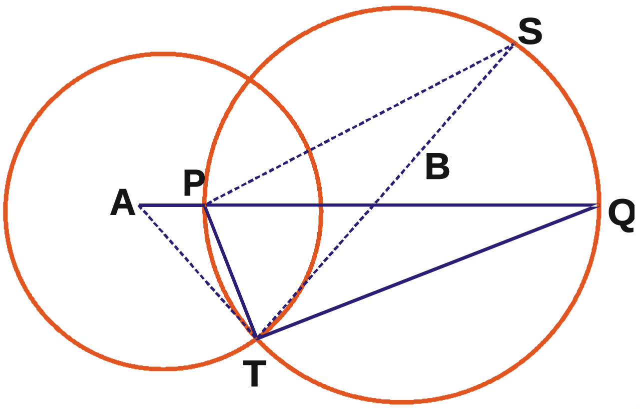
اصل تقارن

فرض می‌کنیم دو دایره به مراکز B, A یکدیگر را به زاویه قائمه قطع کرده اند. فرض کنید شعاعی که از A می گذرد دایره B را در نقاط Q, P قطع کند.

T را یک از دو نقطه تقاطع دوایر B, A (استدلال ما به این امر که T کدام یک از نقاط تقـاطع باشد وابسته نیست – همچنین اگر جاهای Q, P با هم عوض شوند، فقط اندک اصلاحاتی مورد نیاز واقـع می‌شود) و TS را قطری از دایره B می‌گیریم. پس:

$$\angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{2} - \angle PTS = \angle ATP$$

$$\therefore \Delta ATP \sim \Delta AQT$$



شکل۱

(توجه کنید که در این فصل دیگر روی همجهت بودن دو مثلث متشابه پافشاری نمـی‌کنـیم.) از اینجا نتیجه می‌شود که :

$\overline{AP}:\overline{AT}=\overline{AT}:\overline{AQ}$

$\therefore \overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AT}^2=r^2$

که در آن r شعاع دایره A است. بویژه نقطه Q فقط به دایره B بستگی دارد، بدین معنی کــه دایــره B بر A دایره عمود است و از نقطه P می گذرد. اما بینهایت از این دوایر وجود دارند.

دو نقطه Q,P را قرینه یا منعکس یکدیگر نسبت به دایره A گویند، هر گاه هــر دو نقطــه Q,P روی شعاعی باشند که از نقطه A (مرکز دایره) می‌گذرد و $\overline{AP}.\overline{AQ}=r^2$، که r شعاع دایره است.

مرکز این دایره و نقطه بینهایت قرینه یکدیگرند و قرینه یک نقطه واقع بر دایره بر خودش منطبق است. اگر دایره به خط بدل شود، دو نقطه فقط و فقط وقتی قرینه یکدیگرند که نسبت به این خط قرینه یکدیگر باشند.

بحث فوق، نیمه اول برهان لم زیر است:

لم۱. اگر دایره B. بر یک دایره A عمود باشد و از نقطه ای مانند P بگذرد، آنگاه بایــد از نقطــه Q، قرینه نقطه P نسبت به دایره ی A، نیز بگذرد. به عکس، اگر دایره ای مانند B از دو نقطــه Q,P، که نسبت به دایره A قرنیه یکدیگرند بگذرند، آنگاه دو دایره B, A بر هم عمودند.

برهان. برهان عکس قضیه تنها با معکوس کردن استدلال فوق، حاصل می‌شود. با نمادهای فوق بنا به فرض داریم.

$\overline{AP}:\overline{AT}=\overline{AT}:\overline{AQ}$ یعنی $\overline{AP}:\overline{AQ}=\overline{AT}^2$

در نتیجه:

$\therefore ATP \sim \Delta AQT$

بنابراین:

$$\angle ATP = \angle AQT = \angle PST = \frac{\pi}{2} - \angle PTS$$

$$\therefore \angle ATB = \frac{\pi}{2}$$

قضیه۱. (اصل تقارن). تبدیل موبیوس، تقارن را حفظ می‌کند.

برهان. فرض می کنیم دو نقطه Q, P نسبت به دایره A متقارن باشند و تبدیل موبیوس T نقاط Q, P را به ترتیب به نقاط Q', P' بنگارد و دایره A را به دایره A' می‌خواهیم نشان دهیم که نقاط Q', P' نسبت به دایره A' قرینه اند.

فرض کنید B' دایره دلخواهی باشد که از نقطه P' گذشته و بر دایره A' عمود است. پس پیشنگاره $T^{-1}B'$ دایره ای است عمود بر دایره A (زیرا T^{-1} تبدیلی موبیوس، و لذا همدیس است) و از نقطه $T^{-1}P' = P$ می گذرد. با توجه به لم پیش، دایره $T^{-1}B'$ نیز باید از نقطه Q بگذرد. از اینجا نتیجه می شود که دایره B' باید از نقطه Q' بگذرد، یعنی Q' قرینه P' نسبت به دایره A' باشد.

مثال۱. تبدیل موبیوسی که دایره یکه $|z| = 1$ را بر دایره یکه $|w| = 1$ می نگارد باید به صورت زیر باشد:

$$w = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} \qquad \left(|k| = 1, |\alpha| \neq 1\right)$$

اثبات. فرض کنید $\left(\alpha \neq \infty, |\alpha| \neq 1\right)$ نقطه ای باشد که بر $w = 0$ نگاشته شده است.

پس نگاره قرینه اش $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ (نسبت به دایره یکه) باید $w = \infty$ باشد.

$$\therefore\ w = k'\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\alpha}} = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad (k=-\bar{\alpha}k')$$

چون تساوی $|w|=1$ وقتی برقرار است که داشته باشیم $|z|=1$، با قرار دادن $z=1$ ، خواهیم داشت:

$$1=|k|.\left|\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right|=|k|$$

اگر $\alpha=\infty$، داریم $w=\dfrac{k}{z}$ و $|k|=1$. به عکس، اگر

$$w=k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \qquad (|k|=1,|\alpha|\neq 1)$$

آنگاه به ازای $|z|=1$،

$$|w|=|k|\ .\ \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|=\left|\frac{\bar{z}(z-\alpha)}{1-\bar{\alpha}z}\right|=\left|\frac{1-\alpha\bar{z}}{1-\bar{\alpha}z}\right|=1$$

بنابراین تبدیل موبیوسی که چنین به دست آید در آن شرط صدق می کند. داخل دایره یکه صفحه z به ترتیب بر داخل یا خارج دایره یکه صفحه w نگاشته می شود هر گاه $|\alpha|>1$ یا $|\alpha|<1$.

مثال۲. هر تبدیل موبیوس که محور حقیقی صفحه z را بر دایره $|w|=1$ در صفحه w بنگارد، باید به شکل

$$w=k\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}} \quad (|k|=1,\mu\notin \mathbb{R})$$

اثبات. نقاط صفحه z متناظربا $w=0,\infty$ بایدنسبت به محورحقیقی قرینه یکدیگر،یعنی مزدوج مختلط یکدیگر باشند. بنابراین:

$$w=k\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}}\ (\mu\notin \mathbb{R})$$

هنگامی که z حقیقی است، داریم $\left|\frac{z-\mu}{z-\bar{\mu}}\right| = 1$ و w باید بر دایره یکه واقع باشد. یعنی $|w| = 1$، و از آنجا $|k| = 1$. به عکس، روشن است که تبدیلهای موبیوس به شکل بالا در شرایط مطلوب صدق خواهند کرد. نیمه بالایی صفحه بر داخل یا خارج دایره یکه $|w| = 1$ نگاشته می شود. بسته به اینکه $\Im\mu > 0$ یا $\Im\mu < 0$.