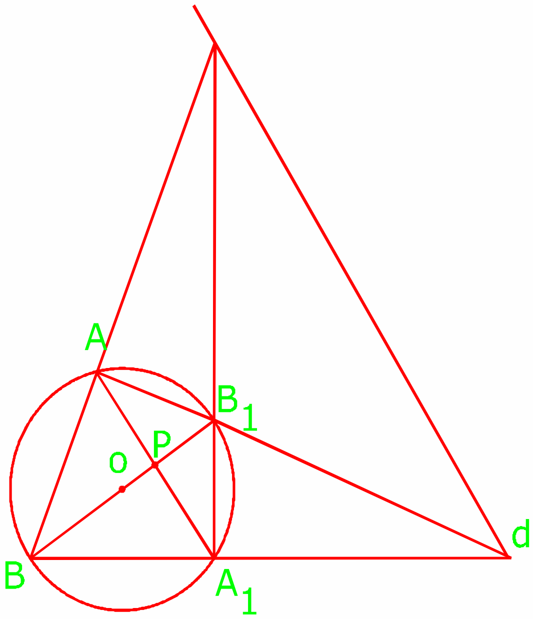
قضیه‌ی ۱۰. اگر از نقطه P ، غیر واقع بر دایره S ، همه جفت قاطع های ممکن را بر دایره رسم کنیم و نقاط تلاقــی آن ها با S را A, A_1, B, B_1 بنامیم ، آنگاه نقاط تلاقی خطوط AB و A_1B_1 ، به ازای هر جفت از خط ها ، همه بر یــک خـط مانند d قرار دارند . (شکل الف و ب)

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir

خط d ، قطبی نقطه ی P ، و نقطه P ، قطب خط d ; نسبت به دایره S نامیده می شود .



ب



الف

قبل از تعریف دقیق قطب و قطبی بهتر است نسبت همساز (نسبت توافقی) به اختصار یادآوری شود .

نسبت همساز (= نسبت توافقی)

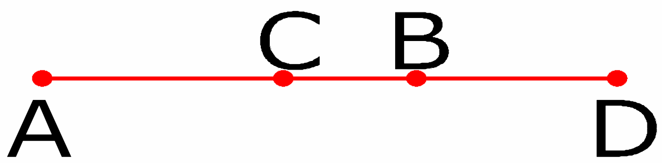
نسبت $\overline{AC}/\overline{BC}$ را در نظر می گیریم ، که در آن C نقطه ای است که پاره خط $\overline{AB}$ را تقسیم می کند . حالتی که C وسط $\overline{AB}$ باشد ، یعنی وقتی $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ طول های مساوی و جهت های مختلف داشته باشند به قسمی که $\overline{AC}/\overline{BC}=-1$ ، مورد علاقه ی خاص ماست . هم چنین وقتی برای چهار نقطه ی A, B, C و D نسبت ناهمساز $\left(\overline{AC}/\overline{BC}\right)/\left(\overline{AD}/\overline{BD}\right)$ را در نظر می گیریم.

حالت $\left(\overline{AC}/\overline{BC}\right)/\left(\overline{AD}/\overline{BD}\right)=-1$ یا مجزا می کنیم ، در این حالت یکی از دو نقطه ی C و D داخل پاره خط $\overline{AB}$ و دیگری بیرون آن است . برای تشخیص این وضعیت گوییم نقطه های C و D پاره خط $\overline{AB}$ را به نسبت همساز

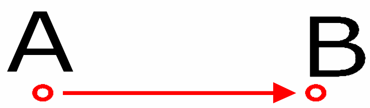
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

(=نسبت توافقی) تقسیم می کنند .

یک نماد. $\left(\overline{AC}/\overline{BC}\right)/\left(\overline{AD}/\overline{BD}\right)=-1$ را نسبت همساز (= نسبت توافقی) نقاط A, B, C و D رابا نماد $(ABCD)=-1$ نشان می دهیم .



نکته ۱. توجه شود که در تقسیم توافقی (= تقسیم همساز) تمام پاره خط ها به صورت بردار هستند مثلاً منظوراز $\overline{AB}$ یا $\overrightarrow{AB}$ بردار می باشند که ما این بردار را بدون علامت $\rightarrow$ برسرابتداوانتها بردارنشان داده ایم .



قضیه‌ی ۱۱. اگر پاره خط های گستره همساز $(ABCD)=-1$ را از O، نقطه ی وسط پاره خط AB ،اندازه بگیریم ، با در نظر گرفتن اندازه و علامت خواهیم داشت :

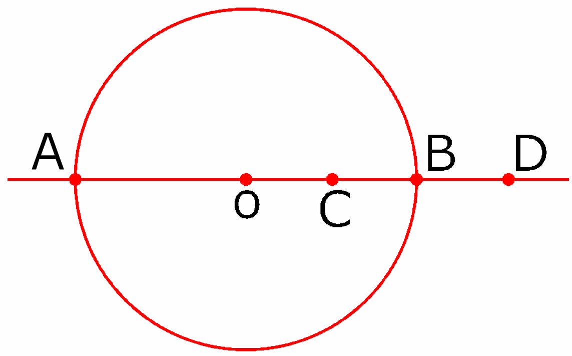
$$\overline{OC}.\overline{OD}=\overline{OA}^2$$

اثبات : می دانیم اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد، آنگاه : $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

پس در این مسئله $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ می باشد و داریم :

$$\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AC}-\overline{CB}}=\frac{\overline{AD}-\overline{DB}}{\overline{AD}+\overline{DB}} \qquad (I)$$

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



از طرفی داریم :

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=2\overline{AO}$$

$$\overline{AC}-\overline{CB}=\left(\overline{AO}+\overline{OC}\right)-\left(\overline{CO}+\overline{OB}\right)=2\overline{OC}$$

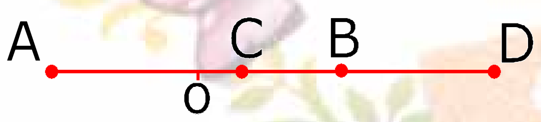
$$\overline{AD}-\overline{DB}=\left(\overline{AO}+\overline{OD}\right)-\left(\overline{DO}+\overline{OB}\right)=2\overline{OD}$$

$$(I)\ \text{رابطه}\Rightarrow\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AC}-\overline{CB}}=\frac{\overline{AD}-\overline{DB}}{\overline{AD}+\overline{DB}}$$

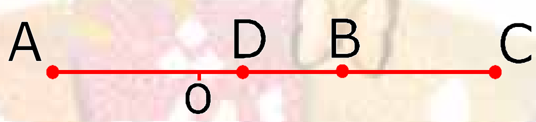
$$\Rightarrow\frac{2\overline{AO}}{2\overline{OC}}=\frac{2\overline{OD}}{2\overline{AO}}\Rightarrow\overline{OA}^2=\overline{OC}.\overline{OD}$$

عکس قضیه۱۱. اگر O نقطه ی وسط پاره خط AB باشد ، و C و D دو نقطه ی خط $\overline{AB}$ باشند ، به طوری که بـا در نظر گرفتن اندازه و علامت داشته باشیم $\overline{OC}.\overline{OD}=\overline{OA}^2$، آنگاه نشان دهید : $(ABCD)=-1$

اثبات. تمام مراحل قضیه ی قبل را به صورت معکوس انجام دهید (به عهده خواننده)



(الف)



(ب)

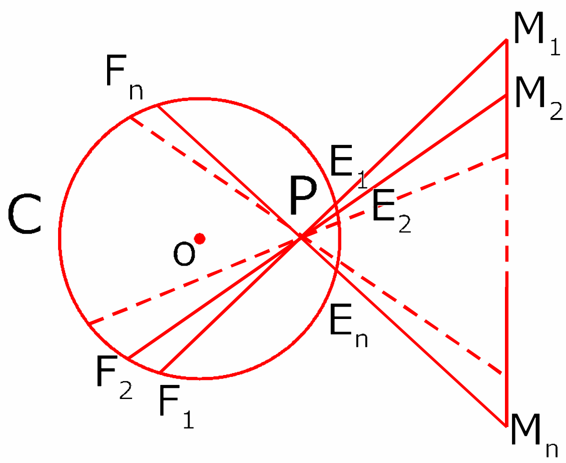
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

تعریف ۱. قطبی نقطه ی P نسبت به دایره O، مکان هندسی مزدوج های توافقی P است نسبت بـه نقطـه هـای برخورد دایره با هر خط غیرمشخصی که بر P برگذرد ، نقطه ی P را قطب مکان ذکر شده می گویند ، یعنی اگر یک خط گذرنده از نقطه ی P دایره را در E_1 و F_2 قطع کند و M_1 نقطه ای باشد که داشته باشیم $(F_1 E_1 PM_1) = -1$ و به طریق مشابه برای $E_2,\dots,E_n$ و $F_2,\dots,F_n$ نیـز داشــته باشـیم $(F_2 E_2 PM_2) = -1$ ،...، $(F_n E_n PM_n) = -1$ آنگـاه نقـاط $M_1, M_2, \mathbf{K}, M_n$ همگی روی یک خط قرار دارند که این خط راقطبی نقطه P گوییم. (شکل بالا)

نکته. گوییم نقطه M وارون یا مزدوج توافقی نقطه ی P نسبت به نقاط E و F است اگر $(EFPM) = -1$ باشد .

یا به عبارتی :

$$\frac{FP}{PE} = -\frac{FM}{EM}$$



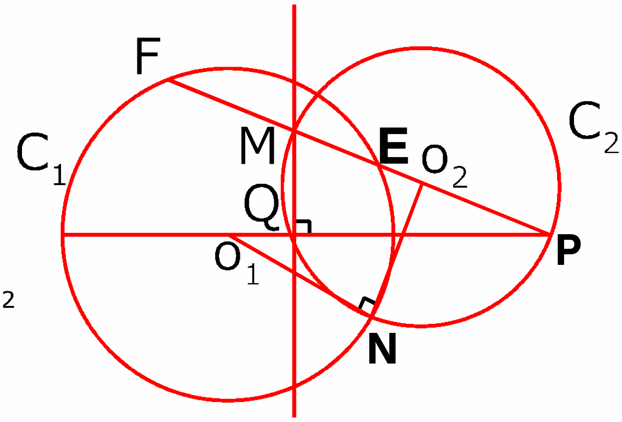
$O'M.O'P = O'E^2 = O'F^2$ (که O' وسط EF است)

$O''E.O''F = O''M^2 = O''P^2$ (که O'' وسط MP است)

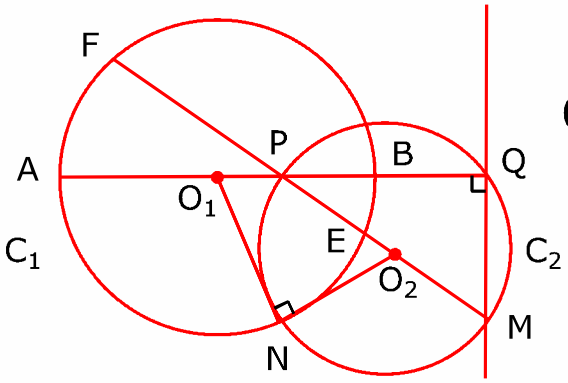
تعریف ۲. خط MQ را خط قطبی نقطه ی P نـسبت بـه دایـره یـا بـرای دایـره ، و نقطـه ی P را قطـب خـط MQ می‌نامند . که MQ همان خط گذرنده از است که در تعریف ۱ گفته شد .

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران

قضیه ۱۲. قطبی هر نقطه نسبت به دایره خطی است مستقیم ، عمود بر قطری که از آن نقطه می گذرد (شکل الف و ب)



(الف)



(ب)

اثبات. روی دایره ی مفروض C_1، دو نقطه E و F که با نقطه ی ثابت و مفروض P همخط می باشند را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M مزدوج توافقی P نسبت به نقاط E و F باشد . AB قطری از دایره C_1 است که از P می‌گذرد و Q پای عمود مرسوم از نقطه ی M بر قطر AB می باشد .

در دایره C_2 زاویه $\angle PQM$ قائمه است ، پس PM قطر دایره C_2 می باشد . از اینکه M، مزدوج توافقی P نسبت به نقاط E و F است ، نتیجه می شود : $O_2E.O_2F = O_2P^2$ که در آن O_2 مرکز دایره C_2 ووسط قطر PM است . از طرفی $O_2P = O_2N$ (چون هر دو شعاع دایره C_2 می باشند) ، پس $O_2E.O_2F = O_2N^2$. با توجه به قوت نقطه O_2 نسبت به دایره C_1 نتیجه می شود که O_2N خط مماس بر دایره C_1 می باشد . پس O_1N شعاع دایره C_1 در نقطه ی N بر O_2N عمود است. (دو دایره متعامدند.)

از عمود بودن دوایر نتیجه می شود که O_1N بر دایره C_2 مماس است ، حال با توجه به قوت نقطه ی O_1 نسبت به

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

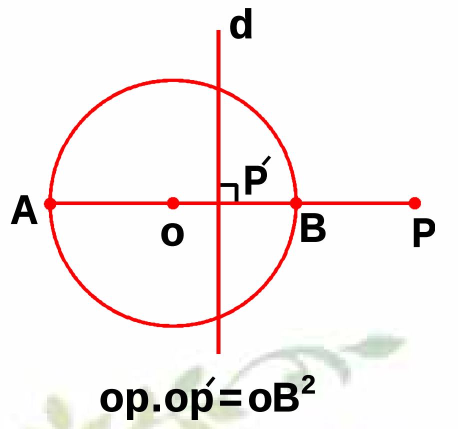
دایره C_2 داریم : $O_1P.O_1Q = O_1N^2$. چون O_1N و O_1B و O_1A، هر سه شعاع های دایره C_1 می باشند ، پس $O_1A = O_1B = O_1N$ و با جایگذاری داریم :

$O_1P.O_1Q = O_1N^2 = O_1A^2 = O_1B^2$ (O_1 وسط AB)

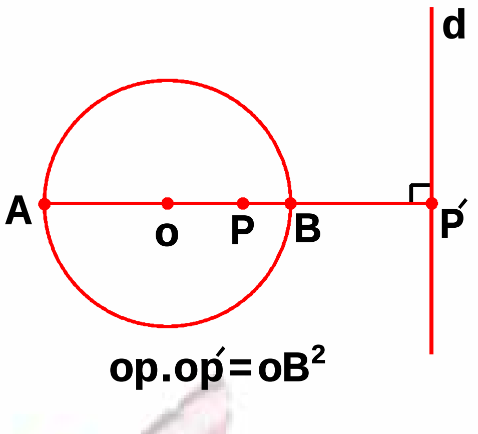
و این به معنی این است که Q مزدوج توافقی P نسبت به نقاط A و B می باشد . پس Q نقطه ثابتی است و مستقل از انتخاب E و F روی دایره C_1 می باشد ، و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

نتایج

الف. خط قطبی یک نقطه داده شده (مانند P) نسبت به دایره ای مشخص (خط d)، بر قطری از دایره که از آن نقطه (نقطه P) می گذرد ، عمود است که پای عمود مرسوم (نقطه ی P') ، وارون نقطه P نسبت به دایره است . یعنی : $\overline{OP}.\overline{OP'} = \overline{OA}^2$ (شکل های الف و ب)



(الف)



(ب)

ب. قطب یک خط داده شده نسبت به یک دایره ، وارون پای عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم

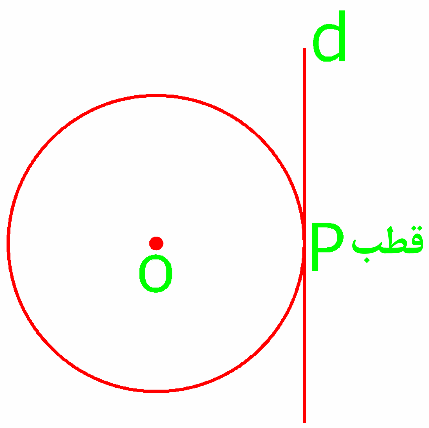
Olympiad.roshd.ir
شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد

می‌شود . (شکل الف و ب بالا)

توضیح. یعنی در شکل ، قطب خط d ، وارون نقطه P' نسبت به A و B ، یا همان P می باشد .

نکات

نکته ۲. خط قطبی یک نقطه از دایره ، خطی است که در آن نقطه بر دایره مماس است . قطب خط مماس بر دایره ، نقطه‌ی تماس آن خط با دایره است . زیرا وارون یک نقطه واقع بر دایره ، برخود آن نقطه منطبق است :

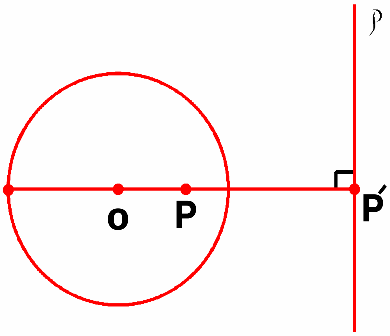


$$\left.\begin{array}{l} OP.OP' = R^2 \\ OP = R \end{array}\right\} \Rightarrow OP' = R \Rightarrow P \equiv P'$$

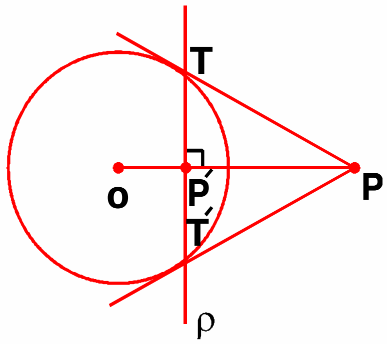
نکته ۳. هر نقطه از صفحه یک دایره نسبت به آن دایره یک خط قطبی دارد به جز مرکز دایره . هر خط واقع در صفحه یک دایره ، یک قطب دارد ، به جز خط هایی که از مرکز دایره می گذرند .

نکته ۴. اگر قطب داخل دایره باشد ، خط قطبی دایره را قطع نمی کند.(مطابق شکل زیر) اگر قطب خارج دایره باشد ، خط قطبی آن خطی است که از نقطه تماس مماس هایی که از آن نقطه (نقطه P) بر دایره رسم می شوند ، می‌گذرد . (مطابق شکل زیر ب)

شبکه ملی مدارس ایران - شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir



(الف)



(ب)

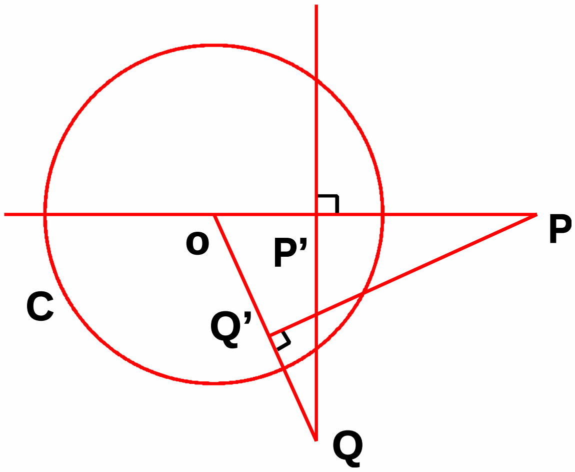
قضیه۱۳. اگر خط قطبی نقطه ی P ، از نقطه ی Q بگذرد ، خط قطبی Q هم از P خواهد گذشت . ایــن قــضیه از پرکاربردترین قضیه های قطب و قطبی است ، اکنون آن رااثبات می کنیم .

اثبـــات. P' و Q' بـــه ترتیـــب وارون نقـــاط P و Q نـــسبت بـــه دایـــره $C(O,R)$ هـــستند ، پـــس داریـــم : $OP.OP' = R^2 = OQ.OQ'$

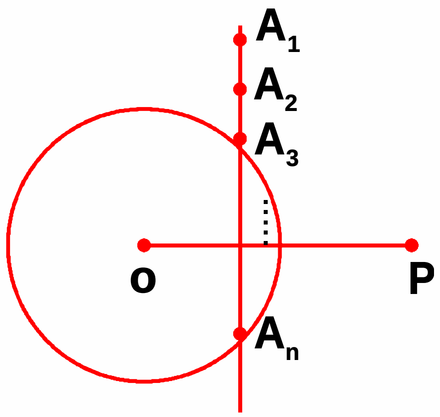
چهار ضلعی $PQQ'P'$ محاطی است و $\angle PQ'Q = \angle PP'Q$. از طرف دیگر QP' خط قطبی نقطه P است ، زیرا از Q (طبق فرض مسئله) و وارون P یعنی ، P' می گذرد . پس $\angle PP'Q = 90^0$ ودرنتیجه $\angle PQ'Q = 90^0$ می باشد.

خط PQ' از وارون Q ، یعنی Q' ، می گذرد و بر OQ عمود است (طبق تعریف خط قطبی) ، پس PQ' خط قطبی نقطه Q است و چون PQ' از P می گذرد قضیه ثابت شده است . (مطابق شکل زیر)

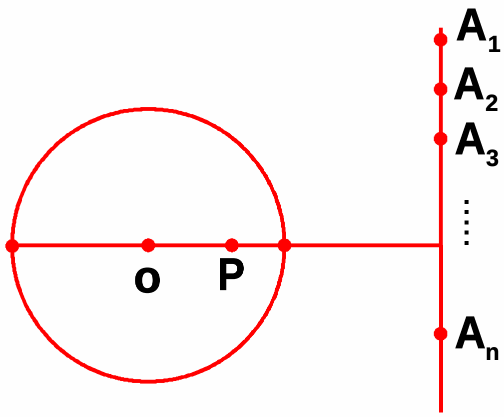
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir



تعریف ۳. دو نقطه را که خط قطبی یکی از نقطه دیگری بگذرد ، نقطه های مزدوج نسبت به دایره قطبی نامند . هر نقطه ی داده شده ، بی نهایت نقطه ی مزدوج دارد ، که عبارتند از ، همه نقطه های واقع بر خط قطبی آن نقطه (شکل الف و ب) .



(الف)



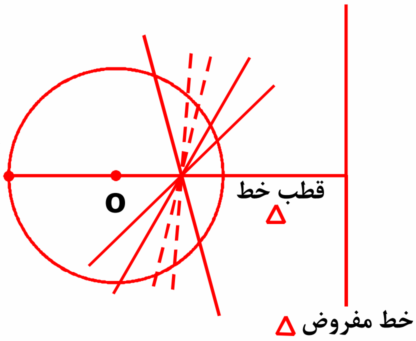
(ب)

اگر دو نقطه مزدوج ، با مرکز دایره هم خط باشند ، آن گاه نسبت به دایره وارون یکدیگرند.

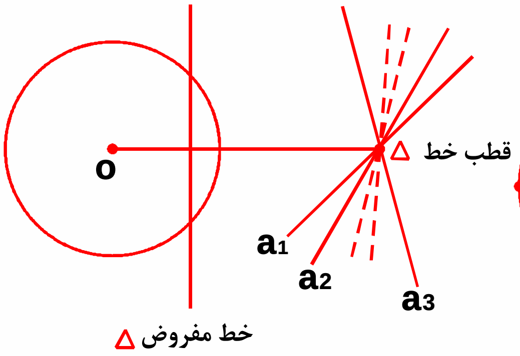
قضیه ۱۴. اگر قطب خط p ، روی خط q باشد . آن گاه قطب خط q نیز روی خط p قرار دارد .

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

تعریف ۴. دو خط که قطب های هر یک ، روی دیگری قرار دارد را ، خط های مزدوج نسبت به دایره می نامند . هر خط داده شده ، بی نهایت خط مزدوج دارد ، که عبارتند از ، خطوطی که از قطب آن خط می گذرند . (شکل الف و ب)



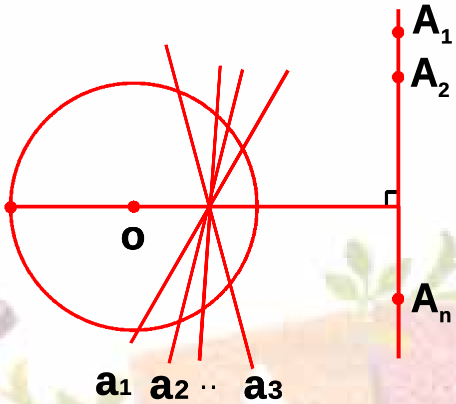
(الف)



(ب)

قضیه ۱۵. قطب های تمام خط هایی که بر یک نقطه می گذرند ، بر خط قطبی این نقطه قرار دارند (مطابق شکل) .

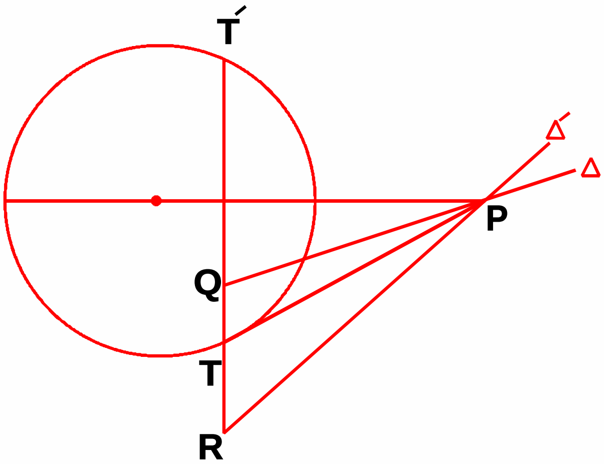
قضیه ۱۶. قطبی های تمام نقطه هایی که روی یک خط باشند;ازنقطه ی قطب این خط میگذرند;یعنی همرسند.(مطابق شکل زیر)



قضیه ۱۷. اگر دو خط مزدوج ، یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند ، این دو خط نسبت به دو مماسی که از نقطه‌ی

شبکه ملی مدارس ایران – شبکه رشد
Olympiad.roshd.ir

برخورد آن ها بر دایره رسم می شوند ، مزدوج همسازند . (مطابق شکل زیر)



اثبا ت. فرض کنید دو خط مزدوج Δ و Δ' یکدیگر را در نقطه P خارج از دایره قطع کنند . از نقطه P مماس های PT و PT' را رسم می کنیم . طبق نکته ۴، خط TT' قطبی نقطه P است . محل برخورد خطوط Δ و Δ' با TT' را Q و R می نامیم .

چون دو خط مزدوج هستند ، بنابراین قطب خط Δ' بر روی خط Δ می باشد (تعریف ۴) از طرفی نقطه P روی خط Δ' قرار دارد ، پس قطب Δ روی خط قطبی $P(TT')$ قرار دارد (قضیه ۱۳) . بنابراین قطب Δ' محل برخورد Δ و TT'، یعنی همان Q می باشد .

از آنجا که خط قبلی نقطه ی Q نسبت به دایره C، مکان هندسی مزدوج های توافقی Q نسبت به نقطه های برخورد دایره با هر خط دلخواهی (مانند TT') که از Q می گذرد ، می باشد (طبق تعریف ۱) ، بنابراین R مزدوج توافقی (= همساز) Q نسبت به T و T' می باشد و داریم $(TT'QR)=-1$، بنابراین $(P-TT'QR)$ یک دسته خط همساز هستند.

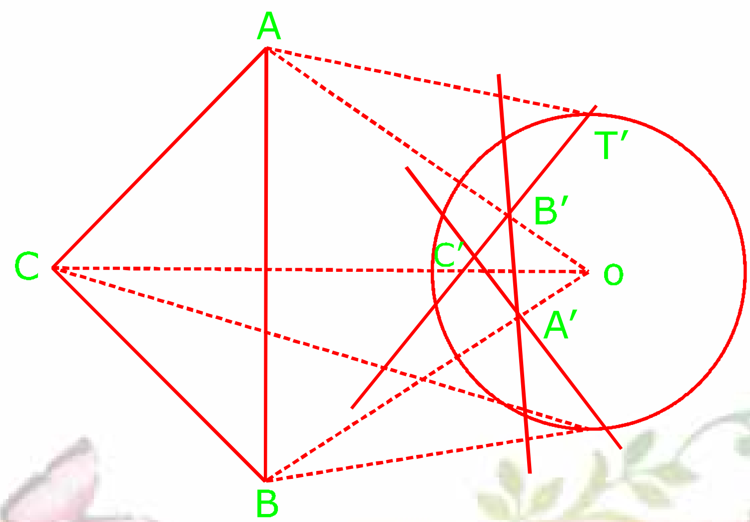
Olympiad.roshd.ir

تبدیل به وسیله ی قطب و قطبی

هر گاه یک چند ضلعی با رئوس A و B و C و... را در نظر گرفته و (a) و (b) و (c) و... قطبی های راس های آن نسبت به دایره ای دلخواه را بدست آوریم (مطابق شکل زیر) چند ضلعی دیگری به دست می آید که ضلع های متوالی آن (a) و (b) و (c) و... هستند (واضح است که تعداد راس ها و ضلع های این دو چند ضلعی با هم مساوی است) ، می گوییم چند ضلعی اول را به وسیله ی قطب و قطبی به چند ضلعی دوم ، تبدیل کرده ایم .

چون در این چند ضلعی هر راس یکی ، قطب یک ضلع از دیگری و هر ضلع یکی قطبی یک راس از دیگری است ، دو شکل را قطبی متقابل یا قطبی معکوس می خوانند .

قضیه ۱۸. در دو شکل قطبی متقابل ، هر راس از یکی قطب دیگری و هر ضلع یکی قطبی یک راس از دیگری است (مطابق شکل زیر)



قضیه ۱۹ . اگر دو نقطه یک دایره ، نسبت به دایره دیگری وارون باشند، آنگاه دو دایره متعامدند. (مطابق شکل زیر)

Olympiad.roshd.ir

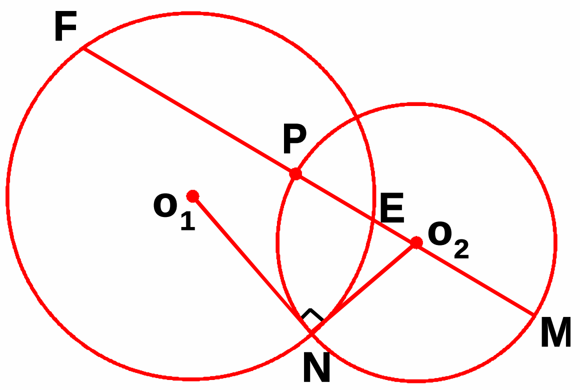
اثبات. M و P را محل برخورد خط EF با دایره دوم می گیریم ، از اینکه M مزدوج P نسبت به نقاط E و F است ، نتیجه می شود :

$O_2E.O_2F = O_2P^2$ (که O_2 وسط PM می باشد)

از طرفی $O_2P = O_2N$ (چون هر دو شعاع دایره C_2 هستند) . پس با جایگذاری داریم :

$$O_2E.O_2F = O_2P^2 = O_2N^2$$

از قوت نقطه O_2 نسبت به دایره C_1 نتیجه می شود که O_2N، در نقطه N بر دایره C_1 مماس است و از آنجا که شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است ، O_1N بر O_2N عمود می باشد و حکم ثابت شده است .



عکس قضیه ۱۹. اگر دو دایره متعامد باشند ، هر دو نقطه ای از یکی از آنها، که با مرکز دایره دوم هم خط باشند ، نسبت به دایره دوم همخط باشند ، نسبت به دایره دوم وارون اند.

اثبات. از متعامد بودن دو دایره داریم : O_2N بر دایره C_1 مماس است .(مطابق شکل) حال با توجه به قوت نقطه ی O_2 نسبت به دایره C_1 داریم : $O_2E\cdot O_2F = O_2N^2$. چون O_2F, O_2E, O_2N هر سه شعاع دایره C_2 می باشند ، $O_2F = O_2E = O_2N$ ، و با جایگذاری داریم :

$O_2E.O_2F = O_2N^2 = O_2P^2 = O_2M^2$ (O_2 وسط PM می باشد)

شبکه رشد - شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir

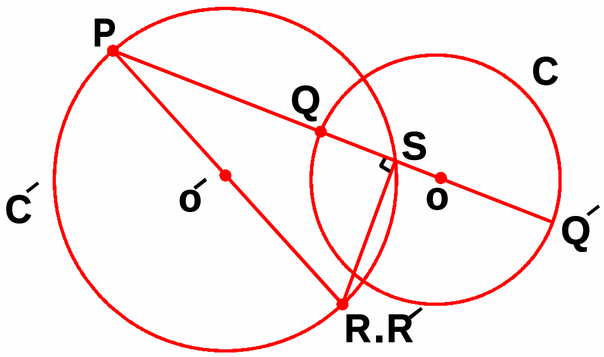
به این معنی که Q، مزدوج توافقی (= مزدوج همساز) P، نسبت به نقاط A و B می باشد .

قضیه ۲۰. اگر دو دوایر متعامد باشند نقاط انتهایی هر قطری از یک دایره ، نسبت به دایره دیگر ، مزدوجند (مطابق شکل زیر)

یادآوری. دو دایره متعامدند اگر ، شعاع دو دایره در نقطه برخورد دوایر ، بر هم عمود باشند .

یادآوری. دو نقطه را که خط قطبی یکی ، از دیگری بگذرد ، نقطه های مزدوج نسبت به دایره می نامند.

اثبات قضیه. خط PO که از نقطه P به مرکز دایره (C) رسم می شود ، دایره (C') را مجددا در وارون P نسبت به (C)، یعنی نقطه ی S، قطع می کند . خط قبلی نقطه P در نقطه وارون P (یعنی S) بر قطر گذرنده از نقطه P (قطر QQ') عمود است. حال اگر R' محل برخورد خط قطبی P نسبت به دایره (C)، با دایره (C') در نظر بگیریم . زاویه $\angle PSR' = 90$ قائمه خواهد بود . یا به عبارتی PR' قطری از دایره (C') می باشد . از آنجا که فقط یک قطر از نقطه ی P می گذرد ، باید R' همان R باشد . پس R روی قطبی نقطه P نسبت به دایره (C) می باشد و حکم ثابت شده است .



عکس قضیه ۲۰. اگر دو نقطه انتهایی قطری از یک دایره ، نسبت به دایره ای دیگر مزدوج باشند ، آن دو دایره متعامدند .

اثبات. از اینکه P و Q مزدوج یکدیگرند ، نتیجه می شود خط قطبی P نسبت به دایره (C') از نقطه R می گذرد

Olympiad.roshd.ir
شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران

(مطابق شکل بالا) و بر PO عمود است (قضیه ۱۲) از طرفی زاویه $\angle PSR = 90$ (چون S رو به رو به قطر PR در دایره (C) می باشد . بنابر آنچه گفته شد ، نتیجه می گیریم که RS خط قطبی نقطه P نسبت به دایره (C) می باشد . بنابراین نقطه S، وارون نقطه P نسبت به دایره (C) می باشد . پس طبق قضیه ۱۹ متعامد خواهند بود و حکم ثابت شده است .

شبکه رشد – شبکه ملی مدارس ایران
Olympiad.roshd.ir